Estimation de la fréquence

Philippe Ciblat

École Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris, France

Plan

Partie 1 : Modèles

Modèle en bande de base (I)

Signal reçu en bande de base

$$y_a(t) = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} s_k h_a(t-kT_s)\right) e^{2i\pi\delta f_a t} + b_a(t)$$

avec

- $\{s_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$: symboles d'une constellation quelconque
- $b_a(t)$: bruit additif gaussien $\sim \mathcal{CN}(0, 2N_0)$.
- $h_a(t)$: un filtre résultant d'un filtre de mise en forme $g_a(t)$, d'un canal de propagation, d'un déphasage et d'un retard temporel.
- δf_a un résidu de fréquence porteuse lié soit à l'effet Doppler soit à un défaut des oscillateurs locaux.

Modèle en bande de base (II)

Hypothèse

$$\delta f_a T_s \ll 1$$

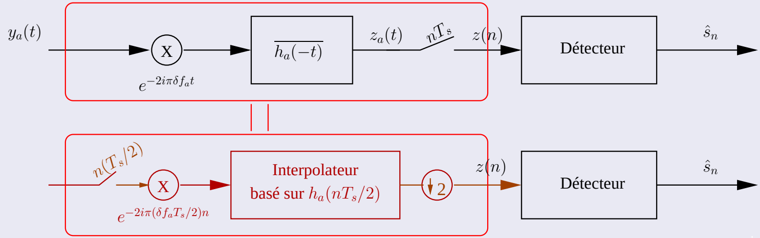
$\Rightarrow \delta f_a$ petit devant la largeur de bande

- Système radiomobile avec effet Doppler :
  porteuse f_0 à 900MHz, vitesse v de déplacement à 50km/h
  $\Rightarrow \delta f_a = f_0 \frac{v}{c} = 40\text{Hz}$

- Oscillateurs locaux de précision de 100ppm
  $\Rightarrow \delta f_a = f_0 \times \text{précision} = 90\text{kHz}$

Récepteur en bande de base (I)

Récepteur (avec $h_a(t)$ et δf_a connus)



Remarque :

- T_e période d'échantillonnage vérifiant le théorème de Shannon
- $T_e = T_s/2$ suffit souvent (car δf_a est petit devant la bande)
- On pose $\Delta f = \delta f_a T_s$

Récepteur en bande de base (II)

Soient deux filtres $f_1(t)$ et $f_2(t)$ de bande $1/T_s$ et $\delta f_a T_s \ll 1$

$$\begin{aligned}
f_1(t) \star (f_2(t)e^{2i\pi\delta f_a t}) &= \int f_2(\tau)e^{2i\pi\delta f_a \tau} f_1(t-\tau)d\tau \\
&= \int F_2(-\nu)\mathrm{TF}(\tau \mapsto e^{2i\pi\delta f_a\tau} f_1(t-\tau))(\nu)d\nu \\
&= e^{2i\pi\delta f_a t}\int F_2(\nu)F_1(\nu+\delta f_a)e^{2i\pi\nu t}d\nu \\
&= e^{2i\pi\delta f_a t}(f_1(t)\star f_2(t)) + o(\delta f_a)
\end{aligned}$$

Applications

$$\begin{aligned}
z(t) &= f_a(t)\star(\sum_{k\in\mathbb{Z}} s_k h_a(t-kT_s)e^{2i\pi\delta f_a t}) \\
&\approx (\sum_{k\in\mathbb{Z}} s_k (f_a\star h_a)(t-kT_s))e^{2i\pi\delta f_a t}
\end{aligned}$$

Modèle en bande de base ainsi validé (cf. démodulateur I/Q)

Récepteur avec $h_a(t)$ et Δf inconnus

Schéma de principe (à temps discret)

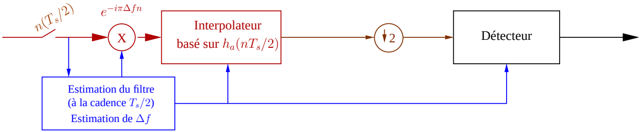


Schéma de principe (simplifié)

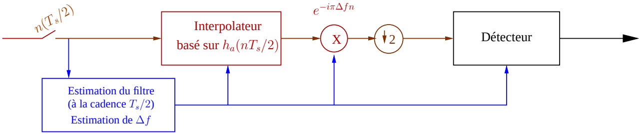
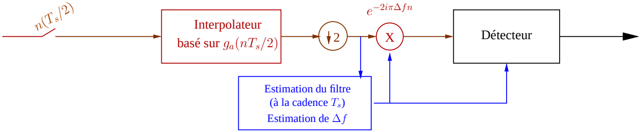


