

OFDM : principe et applications

Philippe Ciblat

Institut Mines-Télécom / Télécom ParisTech, Paris, France

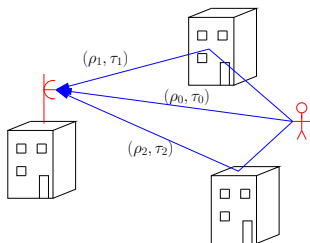
Plan

- Notion d'Interférence entre Symboles
 - Canal multi-trajets
 - Traitement mono-porteuse
- OFDM
 - Modèle matriciel du signal
 - Quelques lemmes fondamentaux
 - Dédution de l'OFDM
 - Dimensionnement
 - Quelques défauts
- Détection en OFDM
 - Quelques résultats généraux
 - Application à l'OFDM
- Allocation de ressources
 - Canal connu à l'émetteur (CSIT)
 - Canal inconnu à l'émetteur

Partie 1 : Interférence entre Symboles

Canal de propagation

Canal de type sans fil (*wireless*) : canal multi-trajet



$$x(t) = \sum_k s_k g(t - kT_s)$$

$$y(t) = \sum_k \rho_k x(t - \tau_k) + b(t)$$

$$= c(t) \star x(t) + b(t)$$

$$y(n) = y(nT_s) = \sum_{\ell=0}^L h(\ell) s_{n-\ell} + b(n)$$

avec $h(n) = (c \star g)(t)|_{t=nT_s}$ et L longueur du filtre.

- Interférence entre Symboles (si $L \neq 0$)
- Bruit additif

Interférence entre Symboles (IES)

$$y(n) = h(0)s_n + \underbrace{\sum_{\ell=1}^L h(\ell)s_{n-\ell}}_{\text{IES}} + b(n)$$

Cas d'absence d'IES : $h(\ell) = 0, \forall \ell \neq 0$

- $t \mapsto h(t)$ est un filtre de Nyquist car $h(\ell) = h(\ell T_s) = \delta_{\ell,0}$ et admet comme contrainte $B > 1/T_s$.
- $t \mapsto h(t)$ est Nyquist si $c(t) = \delta(t)$ et $g(t)$ Nyquist.

Cas de présence d'IES : $\exists \ell \neq 0$, tel que $h(\ell) \neq 0$

- $t \mapsto h(t)$ n'est pas Nyquist dès que $\tau_{\max} > T_s$ avec $\tau_{\max} = \max_k \tau_k$.

Quelques exemples

Canal gaussien : $y(n) = h(0)s_n + b(n)$

- Multitrajets très courts par rapport à T_s
- Valable pour les faisceaux hertziens
- Valable pour le satellite
- Valable aussi pour les liaisons très bas débit

Canal sélectif en fréquence : $y(n) = h(0)s_n + \text{IES} + b(n)$

- Valable en sans fil (GSM avec $L = 4$, Wifi avec $L = 16$)
- Valable pour l'ADSL aussi ($L = 100$)

Remarque fondamentale

- La nature du canal (IES ?) est modifiée selon le débit requis
- Plus le débit est élevé, plus le canal admet d'IES ($L \gg 1$)

Détecteur ML

$$[\hat{s}_0, \dots, \hat{s}_N] = \arg \min_{\substack{[s_0, \dots, s_N] \\ \in \text{constellation}^{N+1}}} \sum_{n=0}^N \left| y(n) - \sum_{\ell=0}^L h(\ell) s_{n-\ell} \right|^2$$

Le problème consiste à trouver le minimum d'une forme quadratique sous certaines contraintes

- Approche exhaustive \Rightarrow trop complexe $\mathcal{O}(M^{N+1})$

Solution

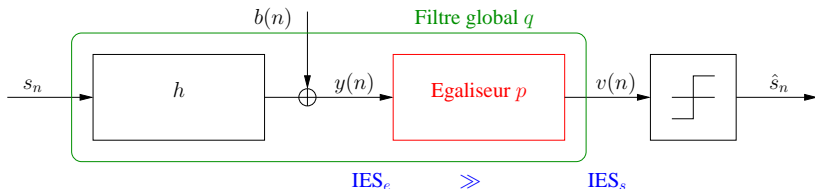
Algorithme de Viterbi (1973) - optimal mais de complexité réduite

- Complexité en $\mathcal{O}((N+1).M^L)$. Donc M et L petits.
- Rappel : $\max_k \tau_k = LT_s$, $D_b = \log_2(M)/T_s$ et $B = 1/T_s$.
- Augmenter le débit revient
 - soit à augmenter $M \Rightarrow$ mauvais pour Viterbi
 - soit à augmenter B et donc $L \Rightarrow$ mauvais pour Viterbi

Egalisation linéaire

Objectif

- Viterbi trop complexe si débit élevé
- Construire un récepteur simple (mais sous-optimal)



Question : comment choisir le filtre p (de taille infinie) ?

