

Estimation du canal sans séquence d'apprentissage

Philippe Ciblat

École Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris, France

Plan

- 1 Introduction
 - Modèle de signal
 - Bilan statistique

- 2 Algorithmes aux ordres supérieurs
 - Maximisation de Kurtosis
 - Algorithme du Module Constant (CMA)
 - Notion d'algorithme adaptatif

- 3 Algorithmes au second ordre
 - Algorithme d'ajustement de covariance
 - Algorithme du Maximum de Vraisemblance (déterministe)
 - Evocation de quelques autres algorithmes

Partie 1 : Introduction

Modèle en bande de base

Signal reçu en bande de base

$$y_a(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k h_a(t - kT_s) + b_a(t)$$

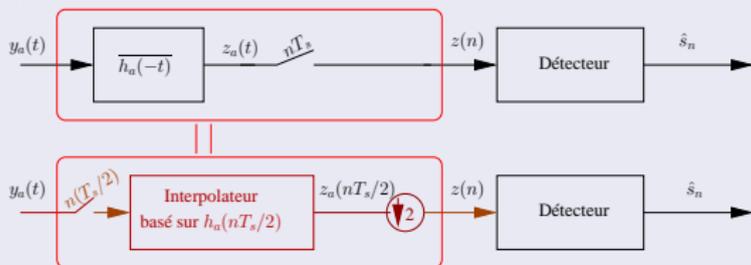
avec

- $\{s_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$: symboles d'une constellation quelconque
- $b_a(t)$: bruit additif gaussien $\sim \mathcal{CN}(0, 2N_0)$
- $h_a(t)$: un filtre résultant d'un filtre de mise en forme $g_a(t)$, d'un canal de propagation $c_a(t)$ de type multitrajet. Ce filtre a pour support temporel $[0, LT_s]$

↪ Le canal $h_a(t)$ est, en pratique, inconnu du récepteur

Récepteur avec canal $h_a(t)$ connu

Schéma de principe



Remarque :

- Le filtre de mise en forme admet une bande de la forme $[-(1 + \rho)/(2T_s), (1 + \rho)/(2T_s)]$ avec ρ le facteur d'excès de bande
- Période d'échantillonnage $T_e = T_s/2$ vérifie le théorème de Shannon

Récepteur avec canal $h_a(t)$ inconnu

Schéma de principe (avec filtre adapté)

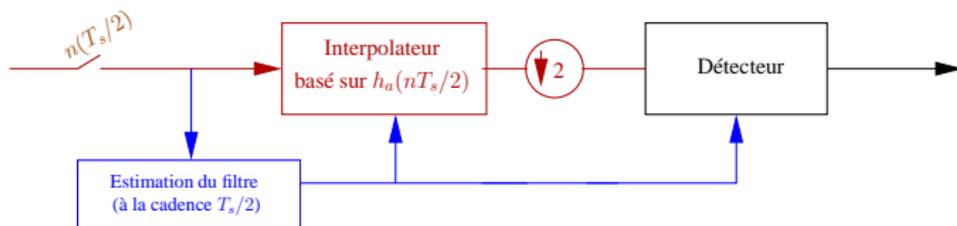
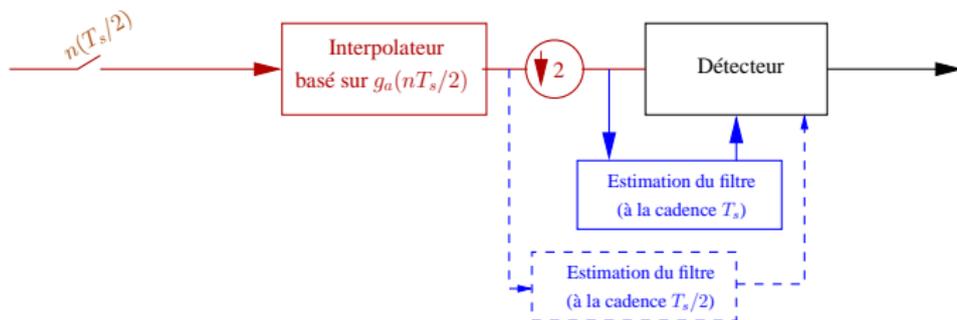


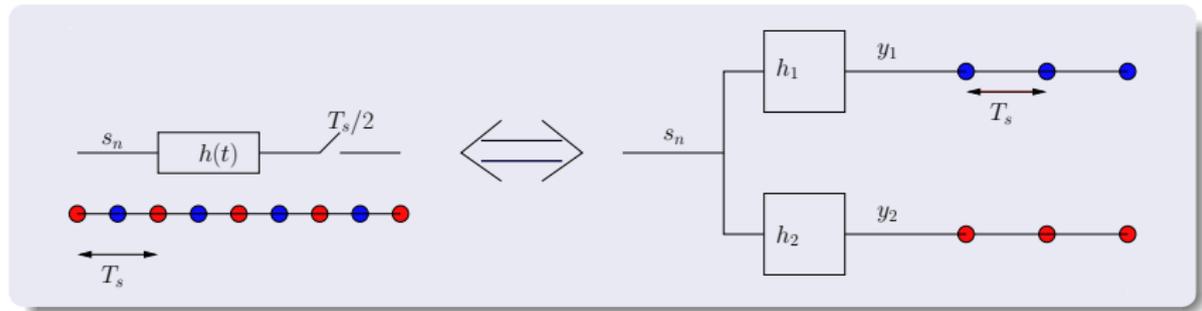
Schéma de principe (sans filtre adapté)