Schéma de principe (simplifié et sans filtre adapté)



Modèle mathématique

Signal reçu

$$y(n) = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{L} h(k) s_{n-k}\right)}_{a(n)} e^{2i\pi f_0 n} + b(n)$$

- $\{s_n\}$ une séquence de données (*connue* ou *inconnue*)
- $\{h(k)\}$ le filtre *inconnu*
- f_0 la fréquence *inconnue*
- $b(n)$ le bruit gaussien blanc circulaire de variance $2N_0$

Méthode d'estimation

Deux modes :

- Avec séquence d'apprentissage

  $\rightsquigarrow$ Data-aided (DA) ou supervisé ou avec pilote

  $\rightsquigarrow$ Estimation d'harmonique avec amplitude partiellement connue variant dans le temps

- Sans séquence d'apprentissage

  $\rightsquigarrow$ Non-Data-aided (NDA) ou autodidacte/aveugle

  $\rightsquigarrow$ Estimation d'harmonique avec bruit multiplicatif et bruit additif

Objectif

1. Estimer f_0 à la donnée de $y(n)$ et s_n
2. Estimer f_0 à la donnée de $y(n)$

Partie 2 : Estimation DA

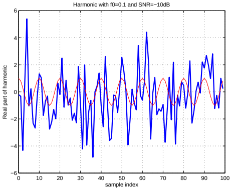
Estimation de fréquence pure

Modèle du signal : soit f_0 la fréquence

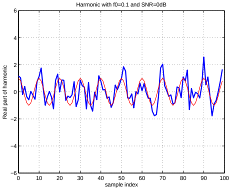
$$y(n) = ae^{2i\pi f_0 n} + b(n)$$

avec a l'amplitude complexe telle que $a = |a|e^{2i\pi\phi_0}$ avec ϕ_0 la phase

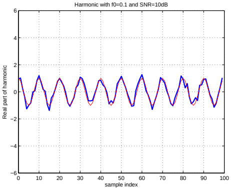
Exemple :



RSB=$-$10dB



RSB=0dB



RSB=10dB

Estimateur ML de fréquence pure

Critère ML : comme le bruit additif est gaussien blanc, on a

$$\min_{|a|,\phi,f} J(|a|,\phi,f) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|y(n) - |a|e^{2i\pi(fn+\phi)}\right|^2$$

Résultat

Si phase ϕ_0 connue : $\hat{f}_N = \arg\max_f \Re\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y(n)e^{-2i\pi(fn+\phi_0)}\right]$

Si phase ϕ_0 inconnue : $\hat{f}_N = \arg\max_f \left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y(n)e^{-2i\pi fn}\right|^2$

Preuve

$$\begin{aligned} J(|a|,\phi,f) &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|y(n)|^2 + |a|^2 \\ &- |a|\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\overline{y(n)}e^{2i\pi(fn+\phi)} + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}y(n)e^{-2i\pi(fn+\phi)}\right) \end{aligned}$$

- Si phase connue ($\phi = \phi_0$), maximisation du terme bleu
- Si phase inconnue, $\phi_0 \in [0,\pi[$ (sinon ambiguïté avec a et $-a$) et

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \phi}\right|_{\phi=\hat{\phi}_N} = 0 \Leftrightarrow e^{2i\pi\hat{\phi}_N} = \left(\frac{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y(n)e^{-2i\pi fn}}{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\overline{y(n)}e^{2i\pi fn}}\right)^{1/2}$$

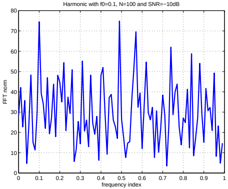
d'où

$$J(|a|,\hat{\phi}_N,f) = \text{constante} - 2|a|\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}y(n)e^{-2i\pi fn}\right|$$

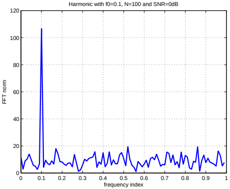
ce qui implique la maximisation du terme magenta

