

Estimation de la phase

Philippe Ciblat

École Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris, France

Modèle en bande de base

Signal reçu en bande de base

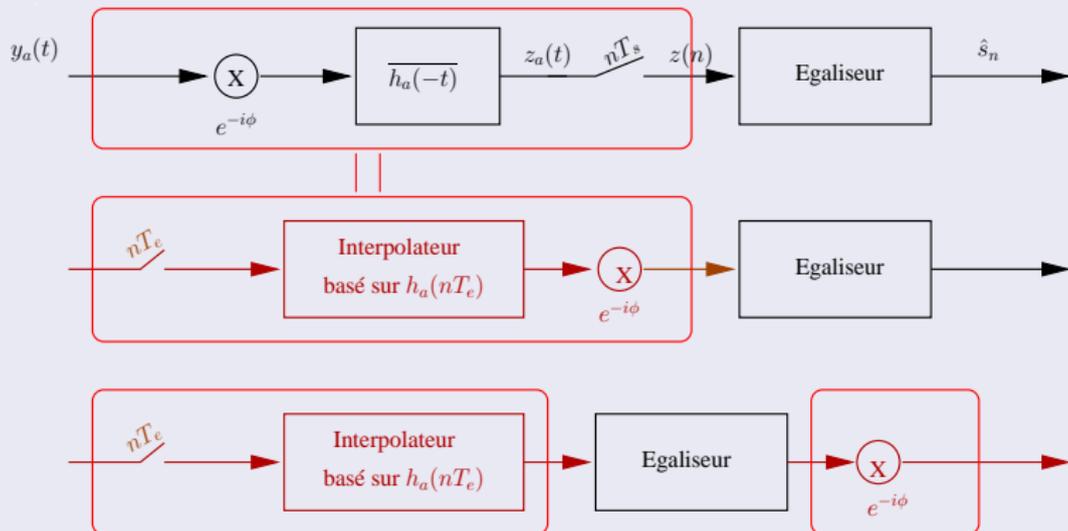
$$y_a(t) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k h_a(t - kT_s) \right) e^{i\phi} + b_a(t)$$

avec

- $\{s_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$: symboles d'une constellation quelconque
- $b_a(t)$: bruit additif gaussien $\sim \mathcal{CN}(0, N_0 \mathbf{Id}_2)$
- $h_a(t)$: un filtre résultant d'un filtre de mise en forme $g_a(t)$, d'un canal de propagation et d'un retard temporel
- ϕ un décalage de phase

Récepteur en bande de base

Récepteur (avec $h_a(t)$ et ϕ connus)



Remarque

- T_e période d'échantillonnage vérifiant le théorème de Shannon
- $T_e = T_s/2$ suffit

Problématique d'estimation de phase

1. Mettre en place une transmission non-cohérente

- Démodulation différentielle (MDPd)
- Signaux orthogonaux (PPM/FSK)

↪ Estimation de ϕ inutile mais 3dB de perte

2. Mettre en place une estimation du canal suivie d'un égaliseur

- Intégrer la phase ϕ dans $h_a(t)$
↪ Estimation de ϕ inutile
- Après égalisation (ou en BBGA), résidu de phase existe

$$P_{e,MDA2} = Q \left(\sqrt{\frac{2E_b \cos^2(\phi)}{N_0}} \right)$$

	0, 13dB	si	$\phi = 10^\circ$
Perte :	1, 25dB	si	$\phi = 30^\circ$
	3dB	si	$\phi = 45^\circ$

Modèle mathématique

Signal reçu

$$y(n) = s_n e^{j\phi} + b(n), \quad n = 0, \dots, N-1$$

- $\{s_n\}$ une séquence de données (*connue* ou *inconnue*)
- ϕ la phase *inconnue*
- $b(n)$ le bruit gaussien blanc circulaire de variance $2N_0$

Deux modes d'estimation :