Egaliseur ZF

On annule entièrement l'IES

$$q = \delta \Leftrightarrow p_{ZF} \star h = \delta \Leftrightarrow p_{ZF}(e^{2i\pi f}) = \frac{1}{h(e^{2i\pi f})}$$

Ainsi

$$v(n) = s_n + b'(n)$$

avec

$$b'(n) = p_{ZF} \star b(n)$$

Problème : le bruit $b'(n)$ a été augmenté !

Egaliseur de Wiener (MMSE)

On choisit p t.q.

$$p_{\text{Wiener}} = \arg \min_p \mathbb{E}[|v(n) - s_n|^2]$$

Alors

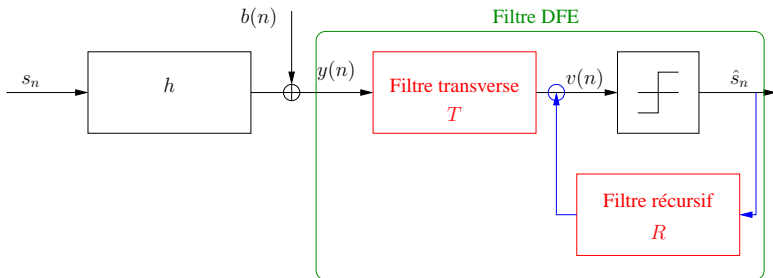
$$p_{\text{Wiener}}(e^{2i\pi f}) = \frac{E_s \overline{h(e^{2i\pi f})}}{E_s |h(e^{2i\pi f})|^2 + 2N_0}$$

Remarques :

- Fort RSB : $p_{\text{Wiener}} \approx p_{\text{ZF}}$
- Faible RSB : $p_{\text{Wiener}} \propto \overline{h(e^{2i\pi f})}$ (filtre adapté)

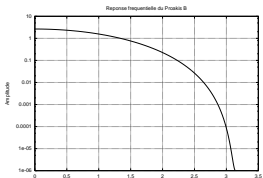
Egaliseur DFE

- Egaliseur non-linéaire
- Egaliseur à retour de décision (Decision Feedback Equalizer)

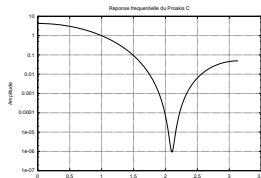


- ZF-DFE
- MMSE-DFE

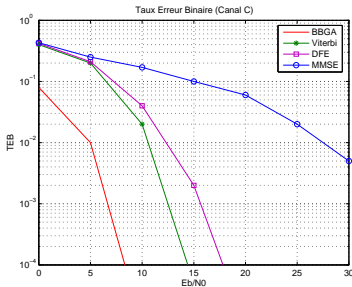
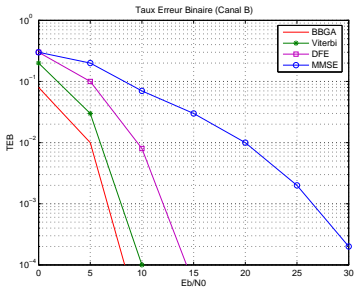
Illustrations numériques



Sélectif (Proakis B)



Très sélectif (Proakis C)



Partie 2 : Principe de l'OFDM

Modèle matriciel Entrée/Sortie (I)

Soient

- $x(n)$ le signal émis (échantillonné au temps-symbole)
- $y(n)$ le signal reçu
- $\{h(\ell)\}_{\ell=0, \dots, L}$ le filtre associé au canal de propagation

$$y(n) = \sum_{\ell=0}^L h(\ell)x(n - \ell)$$

Considérons des blocs de signaux de taille N

- $Y = [y(N-1), \dots, y(0)]^T$
- $X = [x(N-1), \dots, x(0)]^T$
- $\tilde{X} = [x(-1), \dots, x(-L)]^T$

Modèle matriciel Entrée/Sortie (II)

$$Y = \mathbf{T}_1 X + \mathbf{T}_2 \tilde{X}$$

avec

- \mathbf{T}_1 une matrice dont la $k^{\text{ème}}$ ligne est donnée par
 - $[\mathbf{0}_{k-1}, h(0), h(1), \dots, h(L), \mathbf{0}_{N-L-k}]$ (si $k \leq N - L$)
 - $[\mathbf{0}_{k-1}, h(0), h(1), \dots, h(N - k - 1)]$ (si $k > N - L$)
- \mathbf{T}_2 une matrice dont la $k^{\text{ème}}$ ligne est donnée par
 - $\mathbf{0}_L$ (si $k \leq N - L$)
 - $[h(L), h(L - 1), \dots, h(N - k + 1), \mathbf{0}_{N-k}]$ (si $k > N - L$)