Illustrations numériques

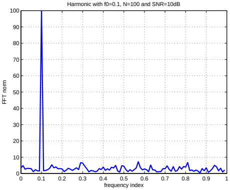
- $f_0 = 0.1$
- $N = 100$



RSB=$-$10dB



RSB=0dB



RSB=10dB

Estimation de fréquence non pure

$$\mathbf{y}_N = D_N(f_0)\mathbf{S}_N\mathbf{h} + \mathbf{b}_N$$

avec

- $\mathbf{y}_N = [y(0), \cdots, y(N-1)]^{\mathrm{T}}$
- N nombre d'observations (temps d'observation $= [0, NT_s[$)
- $[\mathbf{0}_{1,L}, s_0, \cdots, s_{N-1}]^{\mathrm{T}}$: séquence d'apprentissage
- $\mathbf{S}_N$ une matrice $N \times (L+1)$ définie comme suit

$$\mathbf{S}_N = \begin{bmatrix} s_0 & s_{-1} & \dots & s_{-L} \\ s_1 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \\ s_{N-1} & s_{N-2} & \dots & s_{N-1-L} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{h} = [h(0), \cdots, h(L)]^{\mathrm{T}}$
- $D_N(f) = \mathrm{diag}([1, \cdots, e^{2i\pi(N-1)f}])$
- $\mathbf{b}_N = [b(0), \cdots, b(N-1)]^{\mathrm{T}}$: bruit blanc gaussien

Estimateurs ML (I)

Problème dirigé

- si la fréquence est connue (problème classique)

$$\hat{\mathbf{h}}_{N|f} = (\mathbf{S}_N^{\mathrm{H}}\mathbf{S}_N)^{-1}\mathbf{S}_N^{\mathrm{H}}\mathbf{y}_N$$

- si le canal est connu (référence ou voie de retour)

$$\hat{f}_{N|\mathbf{h}} = \arg\max_{f\in[0,1[} \quad \Re[\mathbf{h}^{\mathrm{H}}\mathbf{S}_N^{\mathrm{H}}D_N(f)^{\mathrm{H}}\mathbf{y}_N]$$

Preuve : suivre la démarche du transparent 12

Lien avec le périodogramme

$$\hat{f}_{N|\mathbf{h}} = \arg\max_{f\in[0,1[} \quad \Re\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\overline{a(n)}y(n)e^{-2i\pi fn}\right]$$

Estimateurs ML (II)

Problème conjoint

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \hat{f}_N & = & \arg\max_{f\in[0,1[} \quad \mathbf{y}_N^{\mathrm{H}} D_N(f)\mathbf{S}_N(\mathbf{S}_N^{\mathrm{H}}\mathbf{S}_N)^{-1}\mathbf{S}_N^{\mathrm{H}} D_N(f)^{\mathrm{H}}\mathbf{y}_N \\ \hat{\mathbf{h}}_N & = & (\mathbf{S}_N^{\mathrm{H}}\mathbf{S}_N)^{-1}\mathbf{S}_N^{\mathrm{H}} D_N(\hat{f}_N)^{\mathrm{H}}\mathbf{y}_N \end{array} \right.$$

Preuve : suivre la démarche du transparent 12

- Soit $\mathbf{P}_N = \mathbf{S}_N(\mathbf{S}_N^{\mathrm{H}}\mathbf{S}_N)^{-1}\mathbf{S}_N^{\mathrm{H}}$ la projection sur l'image de $\mathbf{S}_N$.
- Soit la décompostion de Cholesky de $\mathbf{P}_N = \mathbf{Q}_N^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}_N$

Lien avec périodogramme

$$\hat{f}_N = \arg\max_{f\in[0,1[} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|\sum_{n'=0}^{N-1} q_{n,n'}y(n')e^{-2i\pi f n'}\right|^2$$

Bornes de Cramer-Rao : problème dirigé

Résultat

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \gamma_{f|\mathbf{h}} & = & \frac{N_0}{4\pi^2 N^3} \frac{1}{\mathbf{h}^{\mathrm{H}} \mathbf{W}_2 \mathbf{h}} \\ \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{h}|f} & = & \frac{2N_0}{N} \mathbf{W}_0^{-1} \end{array} \right.$$

avec

$$\mathbf{W}_K = \frac{\mathbf{S}_N^{\mathrm{H}} \Delta_N^K \mathbf{S}_N}{N^{(K+1)}}$$

et

$$\Delta_N = \mathrm{diag}([0, 1, \cdots, N-1])$$

Remarque :

