N° d'enregistrement au CNRS

THESE DE DOCTEUR-INGENIEUR

PRÉSENTÉE

À L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

PARIS -6-

par **Francis SCHMITT**

CONTRIBUTION A L'ETUDE DU METAMERISME

SOUTENUE LE 30 MARS 1977 *DEVANT LE JURY COMPOSE DE :*

MM.	M. FRANÇON	*PRESIDENT*
	F. ABELES	*EXAMINATEURS*
	G. BERTRAND	
	J. FLEURET	
	C. NEVEU	
	F. PARRA	
	Y. LEGRAND	*INVITE*

"Il n'est pire aveugle que celui

qui ne veut pas voir"

REMERCIEMENTS

Monsieur Jacques FLEURET m'a prodigué tout au long de cette étude ses précieux conseils. Je le remercie très chaleureusement de l'attention active avec laquelle il m'a soutenu et de la confiance qu'il m'a accordée dans son souci permanent d'une très grande liberté dans la recherche.

Je remercie

* Messieurs les Professeurs M. FRANCON et F. ABELES qui ont bien voulu me faire l'honneur d'accepter de présider et de participer à mon jury de thèse.

* Monsieur G. BERTRAND qui m'a initié autrefois à la colorimétrie, et Monsieur C. NEVEU pour leurs judicieux conseils. J'ai le redoutable honneur de défendre mon travail devant ces éminents spécialistes.

* Monsieur F. PARRA qui m'a vu débuter dans le domaine de la couleur et qui a su me communiquer son enthousiasme pour ces recherches.

* Monsieur le Professeur Y. LE GRAND qui m'a fait l'honneur d'accepter d'assister à ma soutenance.

* Monsieur B. AYRAULT, coordinateur de l'enseignement et de la recherche, Monsieur DE LAMARE, directeur du département ISSV et par eux l'administration de l'ENST qui m'a permis de mener à bien ce travail

* Toutes les personnes qui m'ont aidé dans cette étude d'une manière ou d'une autre : Messieurs G. WYSZECKI et R. KUEHNI, qui en quelques discussions m'ont apporté beaucoup par leurs connaissances poussées du sujet, les équipes des centres de calcul et de documentation, Chantal CLAUSS qui a assuré avec une grande compétence, ainsi que Jacqueline BENE la frappe de cette thèse.

Mais une thèse dépend surtout de l'environnement dans lequel son auteur est plongé, d'un labo, des amis, des idées qui germent, des polémiques... Cette aide qui se manifeste à tous les niveaux, scientifique, moral, psychologique est énorme. Il ne m'est pas possible de citer tous ceux qui y ont contribué. C'est pourquoi je les remercie tous par l'intermédiaire de mes plus fidèles compagnons de travail : Jacques FLEURET, Henri MAITRE, Alain CLAINCHARD et Jaime LOPEZ KRAHE. Jacques SCHMITT a depuis toujours tenté de m'inculquer son esprit de méthode et de synthèse et n'a pas ménagé ses efforts. Merci grand frère !

