

Partie 0: Rappel de communications numériques

Philippe Ciblat

Télécom ParisTech, France

Introduction (I)

- Sauf la radio, communications actuelles en numérique
 - GSM, 3G, TNT, Wifi
 - ADSL,
 - MP3, DVD
- Types de canaux : cuivre, ligne électrique, Hertzien/sans fil, fibre optique
- Types de sources : analogique (voix) ou numérique (données)

Introduction (II)

Système analogique : $s(t)$ source analogique

$$\text{signal émis} : x(t) = f(s(t))$$

- + Avantages : faible complexité du modem
- Inconvénients : transmissions de données, accès multiple, performances, traitement de l'information

Système numérique : s_n source numérique (composée de 0 et 1)

$$\text{signal émis} : x(t) = f(s_n)$$

Si source analogique, on la numérise

- échantillonnage (pas de perte si Shannon-Nyquist vérifié)
 - quantification (perte d'information)
- ex.** : son-hifi de bande [20Hz, 20kHz] \Rightarrow 44.1kHz de débit-échantillon et 16bits, c'est-à-dire, 700kbits/s (ou 1.4Mbits/s en stéréo)

Paramètres fondamentaux

- Débit binaire : D_b bits/s
- Bande occupée : B Hz
- Probabilité d'erreur : P_e
- Puissance transmise : P_b mW ou dBm (notion de RSB/SNR)

Objectif

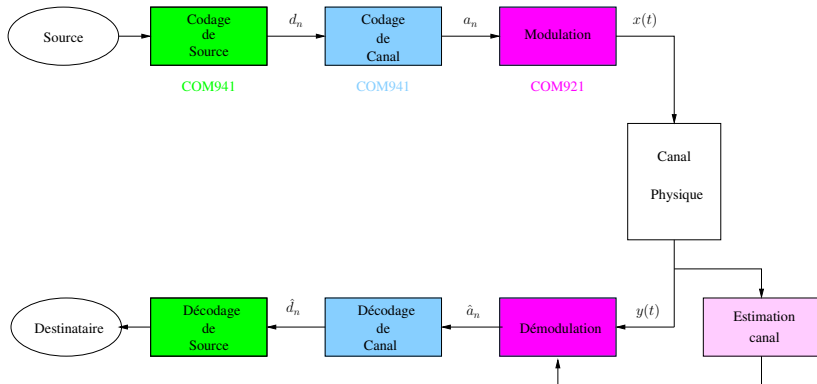
- Cas idéal :

$$\max D_b$$

sous les contraintes de minimiser B , P_e et P_b .

- Cas pratique : dépend de la QoS du système étudié
 - GSM/3G : min latence, avec D_b fixe et P_e variable
 - ADSL : max D_b , avec P_e , B et P_b fixe

Description globale d'un système



Question ?

Que mettre dans les boîtiers « modulation » et « estimation »

Plan du cours

1. Notion de signal sur porteuse et en bande de base
2. Quelques modèles de canaux
 - 2.1 Canal gaussien (AWGN)
 - 2.2 Canal sélectif en fréquence
3. Description de modulateurs simples (linéaires)
4. Passage du temps continu au temps discret
 - 4.1 Espace des signaux
 - 4.2 Filtre adapté
 - 4.3 Critère de Nyquist
5. Détecteurs et performances
 - 5.1 Détecteur MAP et ML
 - 5.2 Performances

Signaux Porteuse/Bande de Base

- **Constat** : $x(t)$ transportant une information de débit D_b "oscille" à une vitesse maximale en $\mathcal{O}(D_b)$ et donc occupe une bande de $\mathcal{O}(D_b)$.
- **Problème** : la propagation à basse fréquence n'est pas adaptée
 - coupure de la fréquence 0 par la RF
 - taille des antennes
 - disponibilité du spectre
- **Solution** : transposition de $x(t)$ autour d'une autre fréquence

Clairement

- Côté émetteur (TX) : $x(t)$ (en BdB, *i.e.*, autour de la fréquence '0') est translaté à une fréquence porteuse/*carrier frequency* f_0 pour obtenir $x_c(t)$.
- Côté récepteur (RX) : afin d'échantillonner à la vitesse de $\mathcal{O}(D_b)$, retour en bande de base