Formulation mathématique

Signal à temps discret (scalaire)

$$\tilde{y}(n) = y_a(nT_e) = y_a(nT_s/2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k h_a(nT_s/2 - kT_s) + \tilde{b}(n)$$



Signal à temps discret (vectoriel)

$$\begin{cases} y_1(n) & = & y_a(nT_s) & = & h_1 \star s_n + b_1(n) \\ y_2(n) & = & y_a(nT_s + T_s/2) & = & h_2 \star s_n + b_2(n) \end{cases}$$

avec $h_1(n) = h_a(nT_s)$ et $h_2(n) = h_a(nT_s + T_s/2)$

Méthode d'estimation

Trois modes :

- Avec séquence d'apprentissage
↪ Data-aided (DA) ou supervisé
- Sans séquence d'apprentissage
↪ Non-Data-aided (NDA) ou autodidacte/aveugle
- Avec retour de décision
↪ Decision-Directed (DD)

Objectif

Estimer

1. h_1 à la seule donnée de $y_1(n)$ et h_2 à la seule donnée de $y_2(n)$
2. (h_1, h_2) à la seule donnée de $(y_1(n), y_2(n))$

Remarque :

- En communications civiles, gain en débit utile (25% en GSM)
- En communications militaires, séquence inconnue du récepteur

Modèle scalaire

On a $y_a(t)$ un signal à temps continu cyclostationnaire de période T_s .

$$t \mapsto r_{y_a}(t, \tau) = \mathbb{E} \left[y_a(t + \tau) \overline{y_a(t)} \right]$$

$\Rightarrow \tilde{y}(n)$ à temps discret cyclostationnaire de période $(T_s/T_e) = 2$.

Système SISO cyclostationnaire

$$\tilde{y}(n) = \tilde{h} \star \tilde{s}_n$$

avec

$$\tilde{s} = (s_0, 0, s_1, 0, \dots) \quad \text{et} \quad \tilde{h}(n) = h_a(nT_s/2)$$

Remarque :

Signal à temps discret cyclostationnaire de période 1 est stationnaire

Modèle vectoriel

Système SIMO stationnaire

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{h} \star s_n$$

avec

$$\mathbf{y}(n) = \begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{h}(n) = \begin{bmatrix} h_1(n) \\ h_2(n) \end{bmatrix}$$

Remarque :

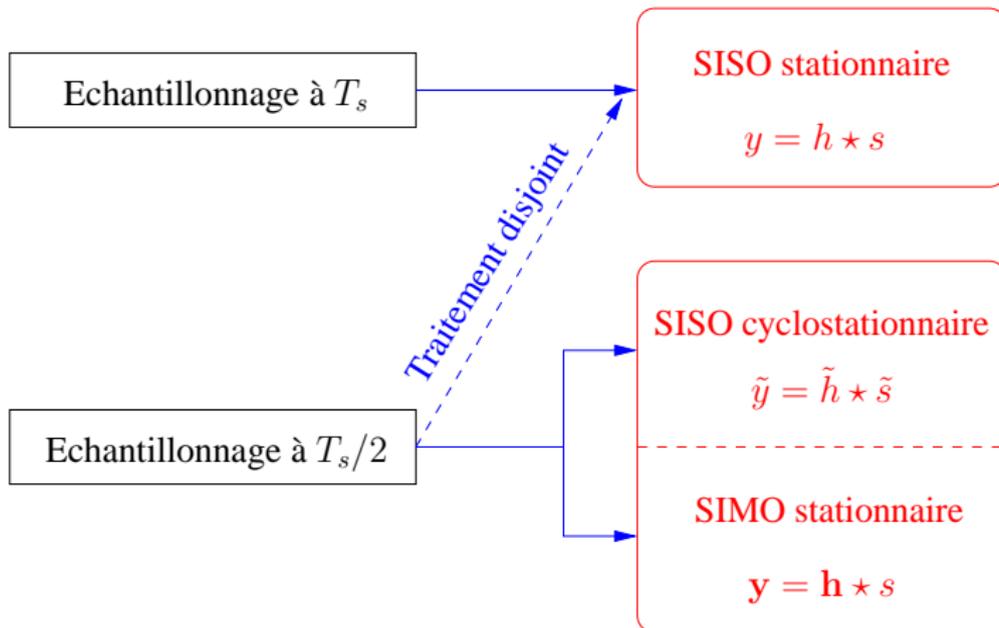
Diversité temporelle et spatiale conduisent au même modèle mathématique mais différent numériquement.

Système SISO stationnaire

$$y(n) = h \star s_n$$

Les deux voies ne sont pas conjointement traitées (*ante* 1991)

Récapitulatif sur les modèles



Système SISO stationnaire

Information au second ordre

$$S_Y(e^{2i\pi f}) = \text{TZ}(r_Y(\tau))|_{z=e^{2i\pi f}} = \sigma_s^2 |h(e^{2i\pi f})|^2$$

avec σ_s^2 la variance des symboles

Remarque :

- Aucune information de phase
- Identification éventuellement possible si
 - $h(z)$ est à phase minimale ($h(z) \neq 0$ si $|z| > 1$)
 - signal non-stationnaire

Idée

Considérer les statistiques d'ordres supérieurs (sources non-gaussiennes obligatoires)

Statistiques d'ordres supérieurs (I)

Soit $X = [X_1, \dots, X_M]$ un vecteur aléatoire de dimension N .