table des matiéres

TABLE DES MATIERES

1 - INTRODUCTION

2 - GENERALITE - COLORIMETRIE

2-1 PHOTOMETRIE

2-2 COLORIMETRIE

2-2-1 METAMERISME ET TRIVARIANCE VISUELLE

2-2-2 SYSTEMES COLORIMETRIQUES DE REFERENCE

2-2-3 CALCULS COLORIMETRIQUES

2-2-4 ILLUMINANTS ET SOURCES NORMALISEES

2-2-5 SOLIDE DES COULEURS

2-2-6 METRIQUE DE L'ESPACE DES COULEURS

3 - ASPECT CONCRET DU METAMERISME ET DE SES CONSEQUENCES

3-1 APPLICATIONS TECHNIQUES ET INDUSTRIELLES DU METAMERISME

3-1-1 FORMULATION DES RECETTES

3-1-2 CONTROLE DES COULEURS

3-1-3 MULTIPLICITE DES SOLUTIONS METAMERES

3-2 LIMITATIONS DUES AU METAMERISME

3-2-1 MODIFICATIONS DES CONDITIONS D'OBSERVATION

3-2-2 CRITERES DEVELOPPES PAR L'INDUSTRIE

3-2-2-1 Indices de métamérisme

3-2-2-2 Indices de rendu des couleurs

3-2-3 VOLUME DES INEGALITES CHROMATIQUES

4 - LES ENSEMBLES DE FONCTIONS METAMERES

4-1 CARACTERISATION DES ENSEMBLES DE FONCTIONS METAMERES

4-1-1 CAS DES STIMULI METAMERES : ENSEMBLE F

4-1-2 CAS DES COULEURS D'OBJET METAMERES : ENSEMBLE R

4-2 RECHERCHE DE FONCTIONS METAMERES DANS LES ETUDES ANTERIEURES

4-3 METHODES DES ELEMENTS SIMPLES

4-3-1 GENERATION DES ENSEMBLES DE METAMERES F

4-3-1-1 Limites finies de F

4-3-1-2 Convexité de F

4-3-1-3 Extrémités de F

4-3-1-4 Génération barycentrique de F

4-3-2 GENERATION DES ENSEMBLES DE METAMERES R

4-3-3 CAS LIMITES DES ENSEMBLES DE METAMERES

4-3-3-1 Cas de F

4-3-3-2 Cas de R

4-3-3-3 F *: cas limites de certains ensembles* R

4-4 EXTENSION DE LA METHODE DES ELEMENTS SIMPLES

5 - LE VOLUME DES INEGALITES CHROMATIQUES

5-1 DETERMINATION DU VOLUME V DANS LES ETUDES ANTERIEURES

5-1-1 APPROCHE STATISTIQUE

5-1-2 LIMITES THEORIQUES DU VOLUME V

5-2 APPLICATIONS DE LA METHODE DES ELEMENTS SIMPLES

5-2-1 DETERMINATION DES LIMITES THEORIQUES DE V

5-2-2 GENERATION STATISTIQUE DES METAMERES

5-2-3 DISTRIBUTION DANS V DES POINTS DE COULEUR DES METAMERES

6 - APPLICATIONS NUMERIQUES DE LA METHODE DES ELEMENTS SIMPLES

6-1 COMPARAISONS DE DEUX OBSERVATEURS

6-1-1 OBSERVATEURS DE REFERENCE COLORIMETRIQUE CIE-1931 et CIE-1964

6-1-2 INFLUENCE DES PARAMETRES LIES AU CALCUL

6-1-3 VARIABILITE DES OBSERVATEURS REELS

6-2 VOLUME DES INEGALITES CHROMATIQUES DANS LES PROBLEMES DE COULEUR D'OBJET

6-2-1 RECHERCHE D'UN SOUS-ENSEMBLE DES ELEMENTS SIMPLES

6-2-2 APPLICATION AU METAMERISME D'ILLUMINANT

6-2-3 REDUCTION SUPPLEMENTAIRE DU TEMPS DE CALCUL

6-2-4 APPLICATION AU METAMERISME D'OBSERVATEUR

- CONCLUSION
- ANNEXE 1
- ANNEXE 2
- REFERENCES GENERALES
- BIBLIOGRAPHIE
- PUBLICATIONS DE L'AUTEUR SUR LE SUJET

introduction

1 - INTRODUCTION

Les expériences de psychophysique ont mis en évidence la "trivariance visuelle" en prouvant que toute couleur pouvait être reproduite par un mélange de trois lumières colorées instrumentales convenablement choisies. La colorimétrie s'est développée à partir de ces expériences. Elle constitue la branche physique et technique de la science des couleurs. Elle a permis d'établir une classification objective des couleurs et procure les moyens théoriques et pratiques pour leur analyse, leur contrôle ou leur synthèse.

La trivariance visuelle est étroitement liée à une propriété fondamentale de la vision, le métamérisme. Selon cette propriété, des rayonnements lumineux de répartitions spectrales d'énergie différentes peuvent produire une même sensation de couleur. Le phénomène intervient dans tous les domaines où se rencontrent des problèmes de rendu des couleurs, de reproduction, d'éclairage...

Le métamérisme a suscité de récents développements en colorimétrie. C'est en effet une propriété qui résiste mal aux modifications des conditions d'observation. Celles-ci peuvent avoir pour conséquence importante d'entrainer la disparition de l'égalité chromatique entre deux couleurs métamères. Il est nécessaire de prévoir cette disparition pour pouvoir éventuellement la limiter.

Nous avons adopté dans cette étude une approche théorique du métamérisme. Notre but était de déterminer sa disparition consécutive à toute modification des conditions d'observation.

Après un rappel au chapitre 2 des principaux résultats de la colorimétrie, nous présentons au chapitre 3 un exposé très général sur les applications techniques et industrielles du métamérisme. Il nous a semblé utile d'en faire rapidement un tour d'horizon pour mettre en évidence les difficultés qu'on y rencontre et surtout le besoin de développer des méthodes permettant de mieux utiliser les possibilités du métamérisme et d'en prévoir aussi

plus précisément les limitations.

Les chapîtres suivants présentent notre travail original. Le chapître 4 est consacré à l'étude des ensembles de métamères. Nous y développons une méthode théorique permettant de les caractériser. Pour celà, nous considérons les ensembles des stimuli de couleur métamères et les ensembles constitués des courbes des facteurs spectraux de réflexion qui pour une source d'éclairage donnée procurent des couleurs d'objet métamères. Après découpage du spectre en un nombre fini M d'intervalles, nous démontrons une propriété caractéristique de ces ensembles : toutes leurs fonctions métamères peuvent être obtenues aisément par combinaison d'un nombre fini de fonctions métamères particulières que nous appelons éléments simples. Les ensembles métamères peuvent alors se caractériser par un hyperpolyèdre convexe de l'espace à M dimension des bandes spectrales, les éléments simples étant situés aux sommets. Le problème de l'exploration systématique d'un ensemble de métamères est donc réduit à la détermination de ses éléments simples qui, étant des solutions de nature très particulière, sont facilement obtenus sur calculateur.