Quelques exemples

Quand f_0 augmente

- atténuation augmente ($1/f_0^2$)
- antenne diminue ($1/f_0$)
- B peut être choisie plus grande

Système	f_0	B	Antenne
Liaison intercont.	$\sim 10\text{MHz}$ (HF)	100kHz	100m
TNT	600MHz (UHF)	qq MHz	1 m
GSM	900MHz	qq MHz	10 cm
Wifi	5.4 GHz	qq 10MHz	qq cm
Satellite	11GHz	qq 100MHz	–
Personal Area Network	60GHz	–	–

Formalisation mathématique

Sur la porteuse f_0 , on transmet

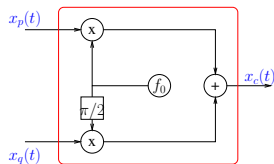
$$x_c(t) = x_p(t) \cos(2\pi f_0 t) - x_q(t) \sin(2\pi f_0 t) = \Re \left((x_p(t) + ix_q(t)) e^{2i\pi f_0 t} \right)$$

avec $x_p(t)$ et $x_q(t)$ deux signaux à valeurs réelles de bande $B (< f_0)$.

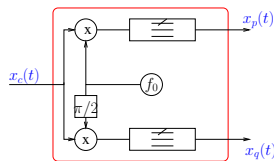
Enveloppe complexe (Bande de base)

$$x(t) = x_p(t) + ix_q(t)$$

Modulateur I/Q



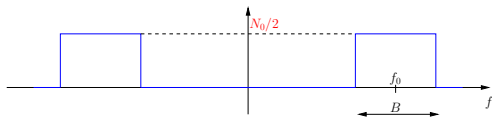
Démodulateur I/Q



Rq. : Energie en Bande de base double de celle en porteuse !

Application sur le bruit

Soit $b_c(t)$ un bruit (réel, stationnaire, centré, gaussien) sur porteuse de densité spectrale de puissance (d.s.p.)

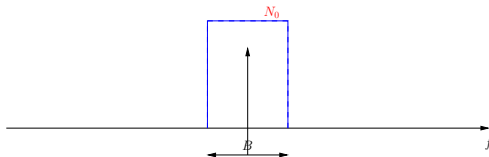


Alors, on a

$$b(t) = b_p(t) + ib_q(t)$$

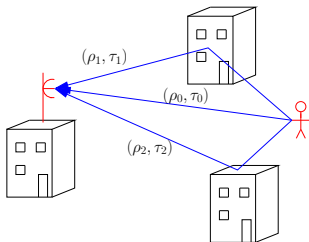
avec

- $b_p(t)$ et $b_q(t)$ deux bruits réels, stationnaires, centrés, gaussiens en bande de base
- $b_p(t)$ et $b_q(t)$ sont indépendants et de même d.s.p.



Canal de propagation

Canal de type sans fil (*wireless*) : canal multitrajet



$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_k \rho_k x(t - \tau_k) + b(t) \\
 &= \mathbf{c}(t) \star x(t) + b(t)
 \end{aligned}$$

avec $b(t)$ du transparent 10.

- **Temps de dispersion** : $T_d = \max_k \tau_k$
- **Bande de cohérence** : $B_c = \arg \max_{\delta f} \{ \|C(f) - C(f + \delta f)\| < \varepsilon \}$

$$B_c = \mathcal{O}(1/T_d)$$

Modèle de canal : gaussien

- Multitrajets (T_d) courts par rapport à T_s (temps-symbole)
- Valable pour les faisceaux hertziens
- Valable pour le satellite
- Valable aussi pour les liaisons très bas débit

$$y(t) = x(t) + b(t)$$

Modèle de canal : sélectif en fréquence

- Valable en sans fil (GSM avec $T_d = 4T_s$, Wifi avec $T_d = 16T_s$)
- Valable pour l'ADSL aussi ($T_d = 100T_s$)

