

Estimation du rythme

Philippe Ciblat

École Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris, France

Modèle en bande de base

Signal reçu en bande de base

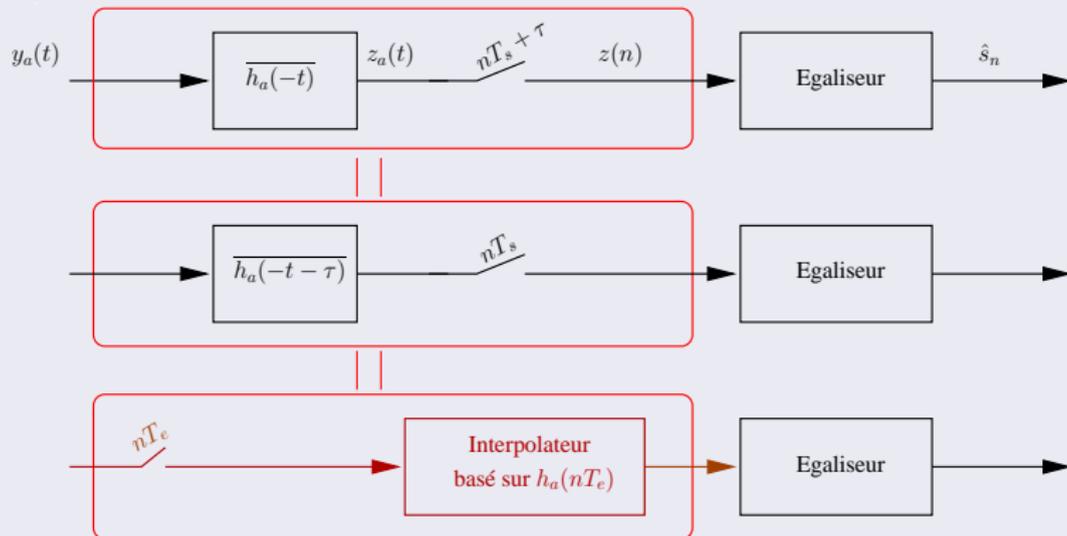
$$y_a(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k h_a(t - kT_s - \tau) + b_a(t)$$

avec

- $\{s_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$: symboles d'une constellation quelconque
- $b_a(t)$: bruit additif gaussien $\sim \mathcal{CN}(0, N_0 \mathbf{Id}_2)$
- $h_a(t)$: un filtre résultant d'un filtre de mise en forme $g_a(t)$, d'un canal de propagation et d'un déphasage global
- τ : un décalage temporel (appelé « rythme »)

Récepteur en bande de base

Récepteur (avec $h_a(t)$ et τ connus)



Remarque

- T_e période d'échantillonnage vérifiant le théorème de Shannon
- $T_e = T_s/2$ suffit

Problématique d'estimation du rythme

1. Canal $h_a(t)$ inconnu :

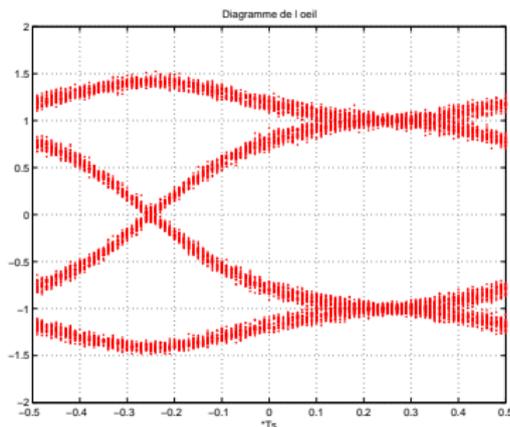
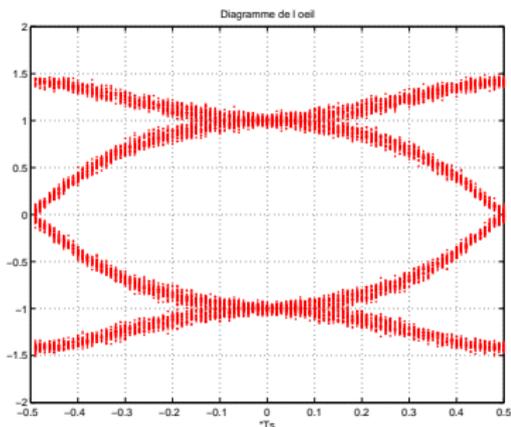
- Intégration de τ dans $h_a(t)$
↪ pas d'estimation de rythme proprement dite
- Suréchantillonner n'engendre pas de perte d'information
↪ pas d'estimation de rythme proprement dite

2. Canal $h_a(t)$ connu : canal avec évanouissement plat

- Idem au cas canal inconnu
- Seul τ à estimer donc plus simple
↪ estimation de rythme utile (en sortie de filtre adapté)

Exemple

- $h_a(t)$: filtre en racine de Nyquist de facteur d'excès de bande 1
- $E_b/N_0 = 30\text{dB}$, $\tau = T_s/4$



Modèle mathématique

Signal reçu

$$y_a(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n h_a(t - nT_s - \tau) + b_a(t)$$