Remarque :

- \mathbf{T}_1 une matrice Toeplitz de taille $N \times N$
- \mathbf{T}_2 une matrice Toeplitz de taille $N \times L$

Lemme 1 (I)

Considérons la relation Entrée/Sortie suivante

$$Y = \mathbf{W}X$$

avec \mathbf{W} une matrice quelconque de mélange (d'où, interférence)

- MIMO
- IES si $\mathbf{W} = \mathbf{T}_1$ et $\tilde{X} = 0$, i.e., si présence d'un intervalle de garde entre les blocs
- IES si \tilde{X} s'écrit linéairement en fonction de X , i.e., l'intervalle de garde n'est pas vide mais dépend du bloc courant.
- POLMUX (optique)
- etc

Question : comment créer un système sans interférence au niveau du récepteur (en modifiant l'émetteur) ?

Lemme 1 (II)

Hypothèse : connaissance parfaite de \mathbf{W} à l'émetteur (CSIT).

Soit la décomposition en valeur singulière de \mathbf{W} , $\mathbf{W} = \mathbf{U}^H \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}$ avec

- \mathbf{U} et \mathbf{V} deux matrices unitaires.
- $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1})$.

Soit un vecteur S de taille N composé de symboles d'information.

- Au lieu d'envoyer $X = S$, on envoie $X = \mathbf{V}^H S$
- Au lieu de détecter sur Y , on détecte sur $Z = \mathbf{U} Y$

$$\Rightarrow Z = \mathbf{\Lambda} S$$

Remarque :

- On place l'information dans les vecteurs propres (qui, par définition, n'interfèrent pas entre eux !)
- Les vecteurs dépendent généralement de \mathbf{W}
- Problème : CSIT irréaliste en sans fil, moins en optique

Lemme 2

Soit \mathbf{C} une matrice circulante de taille $N \times N$ associée au canal $\{h(\ell)\}_{\ell=0, \dots, L}$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} h(0) & h(1) & \dots & h(L) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h(0) & h(1) & \dots & h(L) & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h(1) & \dots & h(L) & 0 & \dots & 0 & h(0) \end{bmatrix}$$

Propriété :

- les v.e.p. de \mathbf{C} sont les vecteurs de Fourier (et donc indépendants du canal !)
- les v.a.p. sont les réponses du filtre aux fréquences de Fourier

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^H \mathbf{\Lambda} \mathbf{F}$$

avec

- \mathbf{F} matrice de FFT (d'où, $\mathbf{F}^H = \mathbf{F}^{-1}$)
- $\lambda_n = H(e^{2i\pi n/N}) = \sum_{\ell=0}^L h(\ell) e^{-2i\pi \frac{\ell n}{N}}$

Principe de l'OFDM

Si $\tilde{X} = [x(N-1), \dots, x(N-L)]^T$, alors

$$Y = \mathbf{T}_1 X + \mathbf{T}_2 \tilde{X} \Leftrightarrow Y = \mathbf{C} X$$

Donc

$$Z = \mathbf{A} S$$

avec $Z = \mathbf{F} Y$ et $X = \mathbf{F}^{-1} S$.

Ainsi, pour le bloc k et la porteuse n , on a

$$z_k(n) = H(e^{2i\pi n/N}) s_k(n) \quad \forall n, k$$

Remarque : le préfixe cyclique transforme une Toeplitz en une Circulante (qui diagonalise dans une base indépendante du canal !)

Approche alternative

A cause du canal, on reçoit :

$$\begin{cases} y(N-1) &= h(0)x(N-1) + h(1)x(N-2) + \dots + h(L)x(N-L-1) \\ &\vdots \\ y(0) &= h(0)x(0) + h(1)x(-1) + \dots + h(L)x(-L) \end{cases}$$

$$y(n) = \sum_{\ell=0}^L h(\ell)x(n-\ell) \xrightarrow{\text{Pr. Cyclique}} y(n) = \sum_{\ell=0}^L h(\ell)x(n-\ell \bmod N)$$

- Transformation d'une convolution en une convolution circulaire
- Si convolution ($\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$), $Y(e^{2i\pi n/N}) \neq H(e^{2i\pi n/N})X(e^{2i\pi n/N})$
- Si convolution circulante (\mathbf{C}), $Y(e^{2i\pi n/N}) = H(e^{2i\pi n/N})X(e^{2i\pi n/N})$