Fonction caractéristique de première espèce

$$\Psi_X : \omega \mapsto \mathbb{E}[e^{j\omega^T \mathbf{x}}] \quad \left(= \int p_X(\mathbf{x}) e^{j\omega^T \mathbf{x}} d\mathbf{x} \right)$$

Moments (d'ordre s) \propto coefficient du développement en série entière de Ψ_X d'ordre $s^{\text{ème}}$

Fonction caractéristique de deuxième espèce

$$\Phi_X : \omega \mapsto \ln(\Psi_X(\omega))$$

Cumulants (d'ordre s) \propto coefficient du développement en série entière de Φ_X d'ordre $s^{\text{ème}}$

Statistiques d'ordres supérieurs (II)

Soient $\{X_i\}_{i \in I}$ des variables aléatoires réelles centrées.

On a

$$\begin{aligned}\text{cum}_1(X_i) &= 0. \\ \text{cum}_2(X_i, X_j) &= \mathbb{E}[X_i X_j]. \\ \text{cum}_3(X_i, X_j, X_k) &= \mathbb{E}[X_i X_j X_k]. \\ \text{cum}_4(X_i, X_j, X_k, X_l) &= \mathbb{E}[X_i X_j X_k X_l] \\ &\quad - \mathbb{E}[X_i X_j] \mathbb{E}[X_k X_l] \\ &\quad - \mathbb{E}[X_i X_k] \mathbb{E}[X_j X_l] \\ &\quad - \mathbb{E}[X_i X_l] \mathbb{E}[X_j X_k]. \\ &\quad \vdots\end{aligned}$$

On a de plus la propriété de multilinéarité du cumulants.

Statistiques d'ordres supérieurs (III)

Quelques résultats utiles ...

- $X = [X_1, \dots, X_N]$ et $Y = [Y_1, \dots, Y_N]$ deux vecteurs ind.

$$\text{cum}_s(X_{i_1} + Y_{i_1}, \dots, X_{i_s} + Y_{i_s}) = \text{cum}_s(X_{i_1}, \dots, X_{i_s}) + \text{cum}_s(Y_{i_1}, \dots, Y_{i_s})$$

- $X = [X_1, \dots, X_N]$ avec au moins deux composantes ind.

$$\text{cum}_N(X_1, \dots, X_N) = 0$$

- $X = [X_1, \dots, X_N]$ un vecteur aléatoire gaussien

$$\text{cum}_s(X_{i_1}, \dots, X_{i_s}) = 0 \quad \text{dès que} \quad s \geq 3$$

Remarque :

- Pas d'information d'ordre supérieur à deux dans le cas gaussien
- « Distance » par rapport à la gaussienne \Rightarrow Kurtosis normalisé

$$\kappa'_X = \frac{\text{cum}_4(X, \bar{X}, X, \bar{X})}{(\mathbb{E}[|X|^2])^2}$$

Information à l'ordre quatre

Trispectre

$$\begin{aligned} S_4(e^{2i\pi f_1}; e^{2i\pi f_2}; e^{2i\pi f_3}) &= \text{TZ}(\text{cum}_4(\tau_1, \tau_2, \tau_3)) \Big|_{z_1=e^{2i\pi f_1}; z_2=e^{2i\pi f_2}; z_3=e^{2i\pi f_3}} \\ &= \kappa_s h(e^{2i\pi f_1}) \overline{h(e^{2i\pi f_2})} \overline{h(e^{2i\pi f_3})} h(e^{2i\pi(-f_1+f_2+f_3)}) \end{aligned}$$

avec $\text{cum}_4(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \text{cum}(y(n), y(n + \tau_1), \overline{y(n - \tau_2)}, \overline{y(n - \tau_3)})$

⇒ Le trispectre contient de l'information de phase du canal.

Problème

- Comment extraire cette information de phase ?
- Objectif des algorithmes d'égalisation autodidacte aux ordres supérieurs

Système SISO cyclostationnaire

Rappel

$n \mapsto r_{\tilde{y}}(n, \tau) = \mathbb{E}[\tilde{y}(n + \tau)\overline{\tilde{y}(n)}]$ est périodique de période 2

Développement en série de Fourier

$$r_{\tilde{y}}(n, \tau) = r_{\tilde{y}}^{(0)}(\tau) + r_{\tilde{y}}^{(1/2)}(\tau)e^{2i\pi(1/2)n}$$

- Notion de fréquence cyclique / cyclofréquence
- Notion de corrélation cyclique / cyclocorrélation
- Notion de spectre cyclique / cyclopectre

Information au second ordre

$$S_{\tilde{y}}^{(\alpha)}(e^{2i\pi f}) = \text{TZ}(r_{\tilde{y}}^{(\alpha)}(\tau))|_{z=e^{2i\pi f}} = \sigma_s^2 \tilde{h}(e^{2i\pi f})\overline{\tilde{h}(e^{2i\pi(f+\alpha)})}$$

Identifiabilité sous de faibles conditions techniques (1991)