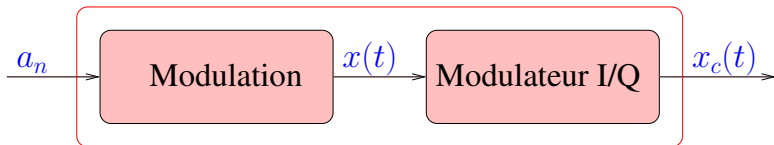
$$y(t) = c(t) \star x(t) + b(t)$$

⇒ interférence de symboles (IES)

Remarque fondamentale

- La nature du canal (IES ?) est modifiée selon le débit requis
- Plus le débit est élevé, plus le canal admet d'IES ($T_d \gg T_s$)

Modulation



"Modulation"

Question

Comment associer les bits a_n au signal analogique en bande de base $x(t)$?

Modulation binaire (I)

- Forme d'onde : $x_0(t)$ si bit '0' et $x_1(t)$ si bit '1'
- Modulation linéaire (binaire) :

$$x_0(t) = Ag(t) \quad \text{et} \quad x_1(t) = -Ag(t)$$

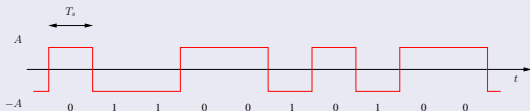
avec $-A$ et A des symboles, et $g(t)$ un filtre de mise en forme.

Train de symboles

Si T_s est la période d'émission des symboles, alors

$$x(t) = \sum_k s_k g(t - kT_s) \quad \text{avec} \quad s_k \in \{-A, A\}$$

Exemple ($g(t)$ fonction porte de durée T_s)



Modulation M -aire

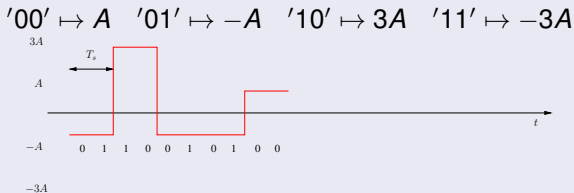
- Bande de $x(t)$ (B) est identique à celle de $g(t)$:
 - Si $B < 1/T_s$, interférence entre symboles (cf. plus tard)
 - Si $B \gg 1/T_s$, gâchis de bande

$$B = \mathcal{O}(1/T_s)$$

- Efficacité spectrale de 1bit/s/Hz en modulation binaire

Modulation M -aire : augmentation de l'efficacité spectrale si un symbole peut contenir plusieurs éléments binaires. Evidemment, problème de P_e d'où un compromis nécessaire.

Exemple ($M = 4$)



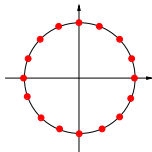
Constellations

Constellations = Ensemble des symboles possibles

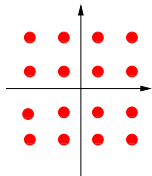
- Modulation d'amplitude (MDA, PAM, ASK)



- Modulation de phase (MDP, PSK)



- Modulation d'amplitude en quadrature (MAQ, QAM)



Espace des signaux

Soit une transmission avec M formes d'onde possibles

$$x_m(t), \quad m = 1, \dots, M$$

Le signal émis vit dans l'espace vectoriel E suivant

$$E = \text{vect}/\text{span}\{x_m(t)\}_{m \in \{1, \dots, M\}}$$

Cet espace admet une dimension

$$D = \dim_{\mathbb{C}} E$$

et une base orthonormale (otn)

$$E = \text{vect}\{\Phi_\ell(t)\}_{\ell \in \{1, \dots, D\}}$$

par rapport au produit scalaire $\langle f(t)|g(t) \rangle = \int f(t)\overline{g(t)}dt$

Vecteur équivalent

Ainsi chaque $x_m(t)$ se décompose selon

$$x_m(t) = \sum_{\ell=1}^D s_m^{(\ell)} \Phi_{\ell}(t)$$

avec $s_m^{(\ell)}$ un nombre complexe.