Approche alternative

Grâce au préfixe cyclique, on reçoit en fait :

$$\begin{cases} y(N-1) &= h(0)x(N-1) + h(1)x(N-2) + \dots + h(L)x(N-L-1) \\ &\vdots \\ y(0) &= h(0)x(0) + h(1)x(-1) + \dots + h(L)x(-L) \end{cases}$$

$$y(n) = \sum_{\ell=0}^L h(\ell)x(n-\ell) \xrightarrow{\text{Pr. Cyclique}} y(n) = \sum_{\ell=0}^L h(\ell)x(n-\ell \bmod N)$$

- Transformation d'une convolution en une convolution circulaire
- Si convolution ($\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$), $Y(e^{2i\pi n/N}) \neq H(e^{2i\pi n/N})X(e^{2i\pi n/N})$
- Si convolution circulante (\mathbf{C}), $Y(e^{2i\pi n/N}) = H(e^{2i\pi n/N})X(e^{2i\pi n/N})$

Approche alternative

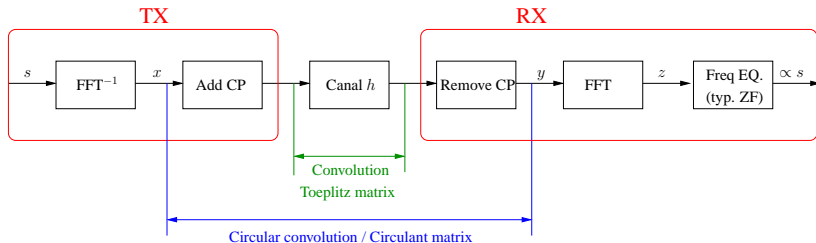
Grâce au préfixe cyclique, on reçoit donc :

$$\begin{cases} y(N-1) &= h(0)x(N-1) + h(1)x(N-2) + \dots + h(L)x(N-L-1) \\ &\vdots \\ y(0) &= h(0)x(0) + h(1)x(N-1) + \dots + h(L)x(N-L) \end{cases}$$

$$y(n) = \sum_{\ell=0}^L h(\ell)x(n-\ell) \xrightarrow{\text{Pr. Cyclique}} y(n) = \sum_{\ell=0}^L h(\ell)x(n-\ell \bmod N)$$

- Transformation d'une convolution en une convolution circulaire
- Si convolution ($\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$), $Y(e^{2i\pi n/N}) \neq H(e^{2i\pi n/N})X(e^{2i\pi n/N})$
- Si convolution circulante (\mathbf{C}), $Y(e^{2i\pi n/N}) = H(e^{2i\pi n/N})X(e^{2i\pi n/N})$

Schéma récapitulatif



Le préfixe cyclique est fondamental !

Dimensionnement : règles

- **N doit être suffisamment grand**

$$L \ll N \Rightarrow LT_s \ll NT_s \Rightarrow T_d \ll NT_s$$

$$N \gg B/B_c \Leftrightarrow \Delta f \ll B_c$$

- **N doit être suffisamment petit**

$$(L + N)T_s \ll T_c \Rightarrow NT_s \ll T_c$$

$$N \ll B/B_d \Leftrightarrow \Delta f \gg B_d$$

car aussi

- Désynchronisation des VCO (qq dizaines de ppm en sans fil)
- Complexité de la FFT (en $N \log(N)$)
- Temps de latence

Dimensionnement : exemples

	DAB	Wifi	ADSL
Fréquence porteuse	900 MHz	5.2 GHz	0.6 MHz
Bande	2 MHz	20 MHz	1.1 MHz
Temps d'échantillonnage	0.5 μ s	50 ns	0.9 μ s
Longueur filtre	30 à 60 μ s	800 ns	135 μ s
Degré filtre	60 à 120	16	150
Préfixe cyclique	128	16	32
Perte efficacité spectrale	20%	20%	12.5 %
Nb de porteuses	512	64	256
Durée symbole OFDM	320 μ s	4 μ s	256 μ s
Ecart entre porteuses	3.9 kHz	312.5 kHz	4.31 kHz
Bande de cohérence	16.6 kHz	1.25 MHz	7.4kHz
Bande Doppler	110 Hz (14m/s)	52Hz (3m/s)	0

Remarque : en ADSL, on introduit un *Time Equalizer* (TEQ), i.e., un « raccourcisseur de canal » (*channel shortening*)

Problème du PAPR (I)