Nous nous interessons au chapître 5 au problème de la disparition du métamérisme à la suite d'une modification des conditions d'observation. Ce phénomène se caractérise par le volume V des inégalités chromatiques défini dans l'espace chromatique. La méthode de génération de fonctions métamères par la méthode des éléments simples trouve ici sa véritable efficacité. Nous démontrons en effet que le volume V correspond au plus petit polyèdre contenant les nouveaux points de couleur des éléments simples. Pour déterminer les limites théoriques du volume V il nous suffit alors de projeter les éléments simples dans le nouvel espace chromatique. Leur enveloppe indique simplement les limites recherchées. La méthode des éléments simples nous suggère aussi un procédé simple de génération aléatoire des fonctions métamères dont les caractéristiques peuvent se projeter dans l'espace chromatique. Cela nous permet de déduire la distribution dans V des points de couleur des métamères directement à partir de la distribution des points de couleur des éléments simples.

On présente enfin au chapitre 6 les résultats de quelques applications

numériques de la méthode des éléments simples. On compare ainsi la vision colorée de différents observateurs. La disparition du métamérisme dans le cas des couleurs d'objet est illustré par quelques exemples correspondant à un changement de source lumineuse ou d'observateur.

Cette étude a été faite au laboratoire Image de l'ENS des Télécommunications et les travaux informatiques ont été réalisés sur un calculateur C11 - IRIS 80 du centre de calcul de l'ENST.

chapitre 2

CHAPITRE 2

GENERALITE - COLORIMETRIE

Nous rappelons brièvement dans ce chapitre les principales notions de photométrie et de colorimétrie qu'il est nécessaire de connaître pour une meilleure compréhension de la suite de cette étude. Pour une approche plus approfondie de ce domaine, on pourra se reporter aux ouvrages cités en référence générale et classés sous différentes rubriques : perception des couleurs, colorimétrie générale, colorimétrie et applications...

2 - 1 PHOTOMETRIE

Une véritable mesure et classification des couleurs ne s'est faite qu'après une longue évolution dans les méthodes expérimentales utilisées en psychophysique et dans leurs moyens physiques de contrôle. Dans un premier temps on s'est surtout attaché à déterminer le correspondant physique d'un des attributs psychométriques les plus importants de la lumière : la luminosité. On a ainsi défini la luminance L qui est la relation quantitative entre l'aspect énergétique et visuel des rayonnements lumineux :

$$L = K_m \int_\lambda L_{e,\lambda} \; V(\lambda) \; d\lambda \qquad (2-1)$$

où : $L_{e,\lambda}$ est la densité spectrale de la luminance énergétique de la lumière atteignant l'oeil et constituant le stimulus physique. Elle est exprimée en $W.sr^{-1}.m^{-2}.m^{-1}$.

: $V(\lambda)$ est la fonction d'efficacité lumineuse relative spectrale . C'est la courbe de réponse de l'observateur de référence photométrique CIE pour des stimuli monochromatiques d'énergie constante.

: K_m est une constante de normalisation assurant le passage des unités radiométriques aux unités photométriques du Système International : K_m = 680 Lumen/Watt (cette constante n'apparaîtrà plus dans la suite de l'étude car tous les calculs pourront y être fait en relatif).

: L'intégration se fait dans le domaine visible, c'est-à-dire typiquement pour une longueur d'onde λ de 400 à 700 nm. On utilise parfois un spectre plus large allant de 380 à 770 nm.

: L est exprimée en nit ou $cd.m^{-2}(=lm.sr^{-1}.m^{-2})$.

<u>Cette définition implique deux hypothèses essentielles</u> :

1) Une réponse V_λ parfaitement déterminée expérimentalement.

2) L'additivité des luminances ou loi d'Abney.

Ces hypothèses ne sont en fait qu'approximativement vérifiées dans la réalité. Nous disposons en effet de différentes techniques d'égalisation photométrique en vision hétérochrome : comparaison directe, pas à pas, papillotement, distinction minimale de la limite de séparation... Chacune d'entre elles procure une courbe $V(\lambda)$ qui lui est propre. Cependant les deux dernières méthodes mentionnées, quoique par nature très différentes, donnent des résultats très voisins. Ce sont aussi celles qui se rapprochent le plus de la loi d'additivité. Elles ont permis à la Commission Internationale de l'Eclairage (C.I.E.) de normaliser la courbe $V(\lambda)$ en 1924.