Ainsi

- $\mathbf{s}_m = [s_m^{(1)}, \dots, s_m^{(D)}]^T$ est le vecteur représentant le signal analogique $x_m(t)$
- Chaque $s_m^{(\ell)}$ est une coordonnée du vecteur/signal.

On travaillera avec \mathbf{s}_m qui **porte l'information** (donc à temps discret)

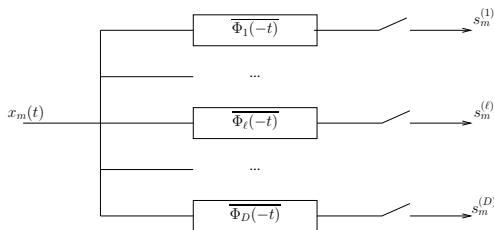
Exemples

- Modulations linéaires : $D = 1$
- Modulations non-linéaires : cf. TD1

Temps continu \rightarrow temps discret

Comment calculer \mathbf{s}_m à partir de $x_m(t)$?

$$\begin{aligned}
 s_m^{(\ell)} &= \langle x_m(t) | \Phi_\ell(t) \rangle \\
 &= \int x_m(\tau) \overline{\Phi_\ell(\tau)} d\tau \\
 &= \overline{\Phi_\ell(-t)} \star x_m(t) \Big|_{t=0}
 \end{aligned}$$



Banc de filtres adaptés (à chaque fonction de base)

Application à un train de symboles

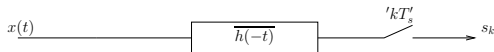
$$x(t) = \sum_k s_k h(t - kT_s)$$

avec

- s_k des symboles quelconque
- $h(t)$ un filtre quelconque **orthogonal** / à ses décalés

$E = \text{vect}\{h(t - kT_s)\}_k$ avec une base orthon $\{h(t - kT_s)\}_k$, d'où

$$\begin{aligned} s_k &= \langle x(t) | h(t - kT_s) \rangle \\ &= \overline{h(-t)} \star x(t) |_{t=kT_s} \end{aligned}$$



Projection = Filtre adapté + échantillonnage

Récepteurs

- Les récepteurs se conçoivent avec la Théorie de la Détection
- Les récepteurs ont une complexité fortement fonction du canal

Canal gaussien :

- Détecteur à seuil (*Threshold detector*)

Canal sélectif en fréquence :

- Algorithme de Viterbi (optimal)
- Egalisation linéaire (sous-optimal)
- OFDM (sous-optimal mais très répandu)

Démodulateur exhaustif (I)

$$y(t) = x_m(t) + b(t)$$

avec

- $x_m(t)$ forme d'onde émise (appartenant à E du transparent 18)
- $b(t)$ bruit (suivant le modèle du transparent 10)

Comment passer à temps discret sans perdre d'information ?

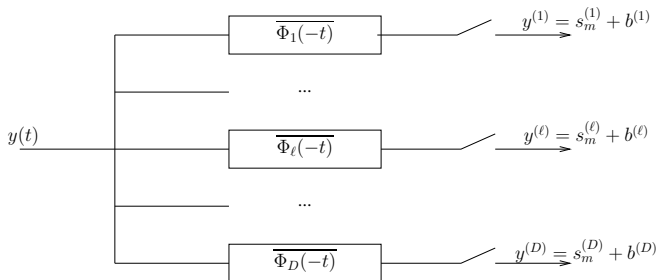
Clairement $b(t)$ appartient à $E \oplus E^\perp$, d'où, $b(t) = b_E(t) + b_{E^\perp}(t)$

On peut montrer que

- $b_E(t)$ et $b_{E^\perp}(t)$ sont indépendants
- Dans $y(t)$ l'information sur la forme d'onde est donc uniquement présente dans sa projection sur E
- Donc les coordonnées $y^{(\ell)} = \langle y(t) | \Phi_\ell(t) \rangle$ sont exhaustives par rapport à l'information présente dans $y(t)$ sur $x_m(t)$

Démodulateur exhaustif (II)