Soit $\{x(n)\}$ un signal numérique, on définit le facteur de crête par

$$F = \frac{\max_{n=\{0, \dots, N-1\}} |x(n)|^2}{\mathbb{E}[|x(n)|^2]}$$

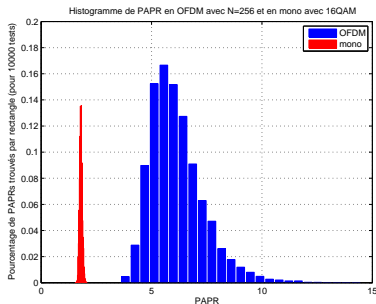
- PAPR : *Peak to Average Power Ratio*
- Si F grand, on sort de la plage linéaire des amplificateurs

Signal OFDM

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} s(m) e^{2i\pi mn/N}$$

⇒ $F_{\max} = N$ si BPSK

⇒ $x(n)$ tend vers un signal gaussien (si $N \rightarrow \infty$)

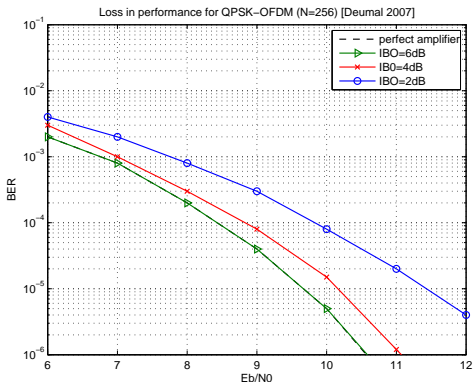


Problème du PAPR (II)

Défaut de saturation de l'amplificateur : input back-off (IBO)

$$\text{IBO} = 10 \log_{10} (P_{\max}/P_x)$$

- P_{\max} la puissance maximale admise par l'amplificateur
- P_x la puissance moyenne du signal entrant dans l'amplificateur



Problème de synchronisation

Soit

$$y_a(t) = (h_a \star x_a)(t - \tau) e^{2i\pi\delta\phi t}.$$

L'OFDM admet une sensibilité plus grande aux erreurs :

- Temps de retard (sauf si inclus dans l'intervalle de garde)
- Résidu de fréquence porteuse et/ou fréquence d'échantillonnage

$$Y = \mathbf{\Delta C X} \text{ avec } \mathbf{\Delta} = \text{diag}(1, e^{2i\pi\delta\phi T_s}, \dots, e^{2i\pi\delta\phi T_s(N-1)})$$

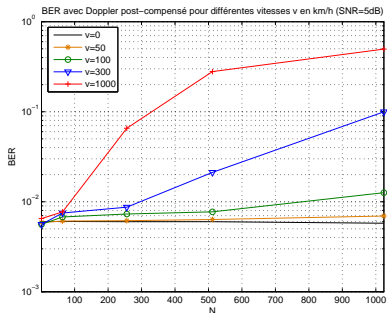
Exemple

Si canal plat ($\mathbf{\Lambda} = \mathbf{Id}$)

$$Z_{\text{OFDM}} = \mathbf{F \Delta F^{-1} S}$$

$$Z_{\text{mono}} = \mathbf{\Delta S}$$

Pas d'IEP//CI en mono



Partie 3 : Détection en OFDM

Principe de la détection optimale

On suppose que

$$Y = \mathbf{W}S + B$$

avec B un bruit blanc gaussien de variance σ^2 (de taille $N \geq 2$)

Objectif : A la donnée de Y et \mathbf{W} , on souhaite détecter S avec la probabilité d'erreur la plus faible possible

Résultat fondamental

Si les vecteurs S sont équiprobables, alors le détecteur du Maximum de Vraisemblance (*ML : Maximum Likelihood*) est optimal

$$\hat{S}_{\text{ML}} = \arg \max_S p(Y|S) \Leftrightarrow \hat{S}_{\text{ML}} = \arg \min_S \|Y - \mathbf{W}S\|$$

Détecteur optimal

$$\hat{S}_{ML} = \arg \min_S \|Y - \mathbf{W}S\|$$

- Problème **simple** en l'absence de contrainte sur S

Approche ML :

- Décodeur par sphère
- Décodeur de Schnorr-Euchner
- ...

- Bien adapté au MIMO ou POLMUX (car N petit)
- Mal adapté à l'IES (car N grand)
 - utilisation de la structure de la matrice $\mathbf{W} = \mathbf{T}_1$
 - algorithme de Viterbi (cf. transparent 6)

Détecteur optimal

$$\hat{S}_{ML} = \arg \min_{S \in \mathcal{C}^N} \|Y - \mathbf{W}S\|$$

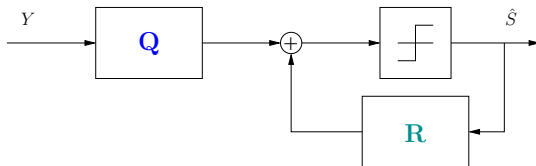
- Problème **complexe** en raison de la contrainte sur S

Approche ML :

- Décodeur par sphère
- Décodeur de Schnorr-Euchner
- ...