2 - 2 COLORIMETRIE

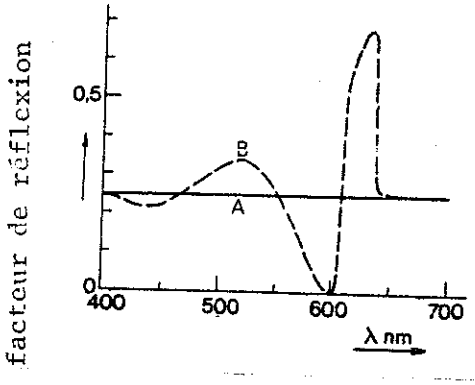
2-2-1 METAMERISME ET TRIVARIANCE VISUELLE

Le classement des couleurs par un observateur d'après leur apparence conduit à une organisation en fonction de trois critères perceptifs : la teinte, la saturation et la luminosité. Ce caractère tridimentionnel de l'espace des couleurs trouve déjà son origine dans le mécanisme même de la vision diurne avec la vérification de la théorie d'Young-Helmoltz (1801) selon laquelle il existe trois types différents de cellules photosensibles dans la rétine: les cônes. Les batonnets sont responsables eux, de la vision nocturne pour laquelle les couleurs sont absentes.

La vérification expérimentale de la trivariance visuelle est réalisée avec les expériences d'égalisation colorimétrique. On choisit trois flux lumineux quelconques de couleurs différentes, par exemple des lumières rouge, verte et bleue, appelés stimulus primaires instrumentaux. Le terme psychophysique de stimulus désigne un rayonnement physique particulier pénétrant dans l'oeil et produisant une sensation de lumière et de couleur. Il est alors toujours possible de trouver un judicieux mélange des trois primaires qui permettent d'obtenir une égalisation visuelle parfaite avec n'importe quel stimulus C particulier quelqu'en soit son origine physique. Par mélange on désigne ici une superposition additive des flux. Cette propriété est la première des lois de Grassmann.

Si la composition spectrale de C est identique à celle du mélange des primaires, ce qui est un cas particulier, les couleurs sont dites isomères. Dans tous les autres cas où les compositions spectrales sont différentes, les couleurs sont dites métamères (voir *Fig.2.1)*. Autrement dit deux couleurs sont métamères lorsqu'elles procurent avec des caractéristiques physiques distinctes la même perception visuelle, dans le sens où il y a égalité colorimétrique. Nous allons voir qu'elles peuvent se représenter par un même vecteur.

Figure 2.1 : Exemple des spectres de deux couleurs neutres métamères qui sont confondues par l'observateur de référence CIE-1931 (défini au pragraphe 2-2-2) (d'après Wyszecki - 1958).



Les autres lois de GRASSMANN prouvent en effet que l'espace des couleurs vérifie toutes les propriétés d'un espace vectoriel. C'est ainsi que si on désigne par 3 vecteurs $\vec{R}$, $\vec{V}$, $\vec{B}$, nos trois primaires à des niveaux d'énergie fixée, toute couleur C se représente alors par un vecteur $\vec{C}$ tel que :

$$\vec{C} = R\,\vec{R} + V\,\vec{V} + B\,\vec{B} \qquad (2\text{-}2)$$

où les composantes trichromatiques R, V, B, sont respectivement les proportions des trois primaires $\vec{R}$, $\vec{V}$, $\vec{B}$, dans le mélange donnant l'égalisation colorimétrique.

En admettant la validité de la loi d'Abney pour l'additivité des luminances, on a donc la relation suivante entre la luminance $L(\vec{C})$ de la couleur $\vec{C}$ et celles des trois primaires :

$$L(\vec{C}) = R\ L(\vec{R}) + V\ L(\vec{V}) + B\ L(\vec{B}) \qquad (2\text{-}3)$$

Si on considère à présent les raies monochromatiques $\vec{C}(\lambda)$ de longueur d'onde λ et d'énergie fixée à une valeur constante, on obtient pour les trois composantes R, V, B, les valeurs $\vec{r}(\lambda)$, $\vec{v}(\lambda)$, $\vec{v}(\lambda)$ qui définissent les fonctions colorimétriques. Celles-ci, avec la spécification des primaires choisies, caractérisent entièrement la vision des couleurs de l'observateur ayant réalisé les égalisations.

2-2-2 SYSTEMES COLORIMETRIQUES DE REFERENCE

Les premières résultats expérimentaux de Wright (1928-29) et Guild (1931) donnèrent des courbes $\vec{r}(\lambda)$, $\vec{v}(\lambda)$, $\vec{b}(\lambda)$remarquablement semblables malgré l'utilisation de procédures expérimentales très diverses. Ceci amena la Commission Internationale de l'Eclairage à définir un observateur de référence en 1931.

Le choix des primaires réelles étant arbitraire, la C.I.E. décida de définir trois primaires virtuelles $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ n'ayant aucune réalité physique mais étant parfaitement définies dans l'espace vectoriel des couleurs. Les composantes trichromatiques X, Y, Z du nouveau système sont simplement reliées aux composantes expérimentales R, V, B, par une transformation linéaire :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} R \\ V \\ B \end{pmatrix}$$

où M est la matrice de passage de l'ancien au nouveau système de primaires.