Estimateur ML est asymptotiquement efficace

Preuve

$$F(f) = \mathbb{E}_{\mathbf{y}}\left[\left(\frac{d\ln p(\mathbf{y}|f)}{df}\right)^2\right] \text{ et } p(\mathbf{y}|f) \propto e^{-\frac{\|\mathbf{y}-D_N(f)\mathbf{S}_N\mathbf{h}\|^2}{2N_0}}$$

$$\ln p(\mathbf{y}|f) = \frac{-1}{2N_0}(\mathbf{y}^{\mathrm{H}} - \mathbf{h}^{\mathrm{H}}\mathbf{S}_N^{\mathrm{H}}D_N(f)^{\mathrm{H}})(\mathbf{y} - D_N(f)\mathbf{S}_N\mathbf{h}) + \text{cte}$$

$$\frac{d\ln p(\mathbf{y}|f)}{df} = \frac{-1}{2N_0}(2i\pi\mathbf{h}^{\mathrm{H}}\mathbf{S}_N^{\mathrm{H}}\Delta_N D_N(f)^{\mathrm{H}})(\mathbf{y} - D_N(f)\mathbf{S}_N\mathbf{h}) + \frac{-1}{2N_0}(\mathbf{y}^{\mathrm{H}} - \mathbf{h}^{\mathrm{H}}\mathbf{S}_N^{\mathrm{H}}D_N(f)^{\mathrm{H}})(-2i\pi D_N(f)\Delta_N\mathbf{S}_N\mathbf{h})$$

$$\left.\frac{d\ln p(\mathbf{y}|f)}{df}\right|_{\mathbf{y},f_0} = \frac{-2i\pi}{2N_0}\left(\mathbf{h}^{\mathrm{H}}\mathbf{S}_N^{\mathrm{H}}\Delta_N D_N(f_0)^{\mathrm{H}}\mathbf{b} - \mathbf{b}^{\mathrm{H}}D_N(f_0)\Delta_N\mathbf{S}_N\mathbf{h}\right)$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{d\ln p(\mathbf{y}|f)}{df}\right)^2\right] = \frac{4\pi^2}{4N_0^2}\left(2\mathbf{h}^{\mathrm{H}}\mathbf{S}_N^{\mathrm{H}}\Delta_N D_N(f_0)^{\mathrm{H}}\mathbb{E}[\mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathrm{H}}]D_N(f_0)\Delta_N\mathbf{S}_N\mathbf{h}\right)$$

Bornes de Cramer-Rao : problème conjoint

Résultat

$$\left\{\begin{array}{lcl} \gamma_f & = & \frac{N_0}{4\pi^2 N^3} \frac{1}{\mathbf{h}^{\mathrm{H}}(\mathbf{W}_2 - \mathbf{W}_1 \mathbf{W}_0^{-1} \mathbf{W}_1)\mathbf{h}} \\ \mathbf{\Gamma_h} & = & \frac{2N_0}{N}\left(\mathbf{W}_0^{-1} + \frac{\mathbf{W}_0^{-1}\mathbf{W}_1 \mathbf{h}\mathbf{h}^{\mathrm{H}} \mathbf{W}_1 \mathbf{W}_0^{-1}}{2\mathbf{h}^{\mathrm{H}}(\mathbf{W}_2 - \mathbf{W}_1 \mathbf{W}_0^{-1} \mathbf{W}_1)\mathbf{h}}\right) \end{array}\right.$$

Remarque :

- Convergence de l'estimateur de la fréquence en $1/N^3$
- Convergence de l'estimateur du canal en $1/N$
- Estimateur ML asymptotiquement efficace

Bornes de Cramer-Rao asymptotiques (I)

Considérons

- $\{s_n\}_n$ une réalisation d'une séquence pseudo-aléatoire stationnaire
- $r_s(\tau) = \mathbb{E}[s_{n+\tau}\overline{s_n}]$ la fonction d'autocorrélation

Résultat fondamental

$$w_K(k,l) = \frac{1}{N^{(K+1)}} \sum_{n=0}^{N-1} n^K \overline{s_{n-k}} s_{n-l} \overset{p.s.}{\rightarrow} \frac{\mathbb{E}[\overline{s_{n-k}} s_{n-l}]}{K+1} = \frac{r_s(k-l)}{K+1}$$