- Bien adapté au MIMO ou POLMUX (car N petit)
- Mal adapté à l'IES (car N grand)
 - utilisation de la structure de la matrice $\mathbf{W} = \mathbf{T}_1$
 - algorithme de Viterbi (cf. transparent 6)

Détecteurs sous-optimaux



- ZF : $\mathbf{Q} = \mathbf{W}^{-1}$, $\mathbf{R} = 0$ (rehaussement du bruit)
- MMSE : $\mathbf{Q} = \mathbf{W}^H(\mathbf{W}\mathbf{W}^H + \sigma^2\mathbf{I})^{-1}$, $\mathbf{R} = 0$
- DFE : $\mathbf{R} \neq 0$

Cas particulier (IES)

- Matrices trop grandes
- Mise en place de ces principes par des filtres

Cas particulier : OFDM (SISO)

Propriété : la matrice **W** est diagonale

On peut donc raisonner porteuse par porteuse (car pas d'interférence). On a donc, sur la porteuse n ,

$$z(n) = H(n)s(n) + b(n)$$

avec

- $z(n)$ le signal scalaire reçu en aval de la FFT
- $s(n)$ le symbole émis en amont de l'IFFT
- $H(n)$ le canal pour la porteuse n

Détecteur optimal

Détecteur à seuil sur le signal $H(n)^{-1}z(n)$

Cas particulier : OFDM (MIMO)

On considère M le nombre d'antennes à l'émission et à la réception

$$\mathbf{z}(n) = \mathbf{H}(n)\mathbf{s}(n) + \mathbf{b}(n)$$

avec

- $\mathbf{z}(n)$ le signal vectoriel (de taille $M \times 1$) reçu en aval de la FFT
- $\mathbf{s}(n)$ les symboles émis en amont de l'IFFT sur les M antennes
- $\mathbf{H}(n)$ le canal MIMO (de taille $M \times M$) pour la porteuse n

⇒ Modèle « **flat-fading channel** » par porteuse

Détection

Appliquer les résultats du transparent 26 (car M est petit)

Partie 4 : Allocation en OFDM

Introduction

OFDM offre une souplesse supplémentaire comparé au mono-porteuse

- attribution des porteuses
- puissance répartie entre les porteuses
- modulation et codage différents selon les porteuses
- ...

Deux contextes fondamentalement différents :

- Canal connu à l'émetteur (voie de retour nécessaire avec canal lentement variable)
- Canal inconnu à l'émetteur

Canal connu à l'émetteur (I)

Objectif : attribution intelligente des puissances par porteuse afin d'augmenter la capacité (« waterfilling »).

- P_n puissance de la porteuse n
- $H(n)$ réponse fréquentielle du filtre à la porteuse n
- $2N_0$ puissance du bruit

Problème d'optimisation

$$\max_{P_1, \dots, P_N} C = \sum_{n=1}^N \log_2 \left(1 + \frac{|H(n)|^2 P_n}{2N_0} \right)$$

avec

$$\sum_{n=1}^N P_n \leq P$$

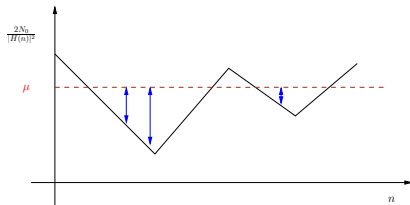
Canal connu à l'émetteur (II)

Solution

$$P_n^* = \left(\mu - \frac{2N_0}{|H(n)|^2} \right)^+$$

avec μ t.q.

$$\sum_{n=1}^N P_n^* = P$$



Canal connu à l'émetteur (III)

Maximiser le débit à probabilité d'erreur identique sur chaque porteuse \Rightarrow Adapter les constellations M -MAQ pour chaque porteuse.

- Si RSB élevé sur la porteuse k , alors M grand.
- Si RSB faible sur la porteuse k , alors M petit.

$$P_e \propto Q \left(\sqrt{\frac{3E_b \log_2(M)}{N_0(M-1)}} \right)$$

Faire d'*Adaptive Modulation and Coding* (AMC) avec des *Modulation and Coding Scheme* (MCS) prédéfinis

Diversité multi-utilisateurs

- Considérons le cas multi-utilisateurs descendant : OFDMA
- Travaillons sur une unique porteuse (pour simplifier)

Pour l'utilisateur k , on a

$$y_k(n) = h_k(n)x(n) + b_k(n), \text{ et } \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L P_{\ell} \leq P \quad (\text{contrainte de puissance})$$

avec $n \mapsto h_k(n)$ constant sur L .