Les primaires $\vec{X}\ \vec{Y}\ \vec{Z}$ ont été choisies de telle sorte qu'elles vérifient certaines propriétés particulières permettant de déterminer les 9 coefficients de M. Les deux plus importantes sont les suivantes :

- les fonctions colorimétriques $\bar{x}(\lambda)$ $\bar{y}(\lambda)$ et $\bar{z}(\lambda)$ sont positives ou nulles.
- Les luminances de $\bar{X}$ et $\bar{Z}$ sont nulles. Cette propriété implique d'après (2-3) que la luminance d'une couleur $\vec{C}$ est simplement proportionnelle à sa seule composante Y.

$$L(\vec{C}) = Y\ L(\vec{Y}) \qquad (2\text{-}4)$$

L'espace affine associé à l'espace vectoriel des couleurs s'appelle espace chromatique. $\vec{C}$ s'y représente par un "point de couleur" de coordonnées (X,Y,Z). On définit aussi les coordonnées trichromatiques de $\vec{C}$ par :

$$\begin{aligned} x &= X / (X + Y + Z) \\ y &= Y / (X + Y + Z) \\ z &= Z / (X + Y + Z) \end{aligned} \qquad (2\text{-}5)$$

Il s'agit simplement des valeurs normalisées des composantes trichromatiques X, Y, Z, $(x + y + z = 1)$. La couleur $\vec{C}$ peut alors se représenter par le triplet (x, y, Y). La projection de l'espace des couleurs dans le plan (x, y) appelé diagramme chromatique est très souvent utilisé. Ce plan contient en effet essentiellement l'information correspondant à la teinte et à la saturation alors que la troisième variable, la luminance Y, est naturellement très fortement liée à la luminosité.

La figure 2-2 représente le diagramme chromatique correspondant à l'observateur de référence CIE-1931. On y a tracé la projection des points de couleur des raies monochromatiques du visible (380 à 770 nm) appelée lieu spectral, et la projection de ceux du corps noir à différentes températures exprimées en degré Kelvin.

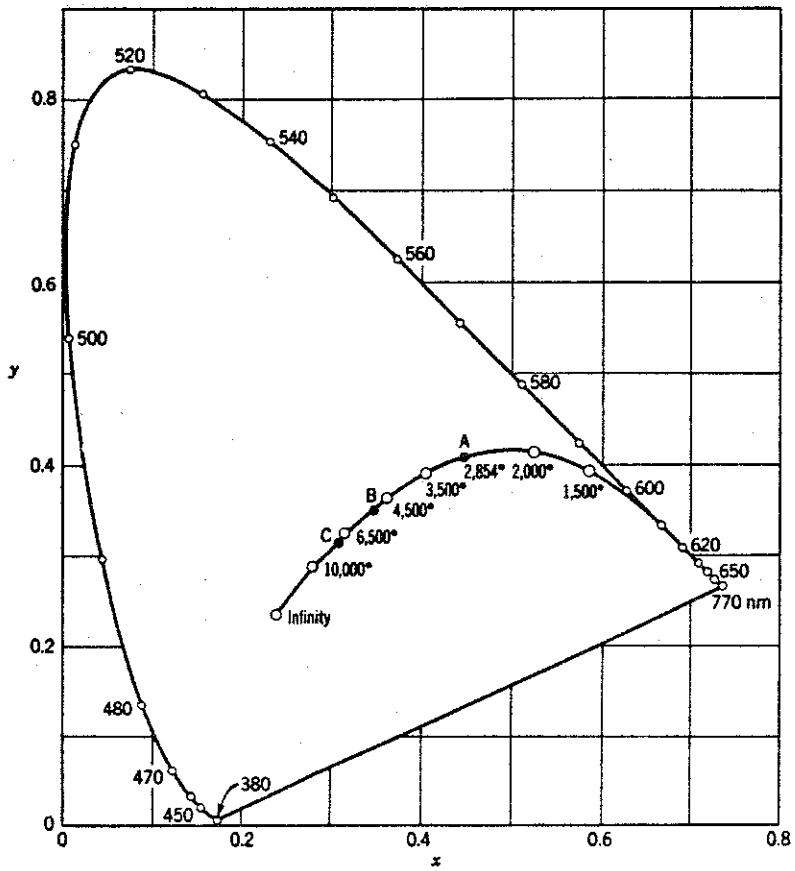


Figure 2-2 : Diagramme chromatique CIE-1931 avec représentation du lieu spectral, et du lieu du corps noir. Localisation des sources de référence A, B et C (voir paragraphe 2-2-4). (D'après réf. /5/, p. 41).

Le système de référence colorimétrique CIE-1931 a été établi avec des observations visuelles faites avec un champ de vision de 2° (angle solide correspondant à un disque d'un cm2 vu à 32 cm). Les caractéristiques colorimétriques calculées avec ce système sont en fait bien vérifiées pour des observations faites avec un champ compris ente 1° et 4°. Pour des champs supérieurs rencontrés très fréquemment dans les conditions courantes de comparaison visuelle, il a été nécessaire de faire une révision du système colorimétrique.