Esquisse de preuve :

$$w_K(k,l) = \underbrace{\left(\frac{1}{N^{(K+1)}} \sum_{n=0}^{N-1} n^K \right)}_{1/(K+1)} \mathbb{E}[\overline{s_{n-k}} s_{n-l}] + \underbrace{\frac{1}{N^{(K+1)}} \sum_{n=0}^{N-1} n^K \varepsilon_{k,l}(n)}_{\overset{p.s.}{\rightarrow} 0}$$

Bornes de Cramer-Rao asymptotiques (II)

Considérons $\mathbf{R}_s = (r_s(k-l))_{0\leq k,l\leq L}$ la matrice (Toeplitz) de corrélation de taille $(L+1)\times(L+1)$ du processus $\{s_n\}_n$

Problème dirigé

$$\gamma_{f|\mathbf{h}} = \frac{3N_0}{4\pi^2N^3}\frac{1}{\mathbf{h}^{\mathrm{H}}\mathbf{R}_s\mathbf{h}} \quad \text{et} \quad \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{h}|f} = \frac{2N_0}{N}\mathbf{R}_s^{-1}$$

Problème conjoint

$$\gamma_f = \frac{3N_0}{\pi^2N^3}\frac{1}{\mathbf{h}^{\mathrm{H}}\mathbf{R}_s\mathbf{h}} \quad \text{et} \quad \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{h}} = \frac{2N_0}{N}\left(\mathbf{R}_s^{-1} + \frac{3}{2}\frac{\mathbf{h}\mathbf{h}^{\mathrm{H}}}{\mathbf{h}^{\mathrm{H}}\mathbf{R}_s\mathbf{h}}\right)$$

Remarque :
Perte de 6dB pour l'estimation de fréquence si le canal est inconnu

Simulations

Protocole :

Afin de maximiser les périodogrammes, on procède en deux étapes

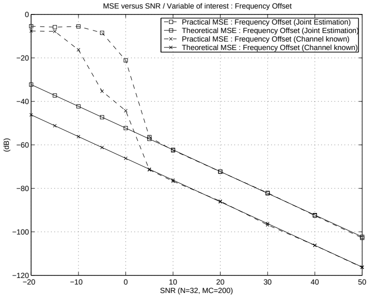
1. une étape dite *grossière* réalisée à l'aide d'une TFD
2. une étape dite *fine* réalisée par le biais d'un algorithme du gradient initialisé avec le résultat de l'étape grossière

Remarque :

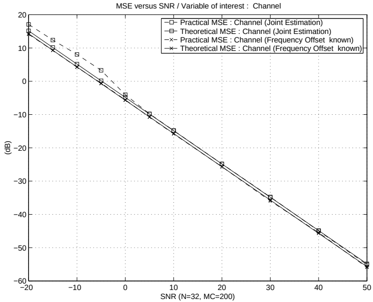
La borne de Cramer-Rao ne fournit de l'information que sur la seconde étape

EQM en fonction du RSB

- Canal radio-mobile de norme 1
- $N = 32$



f_0

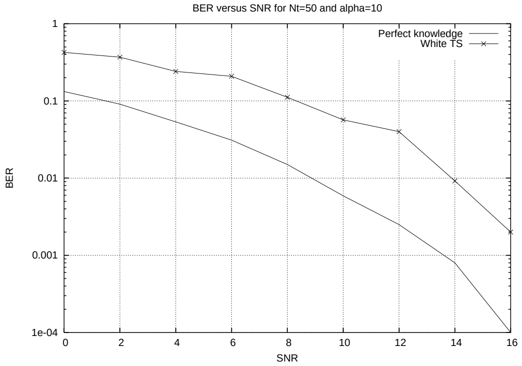


$\mathbf{h}$

La CRB inexacte à faible RSB (phénomène de décrochement)

Taux d'Erreur Binaire

- $N = 50$, Trame de longueur 500
- Egaliseur de Wiener



Partie 3 : Estimation NDA

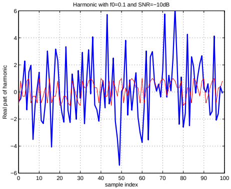
Rappel du modèle

$$y(n) = a(n)e^{2i\pi f_0 n} + b(n), \quad n = 0, \ldots, N-1$$

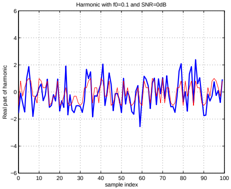
avec

- $y(n)$ le signal reçu
- $a(n)$ une amplitude (complexe) inconnue ou un bruit multiplicatif
- $b(n)$ un bruit blanc gaussien additif **circulaire** et stationnaire