Capacités

$$C_{\text{no-CSIT}} = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \log_2 \left(1 + \frac{|h_{k(\omega), \ell}|^2 P}{2N_0} \right) \rightarrow \mathbb{E} \left[\log_2 \left(1 + \frac{|h|^2 P}{2N_0} \right) \right]$$

$$C_{\text{CSIT}} = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \log_2 \left(1 + \frac{|h_{k_{\ell}^*, \ell}|^2 P_{k_{\ell}^*, \ell}^*}{2N_0} \right) \rightarrow \mathbb{E} \left[\log_2 \left(1 + \frac{|h|^2 P^*}{2N_0} \right) \right]$$

avec $k_{\ell}^* = \arg \max_k |h_{k, \ell}|^2$ et $P_{k_{\ell}^*, \ell}^* = \left(\mu - \frac{2N_0}{|h_{k_{\ell}^*, \ell}|^2} \right)^+$.

Canal inconnu à l'émetteur

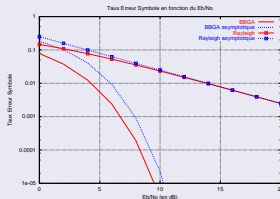
$$y(n) = h(n)s(n) + b(n)$$

avec

- $y(n)$: signal reçu
- $s(n)$: symboles émis
- $h(n)$: **canal aléatoire de Rayleigh**
- $b(n)$: bruit additif gaussien

Performances

$$P_e = \mathbb{E}[P_e(h)] \propto \frac{1}{E_s/N_0}$$

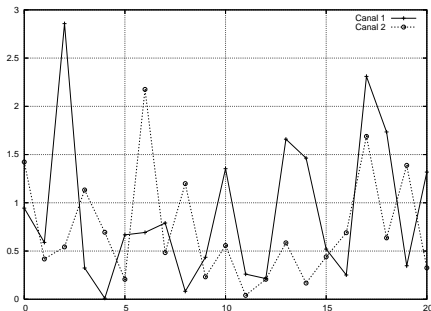


Notion de diversité

Problème : lorsque l'évanouissement $h(n)$ est faible, la qualité de la transmission est catastrophique.

Remarque

Si le même signal est reçu par plusieurs canaux indépendants, alors la probabilité d'erreur va diminuer. Le nombre de versions reçues sera appelé **ordre de diversité** ou **diversité**.



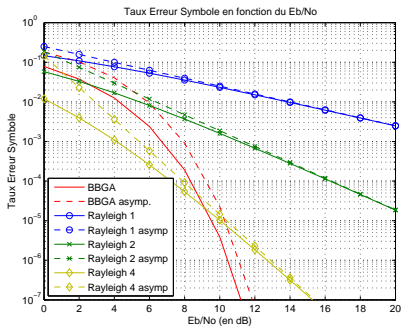
Performances

Probabilité d'erreur

$$P_e \propto \frac{1}{(E_s/N_0)^L}$$

à fort Rapport Signal-à-Bruit.

L = ordre de diversité



Solution 1 : C-OFDM

⇒ Si évanouissement fréquentiel, détection peu fiable.

Adaptation du système :

- Codage
- Entrelacement
 - ★ fréquentiel
 - ★ temporel

On parle alors de Coded-OFDM.

En pratique, code convolutif.

Solution 2 : LP-OFDM

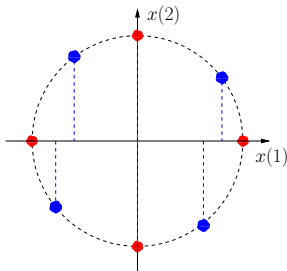
Exemple : $N = 2$.

$y(1) = h(1)x(1) + b(1)$ et $y(2) = h(2)x(2) + b(2)$, avec $x(1)$ et $x(2)$ des données indépendantes appartenant à une MDP-2. On a

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

avec $\mathbf{y} = [y(1), y(2)]^T$, $\mathbf{H} = \text{diag}(h(1), h(2))$.

- Système à diversité de 1.
- En lieu et place de \mathbf{x} , transmettons $\mathbf{W}\mathbf{x}$ avec \mathbf{W} une rotation. Système à diversité de 2 et pourtant code de rendement 1.