La C.I.E. a donc défini un observateur de référence supplémentaire, l'observateur CIE-1964, après une série de mesure faite sur un colorimètre possédant un champ angulaire de 10°. Les composantes trichromatiques, les fonctions colorimétriques et les coordonnées trichromatiques de ce nouvel observateur se notent respectivement : X_{10}, Y_{10}, Z_{10} ; $\bar{x}_{10}(\lambda)$, $\bar{y}_{10}(\lambda)$, $\bar{z}_{10}(\lambda)$; x_{10}, y_{10}. Les figures *2-3 et 2-4* permettent de comparer les diagrammes chromatiques et les fonctions colorimétriques des deux observateurs de référence de la CIE. Précisons encore que la fonction d'efficacité lumineuse relative spectrale $V(\lambda)$ est identique à la fonction $\bar{y}(\lambda)$ de l'observateur CIE-1931. C'est une conséquence directe de la manière dont a été établi cet observateur. En effet ses composantes trichromatiques spectrales n'ont été mesurées qu'en valeur relative, l'énergie des raies monochromatiques n'étant pas contrôlée. Pour obtenir leurs vraies grandeurs on a alors supposé que leur luminance, calculée à partir de celle des primaires, devait être identique à celle calculée à l'aide de la fonction $V(\lambda)$.

Par contre, il ne faut pas assimiler la fonction $\bar{y}_{10}(\lambda)$ à une nouvelle fonction de visibilité. En effet les composantes trichromatiques spectrales $\bar{r}(\lambda)$, $\bar{v}(\lambda)$, $\bar{b}(\lambda)$ de l'observateur CIE-1964 ont été déterminées directement. La courbe $\bar{y}_{10}(\lambda)$ qui en est déduite par transformation linéaire

est donc entièrement définie par les expériences d'égalisation colorimétrique. Celles-ci sont très différentes dans leur nature de celles ayant permis d'établir la courbe (λ). Rappelons d'ailleurs que les lois de Grassmann relatives aux égalisations vérifient bien les propriétés de linéarité (pour un domaine limité de luminance) alors que la loi d'Abney relative aux mesures de luminance les vérifie qu'approximativement.

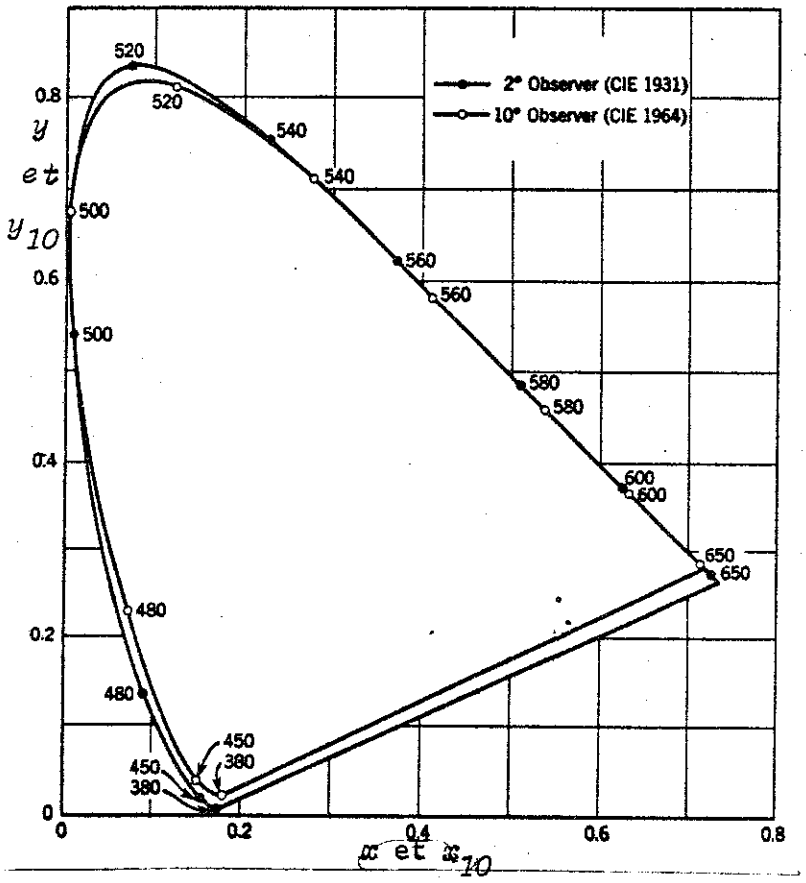


Figure 2-3 : Comparaison des diagrammes chromatiques (x,y) et (x_{10},y_{10}) des deux observateurs de référence de la CIE (d'après Réf. /5/ p. 140).