Par conséquent, le récepteur commence par le boîtier suivant



$$\mathbf{y} = \mathbf{s}_m + \mathbf{b}$$

avec $\mathbf{y} = [y^{(1)}, \dots, y^{(D)}]^T$

Propriété du bruit à temps discret

- \mathbf{b} est un vecteur gaussien (complexe) centré
- Les coordonnées $b^{(\ell)}$ et $b^{(\ell')}$ sont deux-à-deux indépendants
- De plus $b^{(\ell)} = b_p^{(\ell)} + ib_q^{(\ell)}$ avec $\mathbb{E}[b_p^{(\ell)^2}] = \mathbb{E}[b_q^{(\ell)^2}] = N_0$

Distribution

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{b}) &= \prod_{\ell=1}^D p(b^{(\ell)}) = \prod_{\ell=1}^D \left(p(b_p^{(\ell)}) p(b_q^{(\ell)}) \right) \\
 &= \prod_{\ell=1}^D \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} e^{-\frac{b_p^{(\ell)^2}}{2N_0}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} e^{-\frac{b_q^{(\ell)^2}}{2N_0}} \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi N_0} \right)^D e^{-\frac{\sum_{\ell=1}^D (b_p^{(\ell)^2} + b_q^{(\ell)^2})}{2N_0}} = \left(\frac{1}{2\pi N_0} \right)^D e^{-\frac{\|\mathbf{b}\|^2}{2N_0}}
 \end{aligned}$$

Application à un train de symboles (I)

$$y(t) = \sum_k s_k h(t - kT_s) + b(t)$$

avec

- s_k des symboles quelconque
- $h(t)$ un filtre quelconque **orthogonal** / à ses décalés

Application du démodulateur exhaustif avec $\Phi_k(t) = h(t - kT_s)$

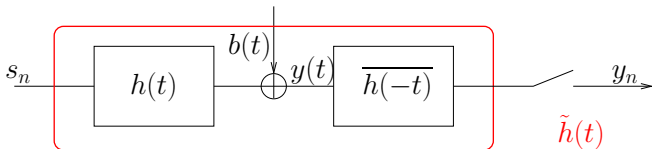
Question

Comment $\{h(t - kT_s)\}_k$ est une base **otn** ?

Il faut que

- $\tilde{h}(t) = \overline{h(-t)} \star h(t)$ soit de *Nyquist*, c.-à-d., $\tilde{h}(\ell T_s) = \delta_{\ell,0}$.
- et donc que $h(t)$ soit *racine de Nyquist*

Application à un train de symboles (II)



$$\begin{aligned}
 y_n &= \langle y(t) | h(t - nT_s) \rangle \\
 &= \sum_{\ell} \tilde{h}(\ell T_s) s_{n-\ell} + b_n = \tilde{h}(0) s_n + b_n
 \end{aligned}$$

En pratique $h(t)$ est racine de Nyquist si

- canal gaussien (canal n'apporte pas d'IES)
- $g(t)$ racine de Nyquist (mise en forme n'apporte pas d'IES)

Propriété

Le filtre de Nyquist admet comme contrainte $B > 1/T_s$ (cf. transparent 7)

Détecteurs MAP et ML

Que faire pour choisir la bonne forme d'onde à un \mathbf{y} donné ?

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{s}, \mathbf{b}, \dots), \text{ avec } \mathbf{s} = \{\mathbf{s}_m\}_m$$

On appelle détecteur optimal, celui qui

$$\min P_e, \text{ avec } P_e = \text{Prob}(\hat{\mathbf{s}} \neq \mathbf{s})$$

Détecteur optimal

- Si les \mathbf{s} ne sont pas équiprobables (Max A Posteriori - MAP),

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \max_{\mathbf{s}} p(\mathbf{s}|\mathbf{y})$$

- Si les \mathbf{s} sont équiprobables (Maximum Likelihood - ML),

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \max_{\mathbf{s}} p(\mathbf{y}|\mathbf{s})$$

(cf. calculs en COM941)

Application au canal gaussien

Après démodulation exhaustive, on a

$$\mathbf{y} = \mathbf{s}_m + \mathbf{b}$$

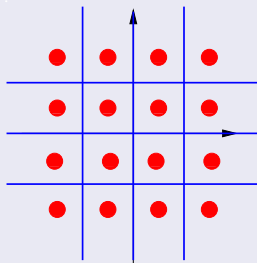
avec \mathbf{b} blanc.