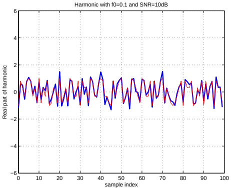
Exemple : $a(n)$ appartient à une modulation MDA-2/BPSK



RSB=$-$10dB



RSB=0dB



RSB=10dB

– idem avec la partie imaginaire

Définition de la circularité

Circularité (au sens strict)

Soit Z une variable aléatoire centrée à valeurs complexes
Z est dit circulaire au sens strict ssi

$$Z \quad \text{et} \quad Ze^{i\theta}$$

ont la même densité de probabilité pour tout θ

Propriété :

$$\mathbb{E}[\underbrace{Z\cdots Z}_{p \ fois}\underbrace{\overline{Z}\cdots\overline{Z}}_{q \ fois}] = 0 \text{dès que} \quad p \neq q$$

Remarque : Z est

- circulaire (jusqu'à l'ordre $M-1$) , et de manière équivalente,
- non-circulaire (à partir l'ordre M)

  ssi

$$\mathbb{E}[\underbrace{Z\cdots Z}_{p \ fois}\underbrace{\overline{Z}\cdots\overline{Z}}_{q \ fois}] = 0 \quad \text{dès que} \quad p \neq q \quad \text{et} \quad p+q < M$$

Signal non-circulaire

Remarque

Toute constellation usuelle admet une symétrie de rotation d'angle $2\pi/M$ ce qui implique une non-circularité à l'ordre M

Constellation	MDA-P	MDP-P	MAQ-P
Taille M	2	P	4

Hypothèses :

- $a(n)$ est non-circulaire à l'ordre $M \Leftrightarrow \mathbb{E}[a(n)^M] \neq 0$
- $a(n)$ est gaussien ou pas
- $a(n)$ est coloré ou pas

Remarque : hypothèses réalistes en communications numériques

Signal non-circulaire au second ordre (I)

Comme $u_a(0) = \mathbb{E}[a^2(n)] \neq 0$, on a

$$z(n) = y^2(n) = u_a(0)e^{2i\pi(2f_0)n} + e(n)$$

où $e(n)$ est un bruit additif *non-gaussien* et *non-stationnaire*

Remarques

- Estimation de fréquence dans un bruit multiplicatif et additif

  $$\Updownarrow$$

  Estimation de fréquence dans un bruit additif *non-standard*
- Périodogramme basé sur $y^2(n)$ au lieu de $y(n)$
- Si $a(n)$ est coloré, périodogramme non exhaustif

Signal non-circulaire au second ordre (II)

En posant $u_a(\tau) = \mathbb{E}[a(n+\tau)a(n)]$, on a

$$z_\tau(n) = y(n+\tau)y(n) = \left(u_a(\tau)e^{2i\pi f_0 \tau}\right) e^{2i\pi(2f_0)n} + e_\tau(n)$$

$$\begin{aligned}\hat{f}_N = \arg\max_f \mathbf{J}_N(f) &= \sum_{\tau=-T}^{T} \left| \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} z_\tau(n)e^{-2i\pi(2f)n} \right|^2 \\ &= \left\| \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{z}(n)e^{-2i\pi(2f)n} \right\|^2\end{aligned}$$

avec $\mathbf{z}(n) = [z_{-T}(n), \ldots, z_T(n)]^{\mathrm{T}}$

Remarque :

- Périodogramme pour signal vectoriel
- Estimateur de l'élévation au carré (étendu)

Signal non-circulaire aux ordres supérieurs

MDP-P (1983)

$$\mathbb{E}[a(n)^P] \neq 0 \Leftrightarrow \hat{f}_N = \arg\max_f \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y^P(n) e^{-2i\pi(Pf)n} \right\|^2$$

MAQ-P (2001 et 2004)

$$\mathbb{E}[a(n)^4] \neq 0 \Leftrightarrow \hat{f}_N = \arg\max_f \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y^4(n) e^{-2i\pi(4f)n} \right\|^2$$

$\Rightarrow$ *L'estimateur de l'élévation à la puissance*

Analyse asymptotique

- Consistance
- Normalité asymptotique (avec vitesse de convergence de 3)
- Covariance asymptotique γ

ont été établies et calculées pour le problème suivant

$$\hat{f}_N = \arg\max_f \mathbf{J}_N(\alpha) = \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{z}(n) e^{-2i\pi(Mf)n} \right\|^2$$

avec $\mathbf{z}(n) = \alpha e^{2i\pi(Mf)n} + \mathbf{e}(n)$ et $\mathbf{e}(n)$ un processus centré