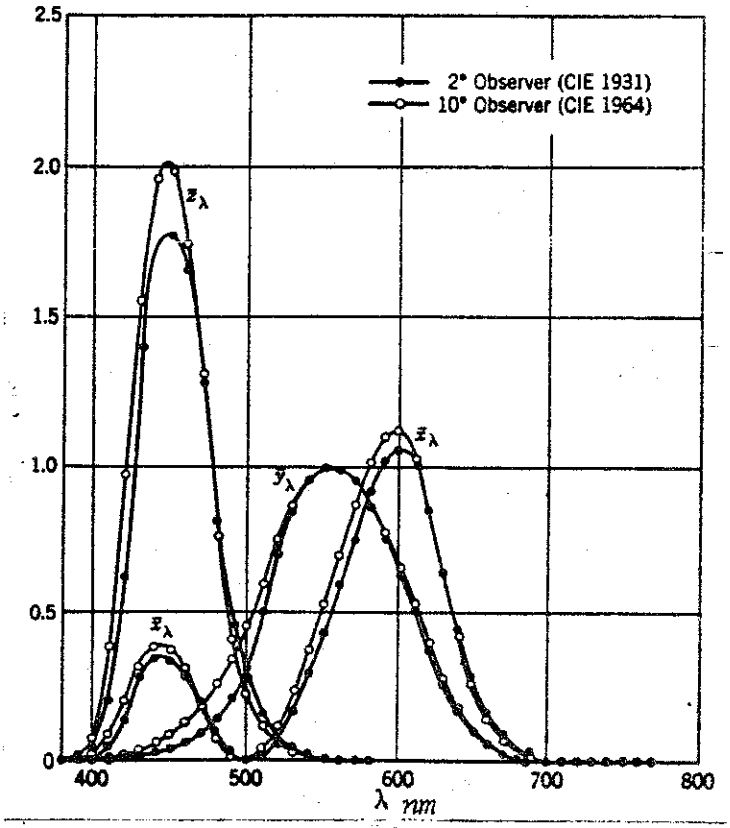


Figure 2-4 : Comparaison des fonctions colorimétriques des deux observateurs de référence de la CIE (d'après Réf. /5/ p. 139).

2-2-3 CALCULS COLORIMETRIQUES

Tout stimulus coloré parvenant à l'oeil est défini physiquement par sa répartition spectrale relative d'énergie $f(\lambda)$. Un observateur de référence étant choisi et défini par ses fonctions colorimétriques $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, $z(\lambda)$, il est possible de calculer les composantes trichromatiques X, Y, Z de ce stimulus. Cela découle des propriétés d'espace vectoriel des couleurs. Il suffit de considérer la courbe $f(\lambda)$ comme la réunion de bandes spectrales de longuer $d\lambda$ infiniment petite. D'après les propriétés de linéarité des lois de mélange des couleurs, on admettra les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} X &= k \int_\lambda f(\lambda) \quad \bar{x}(\lambda) \quad d\lambda \\ Y &= k \int_\lambda f(\lambda) \quad \bar{y}(\lambda) \quad d\lambda \\ Z &= k \int_\lambda f(\lambda) \quad \bar{z}(\lambda) \quad d\lambda \end{aligned} \qquad (2\text{-}6)$$

Dans la pratique ces intégrales se calculent avec des sommes discrètes. Elles sont définies dans le domaine du spectre visible et k est une constante de normalisation dépendant du système d'unités utilisé.

Si le stimulus coloré provient directement d'une source primaire dont la répartition spectrale relative d'énergie est $S(\lambda)$, $f(\lambda)$ se confond avec $S(\lambda)$.

Si le stimulus coloré provient de la lumière d'une source $S(\lambda)$ réfléchie (ou transmise) par un objet donné, sa répartition spectrale $f(\lambda)$ s'exprime par la relation :

$$f(\lambda) = r(\lambda) \ . \ S(\lambda) \qquad (2\text{-}7)$$

où $r(\lambda)$ est le facteur spectral de réflexion (ou de transmission) de l'objet. Les valeurs de $r(\lambda)$ sont comprises entre 0 et 1 d'après la définition même de cette fonction.

Dans tous les calculs touchant au problème de réflexion, les équations (2-6) sont habituellement normalisées en prenant :

$$k = 100 \Big/ \int_\lambda S(\lambda)\, \bar{y}(\lambda)\, d\lambda \qquad (2\text{-}8)$$

Cela revient à fixer la luminance Y à 100 pour un blanc parfaitement diffusant ($r(\lambda) = 1$ pour tout λ). Avec cette convention la valeur Y pour un objet quelconque est équivalente à son facteur de réflexion en % (rapport en unité photométrique du flux incident au flux réfléchi par l'objet).

Remarquons enfin que pour les observateurs CIE-1931 et CIE-1964, les termes sous les signes d'intégrations étant toujours positifs ou nuls, les composantes trichromatiques de tout stimulus réel sont elles aussi positives ou nulles.

2-2-4 ILLUMINANTS ET SOURCES NORMALISEES

La normalisation des caractéristiques colorimétriques nécessite la spécification d'illuminants de référence avec une tabulation précise de leur répartition spectrale relative d'énergie. Les deux principaux illuminants normalisés sont :

* l'illuminant A représentatif d'une source à incandescence dont l'émission est comparable à celle du corps noir à la température absolue de 2856°K (voir *Fig. 2-2 et 2-5)*.