Système SIMO stationnaire

Soit $\tau \mapsto \mathbf{R}_y(n, \tau) = \mathbb{E} [\mathbf{y}(n + \tau)\mathbf{y}(n)^H]$

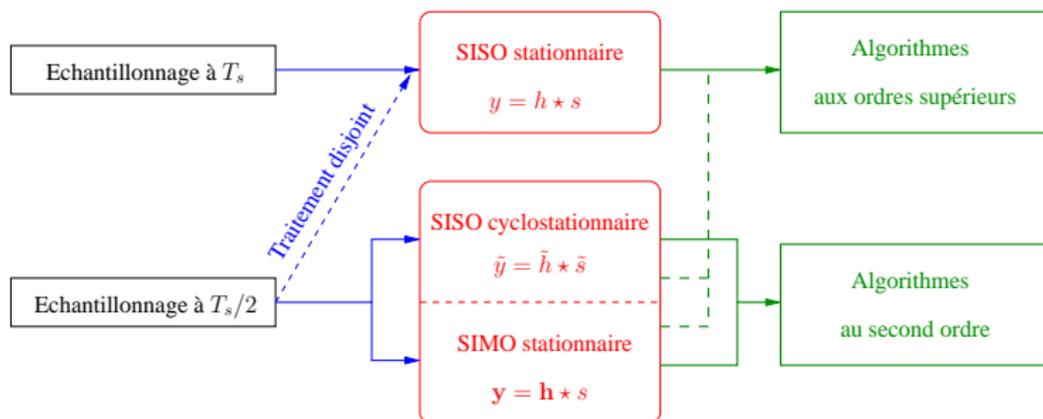
Information au second ordre

$$\mathbf{S}_y(e^{2i\pi f}) = \text{TZ}(\mathbf{R}_y(\tau))|_{z=e^{2i\pi f}} = \sigma_s^2 \mathbf{h}(e^{2i\pi f})\mathbf{h}(e^{2i\pi f})^H$$

Remarque

- Solution unique si $\mathbf{h}(z)$ à minimum de phase ($\mathbf{h}(z) \neq 0$ si $|z| > 1$)
- $\mathbf{S}_y(e^{2i\pi f})$ fournit donc suffisamment d'information de phase

Récapitulatif sur les statistiques



Partie 2 : Algorithmes aux ordres supérieurs

Algorithmes aux ordres supérieurs

Principe

Algorithmes généralement basés sur le principe de la déconvolution autodidacte, c'est-à-dire, qu'ils estiment directement $\{s_n\}$ à la donnée de $\{y(n)\}$

Approche explicite

Fonction de coût dépend explicitement des statistiques d'ordres supérieurs

Approche implicite

$$\min_c \mathbb{E} [f(c \star y)]$$

avec f une fonction de coût non-linéaire et non quadratique dépendant implicitement des statistiques d'ordres supérieurs

Algorithme de Shalvi-Weinstein (I)

- Modèle SISO stationnaire
- Soit v la sortie du filtre-égaliseur c , alors $v = c \star y$

Maximum du kurtosis (1990)

Sous la contrainte $\mathbb{E}[|v_n|^2] = \mathbb{E}[|s_n|^2]$, on a

$$|\kappa_v| \leq |\kappa_s|$$

et avec égalité ssi

$$c \star h \propto \delta$$

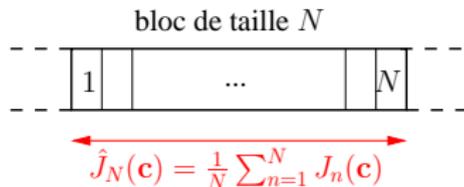
Remarque :

- Absence de maxima locaux si SIMO stationnaire avec $v = \mathbf{c} \star \mathbf{y}$
- Implémentation adaptative possible

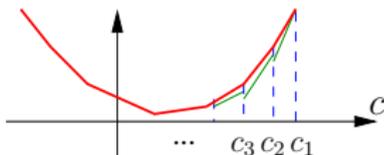
Rappel : qu'est-ce qu'un algorithme adaptatif ?

Comment trouver le minimum de $J(\mathbf{c}) = \mathbb{E}[J_n(\mathbf{c})]$?

Traitement par bloc



On remplace $J(\mathbf{c})$ par $\hat{J}_N(\mathbf{c})$



Algo. du gradient

$$\mathbf{c}_{i+1} = \mathbf{c}_i - \mu \left. \frac{\partial \hat{J}_N(\mathbf{c})}{\partial \mathbf{c}} \right|_{\mathbf{c}_i}$$

Traitement adaptatif



On remplace $J(\mathbf{c})$ par $J_n(\mathbf{c})$ à l'instant/itération n

- Algo. LMS
- Extension RLS, Newton

Algo. du gradient stochastique

$$\mathbf{c}_{n+1} = \mathbf{c}_n - \mu \left. \frac{\partial J_n(\mathbf{c})}{\partial \mathbf{c}} \right|_{\mathbf{c}_n}$$

Algorithme de Shalvi-Weinstein (II)

On maximise la fonction

$$J : \mathbf{c} \mapsto |\kappa_v| = J(\mathbf{c})$$

avec

- \mathbf{c} le vecteur contenant les coefficients du filtre c de degré L_c
- $v = c \star y \Leftrightarrow v_n = \mathbf{c}^T \mathbf{y}_{L_c}(n)$ avec $\mathbf{y}_{L_c}(n) = [y(n), \dots, y(n - L_c)]^T$