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{s}} \|\mathbf{y} - \mathbf{s}\|^2$$

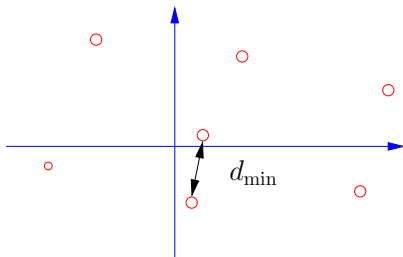
avec $\|\cdot\|$ la distance euclidienne.

Application aux modulations linéaires

On recherche le point de la constellation le plus proche de \mathbf{y} au sens de la norme euclidienne (détecteur à seuil).



Performances



- $d_{\min} = \min_{m \neq m'} \|\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_{m'}\|$
- $N_{\min} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M N_{\min,m}$ avec $N_{\min,m}$ nombre points à d_{\min} de \mathbf{s}_m

$$P_e = N_{\min} Q \left(\frac{d_{\min}}{2\sqrt{N_0}} \right)$$

(cf. calculs en COM941)

Application aux modulations linéaires

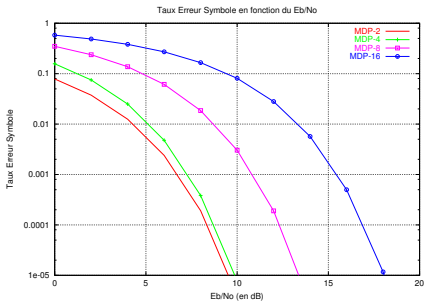
Constellation	Performances $Q\left(\sqrt{\gamma \frac{E_b}{N_0}}\right)$
MDA	$\gamma = 6 \log_2(M)/(M^2 - 1)$
MDP	$\gamma = \log_2(M)(1 - \cos(\frac{2\pi}{M}))$
MAQ	$\gamma = 3 \log_2(M)/(M - 1)$

avec E_b l'énergie par bit d'information transmis sur porteuse.

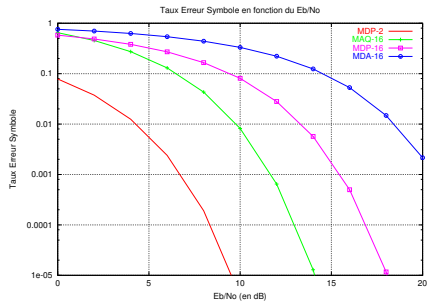
Remarque

$$\text{MAQ} > \text{MDP} > \text{MDA}$$

Illustrations numériques



P_e pour différents M (MDP fixé)



P_e pour différentes modulations (M fixé)

Canal sélectif en fréquence

La base $\{h(t - kT_s)\}_k$ n'est plus orthogonale, d'où,

$$y_n = \sum_{\ell} \tilde{h}(\ell T_s) s_{n-\ell} + b_n$$

- Bruit coloré d'où une technique de blanchiment : $y'_n = f \star y_n$
- Canal non-causal : $y(n) = y'_{n-L}$

Finalement, on a le modèle équivalent suivant

$$y(n) = \sum_{\ell=0}^L h(\ell) s_{n-\ell} + b(n)$$

avec $b(n)$ un bruit blanc.

Plan de l'Unité d'Enseignement

Partie 1 **Gestion de l'interférence entre symboles**

- 1.1 Algorithme de Viterbi (optimal)
- 1.2 Egalisation linéaire (sous-optimal)
- 1.3 OFDM (sous-optimal mais très répandu)

Partie 2 **Gestion de l'interférence entre utilisateurs**

- 2.1 CDMA (3G)
- 2.2 OFDMA (4G)

Partie 3 **Estimation des paramètres de propagation**

- 3.0 Rappel de la théorie de l'estimation
- 3.1 Estimation du filtre
- 3.2 Estimation de synchronisation fréquentielle