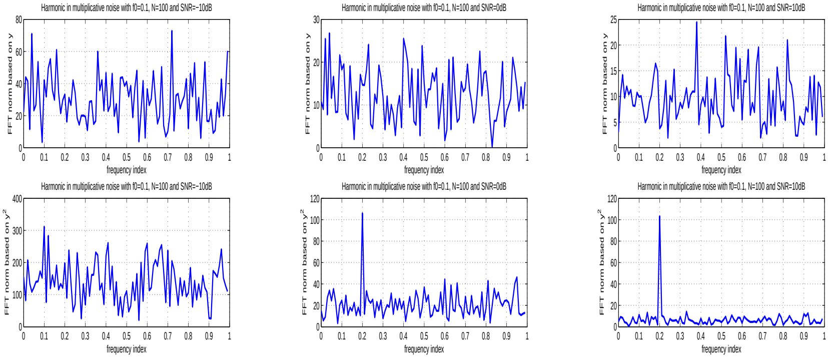
Remarque

- Analyse valide pour les signaux non-circulaires ($\forall M$)
- Covariance asymptotique γ dépend des statistiques de $\mathbf{e}(n)$

$$\mathrm{EQM} = \frac{\gamma}{N^3}$$

Simulations

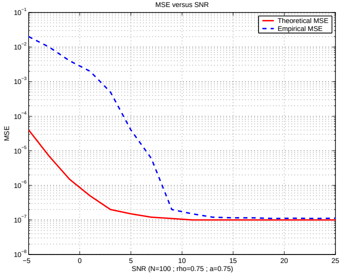
- $a(n)$ appartient à une MDA-2/BPSK
- $N = 100$



RSB=$-$10dB RSB=0dB RSB=10dB

EQM en fonction du RSB

- $a(n) = s_n + 0.75 s_{n-1}$
- s_n blanc gaussien t.q. $\mathbb{E}[|s_n|^2] = 1$ et $\mathbb{E}[s_n^2] = 0.75$
- $N = 100$



Questions

- EQM théorique inexacte à faible RSB

  $\rightsquigarrow$ *phénomène de décrochement*
- Sommes-nous loin de la CRB ?

Phénomène de décrochement

On s'intéresse à l'estimateur de l'élévation à la puisssance

$$\hat{f}_N = \frac{1}{M} \arg \max_{\alpha \in]-1/2,1/2]} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y(n)^M e^{-2i\pi\alpha n} \right|^2$$

avec

$$y(n)^M = u e^{2i\pi M f_0 n} + e(n)$$

Ce périodogramme est maximisé en deux étapes

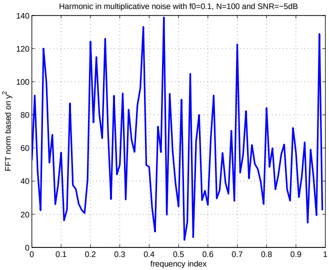
- une étape grossière détectant le pic
- une étape fine raffinant l'estimation autour du pic

Remarque

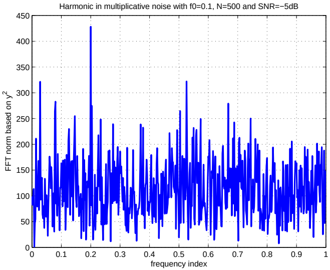
A faible RSB et/ou quand le nombre d'échantillons est petit, l'étape grossière peut échouer $\Rightarrow$ phénomène de décrochement

Exemple

- $a(n)$ apparttient à une MDA-2/BPSK
- RSB=$-$5dB



Périodogramme avec $N = 100$



Périodogramme avec $N = 500$

Erreur quadratique moyenne

EQM exacte

Si la fréquence recherchée est au centre de l'intervalle de recherche, alors

$$\mathrm{EQM} = \frac{p}{12} + (1-p)\mathrm{EQM}_{\mathrm{s.d.}}$$

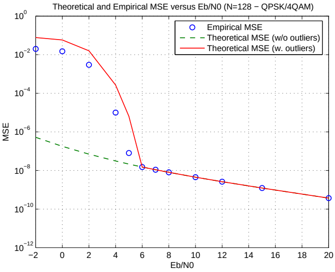
où

- p est la probabilité que l'étape grossière échoue
- $\mathrm{EQM}_{\mathrm{s.d.}}$ est l'EQM classique (ne prenant pas en compte le phénomène de décrochement)