Sous l'hypothèse de signaux circulaires au second ordre, on a

$$J = \text{sgn}(\kappa_s) \mathbb{E}[|v_n|^4]$$

Implémentation adaptative : Algorithme du gradient stochastique

Soit \mathbf{c}_n le filtre à la $n^{\text{ème}}$ itération. On a

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{c}}_{n+1} &= \mathbf{c}_n + \mu \text{sgn}(\kappa_s) \overline{\mathbf{y}_{L_c}(n)} v_n |v_n|^2 \\ \mathbf{c}_{n+1} &= \tilde{\mathbf{c}}_{n+1} / \|\tilde{\mathbf{c}}_{n+1}\| \\ v_{n+1} &= \mathbf{c}_{n+1}^T \mathbf{y}_{L_c}(n+1) \end{cases}$$

Algorithme de Godard (ou CMA)

Algorithme du Module Constant (1980)

Soit $C = \mathbb{E}[|s_n|^4]/\mathbb{E}[|s_n|^2]$. On pose

$$J = \mathbb{E} [(|v_n|^2 - C)^2]$$

Si κ_S négatif, alors la minimisation de J par rapport à c élimine toute l'interférence entre symboles

- Implémentation adaptative

$$\mathbf{c}_{n+1} = \mathbf{c}_n - \mu \overline{\mathbf{y}_{L_c}(n)} v_n (|v_n|^2 - C)$$

- Minima locaux nombreux
- Pas de minima locaux si SIMO stationnaire
- Constellations à module constant (MDP sauf MDP-2)

Rappel : cas d'une séquence d'apprentissage

Cherchons le filtre-égaliseur \mathbf{c} t.q. sa sortie $v_n = \mathbf{c}^T \mathbf{y}_{L_c}(n)$ soit la plus proche possible de la séquence d'apprentissage s_n . Soit

$$J = \mathbb{E}[|v_n - s_n|^2]$$

avec s_n connu.

N.B. : ce critère ne marche pas si s_n inconnu car il est seulement fonction du second ordre

Implémentation adaptative : Algorithme du gradient stochastique

$$\mathbf{c}_{n+1} = \mathbf{c}_n - \mu \overline{\mathbf{y}_{L_c}(n)} (v_n - s_n)$$

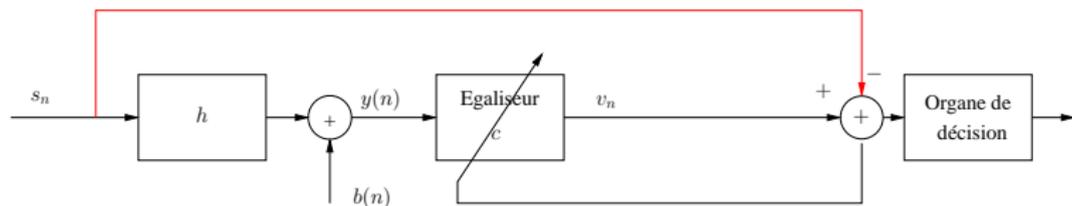
Remarque : les algorithmes autodidactes aux ordres supérieurs se mettent sous la forme

$$\mathbf{c}_{n+1} = \mathbf{c}_n - \mu \overline{\mathbf{y}_{L_c}(n)} (v_n - g(v_n))$$

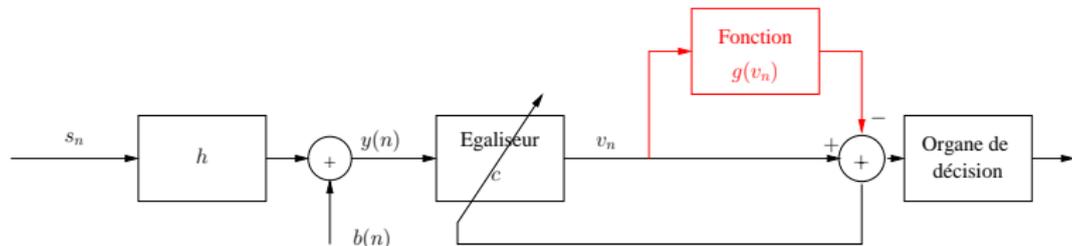
avec, par exemple,

$$g_{\text{SW}}(v_n) = v_n(1 + \text{sgn}(\kappa_S)|v_n|^2) \text{ et } g_{\text{CMA}}(v_n) = v_n(1 + C - |v_n|^2)$$

Schéma récapitulatif



Structure d'un égaliseur adaptatif avec séquence d'apprentissage



Structure d'un égaliseur adaptatif aveugle

s_n est remplacé par $g(v_n)$ qui joue alors le rôle de « séquence d'apprentissage »

Illustrations numériques

- Modèle SISO stationnaire
- Constellation MDP-4
- Filtre-égaliseur c de degré 6
- Fig. gauche : $\mathbf{h} = [0.3, 0.86, 0.39]^T$
- Fig. droite : $\mathbf{h} \leftarrow \mathbf{h} + \text{std} \times \mathcal{N}(0, 1)$ aux instants 500, 1000 et 1500