- $\{s_n\}$ une séquence de données (*connue* ou *inconnue*)
- τ le décalage temporel *inconnu*
- $h_a(t)$ le filtre en recine de Nyquist *connu*
- $b_a(t)$ le bruit gaussien blanc circulaire de variance $2N_0$

Deux modes d'estimation :

- Avec séquence d'apprentissage
 ↪ Data-aided (DA) ou supervisé
- Sans séquence d'apprentissage
 ↪ Non-Data-aided (NDA) ou autodidacte/aveugle

Estimation supervisée

Estimateur du maximum de vraisemblance (approche analogique)

$$p(\mathbf{y}|\tau) \propto \exp \left\{ - \frac{\int_{\mathbb{R}} |y_a(t) - \sum_{n=0}^{N-1} s_n h_a(t - nT_s - \tau)|^2 dt}{2N_0} \right\}$$

Résultat

$$\hat{\tau}_N = \arg \max_{\tau} J_N(\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} \Re\{\bar{s}_n z_{\tau}(n)\}$$

avec

$$z_{\tau}(n) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} y_a(t) \overline{h_a(t - nT_s - \tau)} dt}_{\text{sortie de filtre adapté}}$$

Borne de Cramer-Rao

- Estimateur ML asymptotiquement sans biais et efficace

Résultat

$$\text{CRB}(\tau) = \frac{N_0}{4\pi^2 \left(\int_{\mathbb{R}} f^2 |H(f)|^2 \sum_{n,n'=0}^{N-1} \overline{s_n} s_{n'} e^{2i\pi f T_s (n' - n)} df \right)}$$

avec $H(f)$ la T.F. de $t \mapsto h_a(t)$

Remarque

- ρ grand :
 - bonne résistance à l'erreur de rythme
 - estimation fine du rythme aisée
- ρ petit :
 - mauvaise résistance à l'erreur de rythme
 - estimation fine du rythme délicate

Preuve

$$\begin{aligned} \ln p(\mathbf{y}|\tau) &\propto \frac{1}{N_0} \Re \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \bar{s}_n \int y_a(t) \overline{h_a(t - nT_s - \tau)} dt \right\} \\ \frac{d}{d\tau} \ln p(\mathbf{y}|\tau) &\propto -\frac{1}{N_0} \Re \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \bar{s}_n \int y_a(t) \overline{h'_a(t - nT_s - \tau)} dt \right\} \\ \frac{d^2}{(d\tau)^2} \ln p(\mathbf{y}|\tau) &\propto \frac{1}{N_0} \Re \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \bar{s}_n \int y_a(t) \overline{h''_a(t - nT_s - \tau)} dt \right\} \\ \mathbb{E} \left[\frac{d^2}{(d\tau)^2} \ln p(\mathbf{y}|\tau) \right] &\propto \frac{1}{N_0} \Re \left\{ \sum_{n,n'=0}^{N-1} \bar{s}_n s_{n'} \int h_a(t - n'T_s) \overline{h''_a(t - nT_s)} dt \right\} \\ &\propto -\frac{4\pi^2}{N_0} \Re \left\{ \sum_{n,n'=0}^{N-1} \bar{s}_n s_{n'} \int H(f) e^{2i\pi(n'-n)fT_s} \overline{f^2 H(f)} dt \right\} \end{aligned}$$

Séquence d'apprentissage optimale

- $\{s_n\}_n$ une réalisation d'une séquence pseudo-aléatoire stationnaire
- $r_s(m) = \mathbb{E}[s_{n+m}\overline{s_n}]$ la fonction d'autocorrélation
- $S_s(e^{2i\pi f}) = \sum_m r_s(m)e^{-2i\pi mf}$ le spectre

Résultat fondamental

$$\frac{1}{N} \sum_{n,n'=0}^{N-1} \mathbb{E}[s_{n'}\overline{s_n}] e^{2i\pi(n'-n)fT_s} \xrightarrow{p.s.} S_s(e^{-2i\pi fT_s})$$

Borne de Cramer-Rao asymptotique

$$\text{CRB}(\tau) = \frac{N_0}{4\pi^2 N \int_{\mathbb{R}} f^2 |H(f)|^2 S_s(e^{-2i\pi fT_s}) df}$$

La séquence optimale sélectionne la fréquence maximisant $f|H(f)|$

Preuve

$$\begin{aligned}
S_N &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=n-(N-1)}^n r_s(m) e^{2i\pi m f T_s} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} r_s(m) e^{2i\pi m f T_s} \\
&\quad - \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=n+1}^{N-1} r_s(m) e^{2i\pi m f T_s} - \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=-(N-1)}^{n-N} r_s(m) e^{2i\pi m f T_s} \\
&\approx \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} r_s(m) e^{2i\pi m f T_s} \\
&\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} S_s(e^{-2i\pi f T_s})
\end{aligned}$$