- Avec séquence d'apprentissage
↪ Data-aided (DA) ou supervisé
- Sans séquence d'apprentissage
↪ Non-Data-aided (NDA) ou autodidacte/aveugle

Estimation supervisée

Estimateur du maximum de vraisemblance

$$p(\mathbf{y}_N | \phi) \propto \exp \left\{ -\frac{\sum_{n=0}^{N-1} |y(n) - s_n e^{i\phi}|^2}{2N_0} \right\}$$

avec $\mathbf{y}_N = [y(0), \dots, y(N-1)]^T$

Résultat

$$\hat{\phi}_N = \arg \max_{\phi} J_N(\phi) = \sum_{n=0}^{N-1} \Re \{ \bar{s}_n y(n) e^{-i\phi} \}$$

$$\hat{\phi}_N = \arctan \left(\frac{\sum_{n=0}^{N-1} \Im \{ \bar{s}_n y(n) \}}{\sum_{n=0}^{N-1} \Re \{ \bar{s}_n y(n) \}} \right) = \angle \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \bar{s}_n y(n) \right\}$$

Borne de Cramer-Rao

- Estimateur asymptotiquement sans biais et déterministe

$$\sum_{n=0}^{N-1} \overline{s_n} y(n) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} |s_n|^2 \right) e^{i\phi} + \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} \overline{s_n} b(n)}_{\text{terme de bruit}}$$

- Estimateur ML est aussi asymptotiquement efficace

Résultat

$$\text{CRB}(\phi) = \frac{N_0}{\sum_{n=0}^{N-1} |s_n|^2}$$

- Décroissance en $1/N$
- Décroissance en $1/\text{RSB}$

Preuve

$$\begin{aligned}
 \ln p(\mathbf{y}_N|\phi) &\propto \frac{1}{2N_0} \sum_{n=0}^{N-1} s_n \overline{y(n)} e^{i\phi} + \overline{s_n} y(n) e^{-i\phi} \\
 \frac{d}{d\phi} \ln p(\mathbf{y}_N|\phi) &\propto \frac{1}{2N_0} \sum_{n=0}^{N-1} i s_n \overline{y(n)} e^{i\phi} - i \overline{s_n} y(n) e^{-i\phi} \\
 &\propto \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N-1} \Im \{ \overline{s_n} y(n) e^{-i\phi} \} \\
 \frac{d^2}{(d\phi)^2} \ln p(\mathbf{y}_N|\phi) &\propto \frac{1}{2N_0} \sum_{n=0}^{N-1} -s_n \overline{y(n)} e^{i\phi} - \overline{s_n} y(n) e^{-i\phi} \\
 \frac{d^2}{(d\phi)^2} \ln p(\mathbf{y}_N|\phi) &\propto -\frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N-1} |s_n|^2 \\
 &+ \frac{1}{2N_0} \sum_{n=0}^{N-1} -s_n \overline{b(n)} e^{i\phi} - \overline{s_n} b(n) e^{-i\phi}
 \end{aligned}$$

Séquence d'apprentissage optimale

Considérons

- $\{s_n\}_n$ une réalisation d'une séquence pseudo-aléatoire stationnaire
- $r_s(\tau) = \mathbb{E}[s_{n+\tau}\overline{s_n}]$ la fonction d'autocorrélation

Résultat fondamental

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |s_n|^2 \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[|s_n|^2] = r_s(0)$$