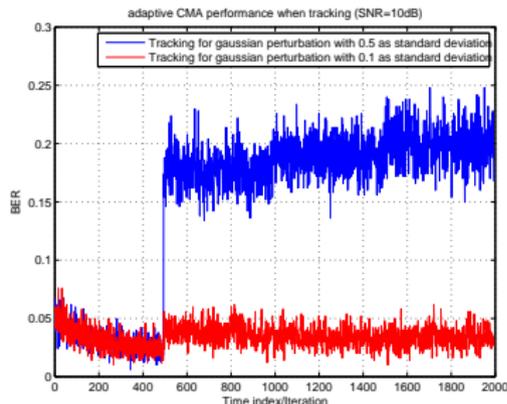
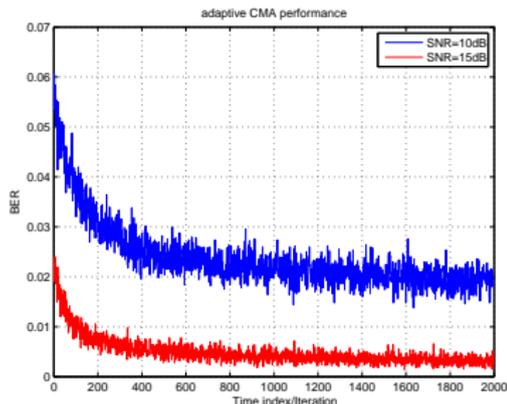


FIG.: TEB en fonction de l'instant

Partie 3 : Algorithmes au second ordre

Algorithmes au second ordre

Principe

- Modèle SIMO stationnaire
- Algorithmes basés sur l'identification autodidacte, c'est-à-dire, qu'ils estiment $\mathbf{h} = [\mathbf{h}(0)^T, \dots, \mathbf{h}(L)^T]^T$

Approche matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}(n) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(n-N) \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}_N(n)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) & \dots & \mathbf{h}(L) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{h}(0) & \dots & \mathbf{h}(L) \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}(\mathbf{h})} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{s}_n \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{n-N-L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_{N+L}(n)}$$

avec $\mathcal{T}(\mathbf{h})$ une matrice de Sylvester de taille $2(N+1) \times (N+L+1)$

Propriété : Si $\mathbf{h}(z) \neq 0$, $\forall z$ (c.-à-d., si $h_1(z)$ et $h_2(z)$ ne partagent pas de zéros) et $N > L$, alors $\mathcal{T}(\mathbf{h})$ est de rang plein et donc inversible à gauche

Méthode d'ajustement de covariance (I)

Question : Quel est le meilleur estimateur au second ordre ?

Soient

- $\mathbf{R}_Y(\mathbf{h}) = \mathbb{E}[\mathbf{Y}_N(n)\mathbf{Y}_N(n)^H]$ et $\hat{\mathbf{R}}_{N_{obs}} = \frac{1}{N_{obs}} \sum_{n=0}^{N_{obs}-1} \mathbf{Y}_N(n)\mathbf{Y}_N(n)^H$
- $\underline{\mathbf{r}}_Y(\mathbf{h}) = \text{vec}(\mathbf{R}_Y(\mathbf{h}))$ et $\hat{\underline{\mathbf{r}}}_{N_{obs}} = \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_{N_{obs}})$
- $\mathbf{r}_Y(\mathbf{h}) = [\Re\{\underline{\mathbf{r}}_Y(\mathbf{h})\}^T, \Im\{\underline{\mathbf{r}}_Y(\mathbf{h})\}^T]^T$ et $\hat{\mathbf{r}}_{N_{obs}} = [\Re\{\hat{\underline{\mathbf{r}}}_{N_{obs}}\}^T, \Im\{\hat{\underline{\mathbf{r}}}_{N_{obs}}\}^T]^T$

Une analyse des performances asymptotiques conduit à

$$\sqrt{N_{obs}}(\hat{\mathbf{r}}_{N_{obs}} - \mathbf{r}_Y(\mathbf{h})) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma_{\mathbf{h}})$$

autrement dit

$$\hat{\mathbf{r}}_{N_{obs}} \approx \mathbf{r}_Y(\mathbf{h}) + \mathbf{b}_{N_{obs}}$$

avec $\mathbf{b}_{N_{obs}}$ un bruit gaussien centré de matrice de covariance $\Gamma_{\mathbf{h}}/N_{obs}$

Méthode d'ajustement de covariance (II)

Idée :

- Construire du maximum de vraisemblance basé sur $\hat{\mathbf{r}}_{N_{obs}}$ et non sur l'ensemble des données $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_{N_{obs}} (N_{obs})$
- Asymptotiquement, le meilleur algorithme du second ordre

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_{obs}} \ln(p(\hat{\mathbf{r}}_{N_{obs}} | \mathbf{h})) &= -(\hat{\mathbf{r}}_{N_{obs}} - \mathbf{r}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{h}))^T \Gamma_{\mathbf{h}}^{-1} (\hat{\mathbf{r}}_{N_{obs}} - \mathbf{r}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{h})) \\ &\quad - \frac{\ln(\det(\Gamma_{\mathbf{h}}))}{2N_{obs}} + \text{constante} \end{aligned}$$