Récepteurs LP-OFDM

Généralisation

On distribue tous les symboles sur toutes les porteuses linéairement

$$\mathbf{Y}_N = [y(1), \dots, y(N)]^T = \mathbf{HWS}_N + \mathbf{B}_N$$

avec

- \mathbf{H} matrice diagonale des réponses fréquentielles du filtre
- \mathbf{W} matrice de précodage apportant de la diversité

Détection ML :

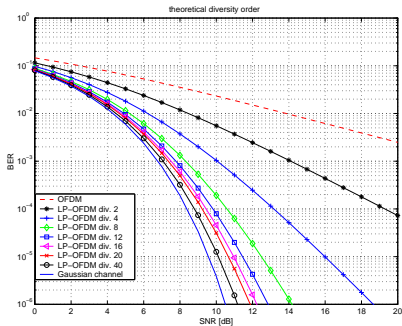
$$\hat{\mathbf{s}}_N = \arg \min_{\mathbf{s}} \|\mathbf{Y}_N - \mathbf{HWS}\|^2$$

Complexité ingérable pour N grand.

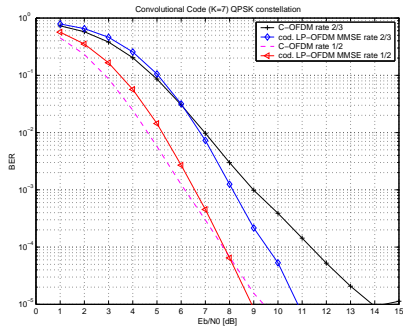
Détection MMSE : détecteur à seuil sur le signal $\mathbf{Z}_N = \mathbf{G}\mathbf{Y}_N$ avec

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \arg \min \mathbb{E}[\|\mathbf{Z}_N - \mathbf{S}_N\|^2] \\ \mathbf{G} &= \mathbf{W}^H \mathbf{H}^H (\mathbf{H} \mathbf{W} \mathbf{W}^H \mathbf{H}^H + 2N_0 \mathbf{Id})^{-1} \end{aligned}$$

Performances



(uncoded) LP-OFDM

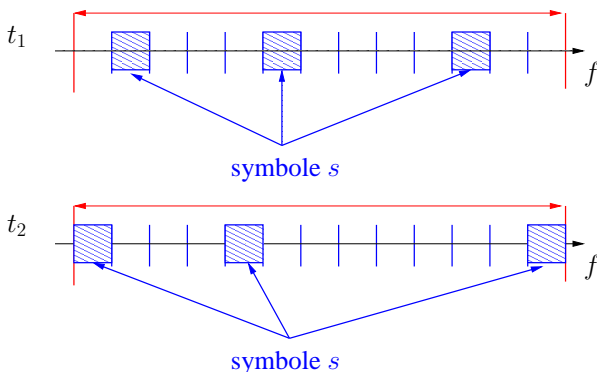


C-OFDM vs Coded LP-OFDM

Source : Prof. Debbah (Supélec)

Diversité en OFDMA

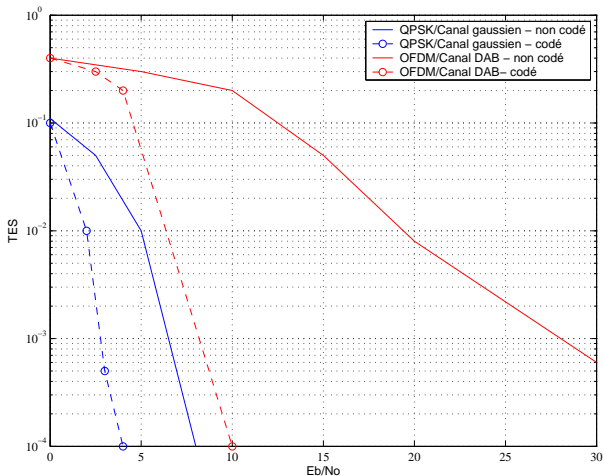
Appliquer le Saut de Fréquence/*Frequency Hopping (FH)*



"Porteuses" occupées dépendent d'un code propre à chaque utilisateur

- FH-OFDMA

Système réel : le DAB



Conclusion

Avantages :

- Bonne gestion de l'IES
- Bien adapté au MIMO
- Allocation dynamique des ressources

Inconvénients :

- Sensibilité accrue à la désynchronisation
- Facteur de crête

Bibliographie :

- R. van Nee, « *OFDM for wireless multimedia communications* », 2000
- A. Burr, « *Modulation and coding for wireless communication* », 2001
- A. Molisch, « *Wideband wireless digital communication* », 2001
- D. Tse, « *Fundamentals of wireless communications* », 2005