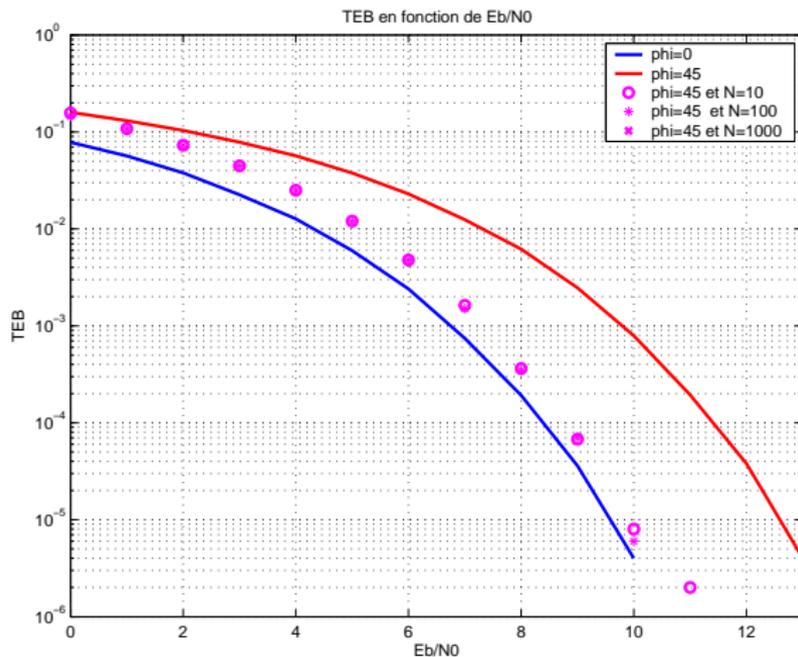
Borne de Cramer-Rao asymptotique

$$\text{CRB}(\phi) = \frac{N_0}{Nr_s(0)}$$

La séquence d'apprentissage optimale peut être *quelconque*

Simulations

- Canal gaussien
- MDA2



Implémentation par algorithme du gradient

L'estimateur de ϕ est donné par la maximisation (en bloc) de $J_N(\phi)$

$$\begin{aligned}J_N(\hat{\phi}^{(i-1)}) &< J_N(\hat{\phi}^{(i)}) \\J_N(\hat{\phi}^{(i-1)}) &< J_N(\hat{\phi}^{(i-1)} + \Delta) \\J_N(\hat{\phi}^{(i-1)}) &< J_N(\hat{\phi}^{(i-1)}) + J'_N(\hat{\phi}^{(i-1)})\Delta + o(\Delta^2) \\J'_N(\hat{\phi}^{(i-1)})\Delta &> 0 \\ \Delta &= \mu J'_N(\hat{\phi}^{(i-1)}) \\ \hat{\phi}^{(i)} &= \hat{\phi}^{(i-1)} + \mu J'_N(\hat{\phi}^{(i-1)})\end{aligned}$$

Algorithme du gradient stochastique

- Au lieu de raisonner par bloc, on travaille échantillon par échantillon
- L'itération i devient alors un indice temporel (noté n)

Algorithme du gradient (stochastique)

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_n &= \hat{\phi}_{n-1} + \mu \mathbf{J}'_n(\hat{\phi}_{n-1}) \\ &= \hat{\phi}_{n-1} + \mu \mathfrak{S}\{\overline{s}_n y(n) e^{-i\hat{\phi}_{n-1}}\}\end{aligned}$$

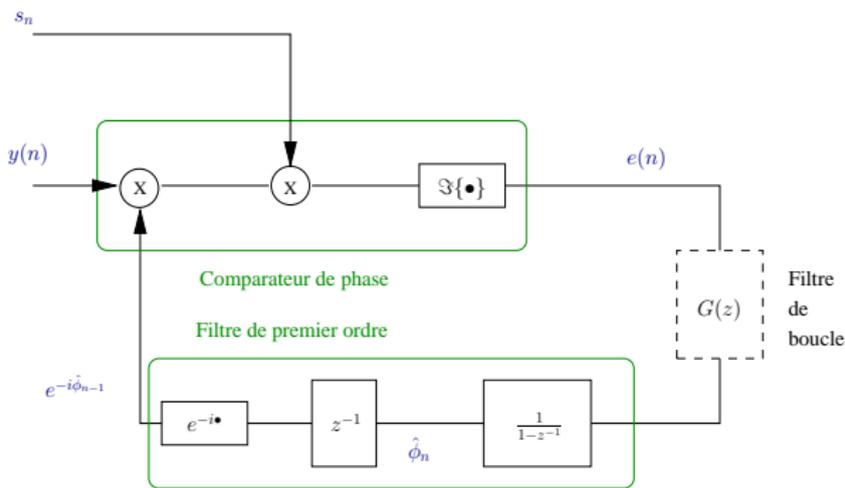
car $\mathbf{J}'_{n-1}(\hat{\phi}_{n-1}) = 0$