Résultat

$$\hat{\mathbf{h}}_{AC} = \arg \min_{\mathbf{h}} \left\| \Gamma_{\mathbf{h}}^{-\frac{1}{2}} (\hat{\mathbf{r}}_{N_{obs}} - \mathbf{r}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{h})) \right\|^2$$

avec $\|\mathbf{W}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^H \mathbf{W} \mathbf{x}$

Méthode du maximum de vraisemblance (I)

Question : construire le maximum de vraisemblance basé sur \mathbf{Y}

$$\mathbf{Y} = \mathcal{T}(\mathbf{h})\mathbf{S} + \mathbf{B}$$

avec \mathbf{B} un bruit gaussien blanc centré et \mathbf{S} *inconnu*

$$\max_{\mathbf{h}} p(\mathbf{Y}|\mathbf{h}) = \int p(\mathbf{Y}|\mathbf{h}, \mathbf{S})p(\mathbf{S})d\mathbf{S}$$

presque toujours intractable

TRUE ML

$$\max_{\mathbf{h}} p(\mathbf{Y}|\mathbf{h}) = \int p(\mathbf{Y}|\mathbf{h}, \mathbf{S})e^{-\mathbf{S}^H \Gamma_s^{-1} \mathbf{S}} d\mathbf{S}$$

tractable mais pas optimal

GAUSSIAN ML

$$\max_{\mathbf{h}, \mathbf{S}} p(\mathbf{Y}|\mathbf{h}, \mathbf{S})$$

tractable mais pas optimal

DETERMINISTIC ML

Maximum de vraisemblance déterministe

Soit le vecteur de bruit gaussien \mathbf{b} de variance $2N_0$

$$p(\mathbf{Y}|\mathbf{h}, \mathbf{S}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2N_0} \|\mathbf{Y} - \mathcal{T}(\mathbf{h})\mathbf{S}\|^2\right)$$

Alors l'estimateur ML-(conditionné/déterministe) est donné par

$$(\hat{\mathbf{h}}, \hat{\mathbf{S}})_{\text{ML}} = \arg \min_{\mathbf{h}, \mathbf{S}} \|\mathbf{Y} - \mathcal{T}(\mathbf{h})\mathbf{S}\|^2$$

Méthode du maximum de vraisemblance (II)

Problème séparable

- Minimisation sur \mathbf{S} (sans contrainte) :

$$\hat{\mathbf{S}}_{\text{ML}} = (\mathcal{T}(\mathbf{h})^H \mathcal{T}(\mathbf{h}))^{-1} \mathcal{T}(\mathbf{h})^H \mathbf{Y}$$

- Minimisation ensuite sur \mathbf{h} :

$$\hat{\mathbf{h}}_{\text{ML}} = \arg \min_{\mathbf{h}} \left\| \underbrace{(\mathbf{Id} - \mathcal{T}(\mathbf{h})(\mathcal{T}(\mathbf{h})^H \mathcal{T}(\mathbf{h}))^{-1} \mathcal{T}(\mathbf{h})^H)}_{P_{\mathbf{h}}^\perp} \mathbf{Y} \right\|^2$$

avec $P_{\mathbf{h}}^\perp$ la matrice de projection orthogonale sur $\text{Im}(\mathcal{T}(\mathbf{h}))^\perp$

$$\hat{\mathbf{h}}_{\text{ML}} = \arg \max_{\mathbf{h}} \mathbf{h}^H \underline{\mathbf{Y}}^H (\mathcal{T}(\mathbf{h})^H \mathcal{T}(\mathbf{h}))^{-1} \underline{\mathbf{Y}} \mathbf{h}$$

Remarque :

- Fonction de coût quadratique / $\mathbf{Y} \Rightarrow$ Second ordre « exhaustif »
- Fonction de coût non-quadratique / $\mathbf{h} \Rightarrow$ complexe mais approche ping-pong possible (suite de décomposition propre)

Méthode sous-espace

Principe

Soit le modèle suivant

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}_n$$

$$\text{Im}(\mathbf{A}(\theta)) = \text{Im}(\mathbf{A}(\theta')) \iff \theta = \theta'$$

Alors θ peut être estimé de la manière suivante

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} d(\text{vect}(\mathbf{y}(n)), \text{Im}(\mathbf{A}(\theta)))$$

Application :

$$\mathbf{Y}_N(n) = \mathcal{T}(\mathbf{h})\mathbf{S}_{N+L}(n), \quad \text{c.-à-d., } \mathbf{A} \longleftrightarrow \mathcal{T}(\mathbf{h}) \quad \text{et} \quad \theta \longleftrightarrow \mathbf{h}$$

- Si la source est blanche, alors $\text{Im}(\mathbf{R}_Y) = \text{Im}(\mathcal{T}(\mathbf{h}))$
- Si $h_1(z)$ et $h_2(z)$ n'ont pas de zéros communs, alors $\text{Im}(\mathcal{T}(\mathbf{h}')) = \text{Im}(\mathcal{T}(\mathbf{h})) \iff \mathbf{h}' = \alpha\mathbf{h}$

Méthode de prédiction linéaire

Résultat

$\{\mathbf{y}(n)\}$ est un processus AR d'ordre L d'innovation $\mathbf{i}(n) = \mathbf{h}(0)s_n$, c.-à-d.,

$$\mathbf{y}(n) + \sum_{l=1}^L \mathbf{A}(l)\mathbf{y}(n-l) = \mathbf{i}(n)$$

En effet, dès $h_1(z)$ et $h_2(z)$ n'ont pas de zéros communs, il existe $[g_1(z), g_2(z)]$ de degré L tel que $g_1(z)h_1(z) + g_2(z)h_2(z) = 1$ (Bezout)