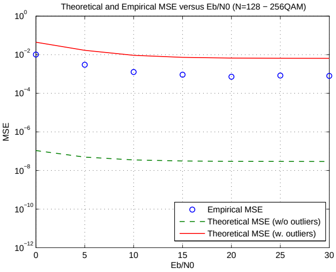
Résultats

- $\mathrm{EQM}_{\mathrm{s.d.}}$ disponible dans la littérature (cf. planches précédentes)
- p disponible dans la littérature
  - $a(n)$ constant (1974)
  - $a(n)$ blanc et appartient à une constellation usuelle (2006)

Simulations : EQM en fonction du RSB



MAQ-4 et $N = 128$

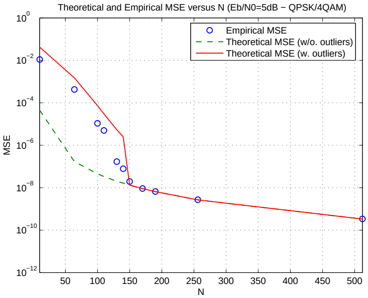


MAQ-256 et $N = 128$

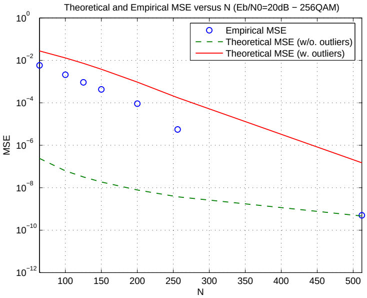
Analyse de seuil

- Pour MAQ-4, $\mathrm{RSB}_{\mathrm{seuil}} = 6$dB si $N = 128$
- Pour MAQ-P (avec $P > 4$), palier pour $p \Rightarrow$ pas de seuil

Simulations : EQM en fonction de N



MAQ-4 et $E_b/N_0 = 5$dB



MAQ-256 et $E_b/N_0 = 20$dB

- Quand N augmente, p décroît (pas de palier)
- N'importe quelle EQM est réalisable MAIS parfois avec N grand

Problèmes non traités

1. Conception de la séquence d'apprentissage ?
2. Sommes-nous loin de la CRB ?
3. Comment calculer la CRB dans un contexte autodidacte
4. Décrochement : est-ce intrinsèque au problème ou juste à l'estimateur de l'élévation à la puissance ?
5. Extension à l'OFDM
   - Méthode supervisée : démarche identique
   - Méthode autodidacte : sous-porteuses nulles (détecteur d'énergie, méthode sous-espace), égalisation entre porteuses, non-circularité, ...

Bibliographie

- E. Hannan, "The estimation of frequency", Journal of Applied Probability, 1973.
- D. Rife et R. Boorstyn, "Single-tone parameter estimation from discrete-time observations", IEEE Trans. on Information Theory, Septembre 1974.
- A. Viterbi, "Non-linear estimation of PSK-modulated carrier phase with application to burst digital transmissions", IEEE Trans. on Information Theory, Juillet 1983.
- U. Mengali et A. d'Andrea, "Synchronisation techniques for digital receivers", Plenum Press, 1997.
- H. Meyr et al., " Digital communications receivers", Wiley, 1998.
- M. Ghogho, A. Swami et A. Nandi, "Non-linear least squares estimation for harmonics in multiplicative and additive noise", Signal Processing, Octobre 1999.
- M. Morelli et U. Mengali, "Carrier frequency estimation for transmissions over selective channels", IEEE Trans. on Communications, Septembre 2000.
- P. Ciblat et al., "Asymptotic analysis of blind cyclic correlation based symbol rate estimation", IEEE Trans. on Information Theory, Juillet 2002.
- N. Noels et al., "Turbosynchronization : an EM algorithm interpretation", IEEE International Conf. on Communications (ICC), 2003.
- Y. Wang et al., "Optimal blind carrier recovery for M-PSK burst transmissions", IEEE Trans. on Communications, Septembre 2003.
- P. Ciblat et al., "Training Sequence Optimization for joint Channel and Frequency Offset estimation", IEEE Trans. on Signal Processing, Août 2008.