Remarque

- Poursuite de phase possible
- Variation de la phase ϕ_n (au lieu de ϕ)
- Application possible à l'estimation de la fréquence $\phi_n = 2\pi f_0 n + \phi$

Boucle à verrouillage de phase (I)

$$[1 - z^{-1}].\hat{\phi}_n = \mu \underbrace{\Im\{\overline{s}_n y(n) e^{-i\hat{\phi}_{n-1}}\}}_{e(n)}$$



Boucle à verrouillage de phase (II)

Analyse des performances en régime « petite erreur » et non bruité

$$\begin{aligned} e(n) &= |s_n|^2 \sin(\phi_n - \hat{\phi}_{n-1}) + \Im\{\overline{s_n} b(n) e^{-i\hat{\phi}_{n-1}}\} \\ &\approx |s_n|^2 (\phi_n - \hat{\phi}_{n-1}) \end{aligned}$$

Filtre équivalent (avec $|s_n| = 1$)

$$\hat{\phi}_n = [f(z)] \cdot \phi_n \quad \text{avec} \quad f(z) = \frac{\mu}{1 - (1 - \mu)z^{-1}}$$

Remarque

- μ petit : bonne précision (filtre réjecteur de fréquence) mais temps d'acquisition long
- μ grand : piètre précision (filtre passe-tout) mais temps d'acquisition court

Estimation autodidacte

Estimateur du maximum de vraisemblance

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{y}_N | \phi) &= \int p(\mathbf{y}_N | \phi, \mathbf{s}_N) p(\mathbf{s}_N) d\mathbf{s}_N \\
 &\propto \mathbb{E}_{\mathbf{s}} \left[\exp \left\{ -\frac{\sum_{n=0}^{N-1} |y(n) - s_n e^{i\phi}|^2}{2N_0} \right\} \right]
 \end{aligned}$$

Résultat général

$$\hat{\phi}_N = \arg \max_{\phi} \sum_{n=0}^{N-1} \ln \left(\sum_{m=0}^{P-1} p_m e^{-\frac{|s^{(m)}|^2}{2N_0}} e^{-\frac{\Re\{\overline{s^{(m)}} y(n) e^{-i\phi}\}}{N_0}} \right)$$

avec

- $s^{(m)}$ le $m^{\text{ème}}$ symbole de la constellation (contenant P points)
- p_m la probabilité d'apparition de $s^{(m)}$

Preuve

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{y}_N | \phi) &= \int \left(\prod_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{|y(n)|^2}{2N_0}} \right) \left(\prod_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{|s_n|^2}{2N_0}} \right) \\
&\times \left(\prod_{n=0}^{N-1} e^{\frac{\Re\{\overline{s_n} y(n) e^{-\phi}\}}{N_0}} \right) \left(\prod_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{P-1} \rho_m \delta(s_n - s^{(m)}) \right) ds_1 \dots ds_{N-1} \\
&\propto \prod_{n=0}^{N-1} \int e^{-\frac{|s|^2}{2N_0}} e^{\frac{\Re\{\overline{s} y(n) e^{-\phi}\}}{N_0}} \left(\sum_{m=0}^{P-1} \rho_m \delta(s - s^{(m)}) \right) ds \\
&\propto \prod_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{P-1} \rho_m e^{-\frac{|s^{(m)}|^2}{2N_0}} e^{\frac{\Re\{\overline{s^{(m)}} y(n) e^{-\phi}\}}{N_0}}
\end{aligned}$$