Implémentation :

- Résoudre les équations de Yule-Walker

$$\mathbb{E}[\mathbf{i}(n)[\mathbf{y}(n-1)^H, \dots, \mathbf{y}(n-L)^H]] = 0$$

- Estimer $\mathbf{h}(0)$ à partir de la matrice de covariance d'innovation

Comparaison

	Complexité	Performance	Robustesse
Ajustement Covariance	mauvais	très bon	très bon
Max. Vraisemblance	mauvais	très bon	mauvais
Sous-Espace	bon	très bon	mauvais
Prédiction Linéaire	bon	bon	moyen

Illustrations numériques (I)

- Signal reçu suréchantillonné d'un facteur 2
- Canal radio-mobile
- Constellation MAQ-4
- Fenêtre d'observation : 1000 symboles transmis

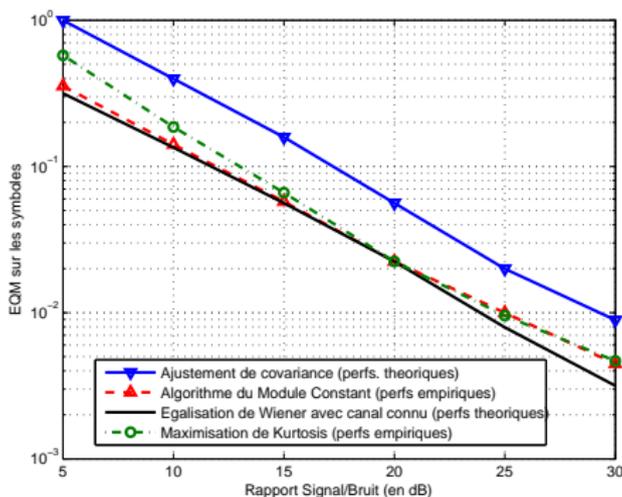


FIG.: EQM en fonction du RSB pour la MAQ-4 (cf. thèse de L. Mazet)

Illustrations numériques (II)

- Signal reçu suréchantillonné d'un facteur 2
- Canal radio-mobile
- Constellation MAQ-16
- Fenêtre d'observation : 1000 symboles transmis

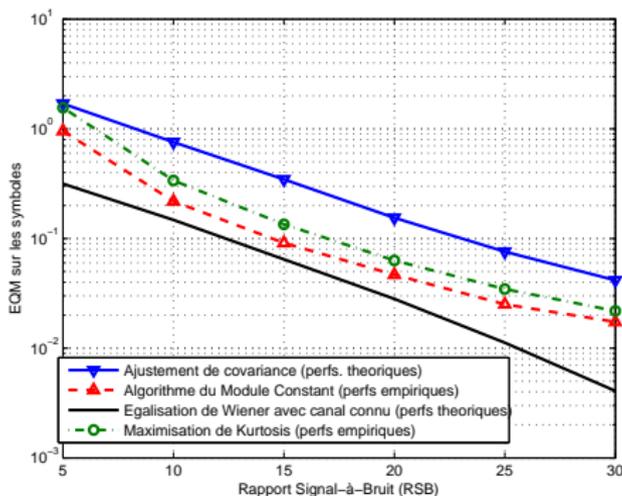


FIG.: EQM en fonction du RSB pour la MAQ-16 (cf. thèse de L. Mazet)

Conclusion

- Egalisation autodidacte fonctionne en pratique
- Ordres supérieurs :
 - Analyse théorique de convergence délicate
 - Bémol : algorithme requiert une assez large fenêtre d'observations
 - Adaptation possible d'un modèle SISO à un modèle SIMO
- Ordre deux :
 - Utilisation possible en pratique avec diversité multi-antennes
 - Performances théoriques connues
- Extension possible au contexte MIMO (séparation de source)

Bibliographie

- D. Godard, "Self-recovering equalization and carrier tracking in two-dimensional data communications systems", IEEE Trans. on Communications, Nov. 1980.
- O. Shalvi et E. Weinstein, "New criteria for blind deconvolution of non-minimum phase systems", IEEE Trans. on Information Theory, Mars 1990.
- A. Benveniste, M. Métivier et P. Priouret, "Adaptive algorithms and stochastic approximations", Edition Springer, 1990.
- L. Tong, G. Xu et T. Kailath, "A new approach to blind identification and equalization of multipath channels", Congrès d'Asilomar, 1991.
- D. Slock, "Blind fractionally-spaced equalization, perfect-reconstruction filter banks and multichannel linear predictor", Congrès ICASSP, 1994.
- E. Moulines, P. Duhamel, J.F. Cardoso et S. Mayrargue, "Subspace method for blind equalization of multichannel FIR filters", IEEE Trans. on Signal Processing, Fév. 1995.
- G. Giannakis et S. Halford, "Asymptotically optimal blind channel estimation and performance analysis", IEEE Trans. on Signal Processing, Juil. 1997.
- P. Loubaton, "Signal et télécoms", Edition Hermès, 2004.
- P. Comon et C. Jutten, "Handbook of Blind Source Separation, Independent Component Analysis and Applications", Academic Press, 2010.