Implémentation par algorithme du gradient

L'estimateur de τ est donné par la maximisation (en bloc) de $J_N(\tau)$

$$\begin{aligned}
 J_N(\hat{\tau}^{(i-1)}) &< J_N(\hat{\tau}^{(i)}) \\
 J_N(\hat{\tau}^{(i-1)}) &< J_N(\hat{\tau}^{(i-1)} + \Delta) \\
 J_N(\hat{\tau}^{(i-1)}) &< J_N(\hat{\tau}^{(i-1)}) + J'_N(\hat{\tau}^{(i-1)})\Delta + o(\Delta^2) \\
 J'_N(\hat{\tau}^{(i-1)})\Delta &> 0 \\
 \Delta &= \mu J'_N(\hat{\tau}^{(i-1)}) \\
 \hat{\tau}^{(i)} &= \hat{\tau}^{(i-1)} + \mu J'_N(\hat{\tau}^{(i-1)}) \\
 \hat{\tau}^{(i)} &= \hat{\tau}^{(i-1)} + \mu \sum_{n=0}^{N-1} \Re \left\{ \frac{1}{s_n} \frac{\partial z_\tau(n)}{\partial \tau} \Big|_{\hat{\tau}^{(i-1)}} \right\}
 \end{aligned}$$

Algorithme du gradient stochastique (I)

- Au lieu de raisonner par bloc, on travaille échantillon par échantillon
- L'itération i devient alors un indice temporel (noté n)

Algorithme du gradient (stochastique)

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_n &= \hat{\tau}_{n-1} + \mu \mathbf{J}'_n(\hat{\tau}_{n-1}) \\ &= \hat{\tau}_{n-1} + \mu \Re \left\{ \frac{\partial \mathbf{z}_\tau(n)}{\partial \tau} \Big|_{\hat{\tau}_{n-1}} \right\}\end{aligned}$$

car $\mathbf{J}'_{n-1}(\hat{\tau}_{n-1}) = 0$

Algorithme du gradient stochastique (II)

Algorithme du Tôt-Tard

$$\left. \frac{\partial z_{\tau}(n)}{\partial \tau} \right|_{\hat{\tau}_{n-1}} = \frac{z_{\hat{\tau}_{n-1}+\Delta}(n) - z_{\hat{\tau}_{n-1}-\Delta}(n)}{2\Delta}$$

↪ approximation de la dérivée

Remarque

- Poursuite de rythme possible
- Variation de la rythme ϕ_n (au lieu de ϕ)
- Application possible à l'estimation de la période-symbole

$$\tau_n = nT_s + \tau$$

Estimation autodidacte

Estimateur du maximum de vraisemblance

$$p(\mathbf{y}|\tau) = \int p(\mathbf{y}|\tau, \mathbf{s}_N)p(\mathbf{s}_N)d\mathbf{s}_N$$

$$\propto \mathbb{E}_{\mathbf{s}} \left[\exp \left\{ -\frac{\int_{\mathbb{R}} |y_a(t) - \sum_{n=0}^{N-1} s_n h_a(t - nT_s - \tau)|^2 dt}{2N_0} \right\} \right]$$

Résultat général

$$\hat{\tau}_N = \arg \max_{\tau} \sum_{n=0}^{N-1} \ln \left(\sum_{m=0}^{P-1} p_m \int \prod_{n'=0}^{N-1} e^{-\frac{\overline{s_n s_{n'}} \rho_{n,n'}}{2N_0} + \frac{\Re\{\overline{s_n z_{\tau}(n)}\}}{N_0}} \delta(s_n - s^{(m)}) d\mathbf{s}_N \right)$$

avec

- $\rho_{n,n'} = \int h_a(t - n'T_s) \overline{h_a(t - nT_s)} dt$
- $s^{(m)}$ le $m^{\text{ème}}$ symbole de la constellation (contenant P points)
- p_m la probabilité d'apparition de $s^{(m)}$

Simplification

- MDA2
- Filtre en racine de Nyquist
- Equiprobabilité des symboles

Résultat

$$\hat{\tau}_N = \arg \max_{\tau} \sum_{n=0}^{N-1} \ln \left(\cosh \left(\frac{\Re \{z_{\tau}(n)\}}{N_0} \right) \right)$$

Faible E_b/N_0 (c'est-à-dire, $e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$)

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_N &= \arg \max_{\tau} \sum_{n=0}^{N-1} (\Re \{z_{\tau}(n)\})^2 \\ &= \arg \max_{\tau} \sum_{n=0}^{N-1} \Re \{z_{\tau}(n)^2\} + |z_{\tau}(n)|^2 \end{aligned}$$

Conclusion

- Interpolateur
- CRB pour le cas NDA
- Variation de τ : application à l'estimation de T_s

Bibliographie

- U. Mengali et A. d'Andrea, "Synchronisation techniques for digital receivers", Plenum Press, 1997.
- H. Meyr et al., " Digital communications receivers", Wiley, 1998.
- Luc Vandendorpe, "Signaux et Télécommunications", Polycopié UCL, 2000.
- J. Proakis, "Digital Communications", Chapitre 6, 2001.
- S. Gault et al., "Cramer-Rao bound for data-aided sampling clock offset and channel estimation", IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Mai 2004.
- P. Ciblat et al., "Asymptotic analysis of blind Cyclic correlation based symbol rate estimation", IEEE Trans. on Information Theory, Juillet 2002.