Simplification

- MDA2
- Equiprobabilité des symboles

Résultat

$$\hat{\phi}_N = \arg \max_{\phi} \sum_{n=0}^{N-1} \ln \left(\cosh \left(\frac{\Re \{y(n)e^{-i\phi}\}}{N_0} \right) \right)$$

Version adaptative

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_n &= \hat{\phi}_{n-1} + \mu' \Im \left\{ d(n)y(n)e^{-i\hat{\phi}_{n-1}} \right\} \\ &= \hat{\phi}_{n-1} + \mu' d(n) \Im \left\{ y(n)e^{-i\hat{\phi}_{n-1}} \right\} \end{aligned}$$

avec

$$d(n) = \tanh \left(\frac{\Re \{y(n)e^{-i\hat{\phi}_{n-1}}\}}{N_0} \right) \quad (\in \mathbb{R})$$

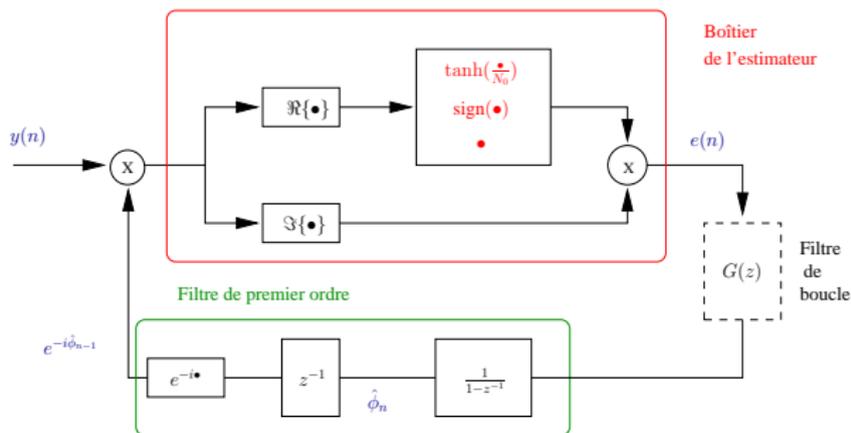
Boucle de Costas

- $d(n)$ joue le rôle d'une décision souple sur le symbole s_n
- Si on remplace la décision souple par
 1. une décision dure (\rightsquigarrow estimation DD)

$$d(n) = \text{sign} \left(\Re \left\{ y(n) e^{-i\hat{\phi}_{n-1}} \right\} \right)$$

2. aucune décision (\rightsquigarrow boucle de Costas)

$$d(n) = \Re \left\{ y(n) e^{-i\hat{\phi}_{n-1}} \right\}$$



Elévation à la puissance

Non-circularité à l'ordre M

$$\mathbb{E}[s_n^M] \neq 0$$

En élevant $y(n)$ à la puissance M , on tombe sur le problème d'estimation de phase bruitée (non-gaussien) car

$$y(n)^M = \mathbb{E}[s_n^M] e^{i(M\phi)} + \varepsilon(n)$$

Démarche

Appliquer à $y(n)^M$ l'estimation classique par corrélation (unique différence : corrélateur \neq ML)

Conclusion

- PLL analogique
- Convergence des PLLs
- Etude du filtre de boucle
- CRB pour le cas NDA

Bibliographie

- A. Viterbi, "Non-linear estimation of PSK-modulated carrier phase with application to burst digital transmissions", IEEE Trans. on Information Theory, Juillet 1983.
- U. Mengali et A. d'Andrea, "Synchronisation techniques for digital receivers", Plenum Press, 1997.
- H. Meyr et al., " Digital communications receivers", Wiley, 1998.
- E. Serpedin et al., "Performance Analysis of Blind Carrier Phase Estimators for General QAM Constellations", IEEE Trans. on Signal Processing, Août 2001.