* l'illuminant D_{65} représentatif de la lumière moyenne du jour avec une température de couleur proximale de 6504°K. Le terme de "température de couleur proximale" signifie ici que le point de couleur de l'illuminant D_{65}, représenté dans le diagramme chromatique CIE-1960 (voir paragraphe 2-2-6), est très voisin de celui du corps noir à la température absolue 6504°K. Comme leurs répartitions spectrales d'énergie (voir *Fig. 2-6)* sont très différentes, elles sont quasi-métamères.

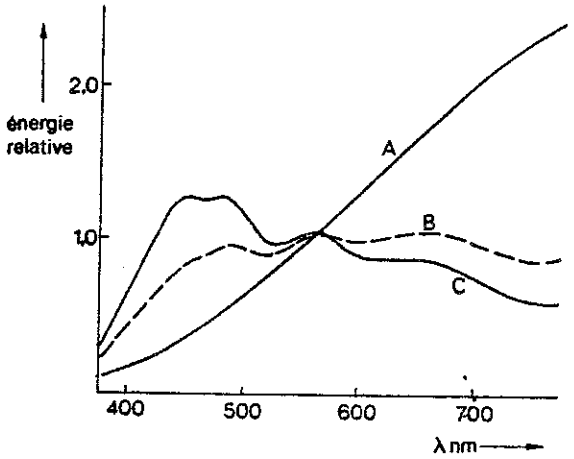


Figure 2-5 : Répartition spectrale relative d'énergie des illuminants normalisés A, B et C de la CIE d'après (réf. /9/, p. 139)

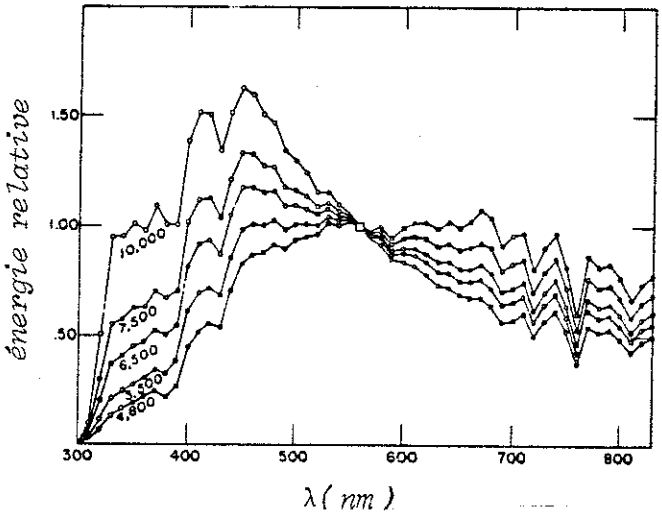


Figure 2-6 : Répartition spectrale relative d'énergie de cinq types de lumière du jour à différentes températures de couleur proximale (°K) (d'après réf. /12/ p. 10).

Il existe d'autres recommandations plus anciennes :

* l'illuminant B représentatif de la lumière directe du soleil (température de couleur proximale à 4874°K,(voir *Fig. 2-2 et 2-5)*

l'illuminant D représentatifs de la lumière du jour pour des températures de couleur proximale variant de 4000°K à 25 000°K (voir *fig. 2-6)*.

La C.I.E. a d'autre part donné des recommandations pour la réalisation de sources artificielles normalisées correspondants aux illuminants A, B et C.

2-2-5 SOLIDE DES COULEURS

Etant donné un illuminant, l'ensemble des points de couleur obtenu par réflexion ou transmission de l'éclairage sur la surface des objets constitue un volume borné dans l'espace (X, Y, Z) ou tout autre représentation classique comme l'espace (x, y, Y). Schroëndiger (1920), Rösch (1929) et Mac Adam (1935) ont démontré que les points situés à la surface de ce volume appelé solide des couleurs correspondent à des "couleurs optimales" qui sont obtenues pour une seule courbe de réflectance spectrale telle que :

$$r(\lambda) = 0 \text{ ou } 1 \text{ quelque soit } \lambda \qquad (2\text{-}9)$$

avec au plus deux transitions entre ces valeurs sur tout le domaine visible (voir *fig. 2-7)*.

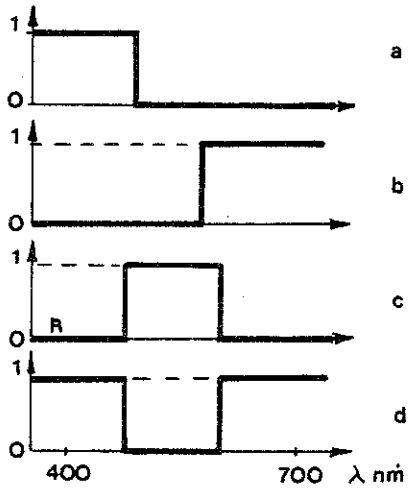
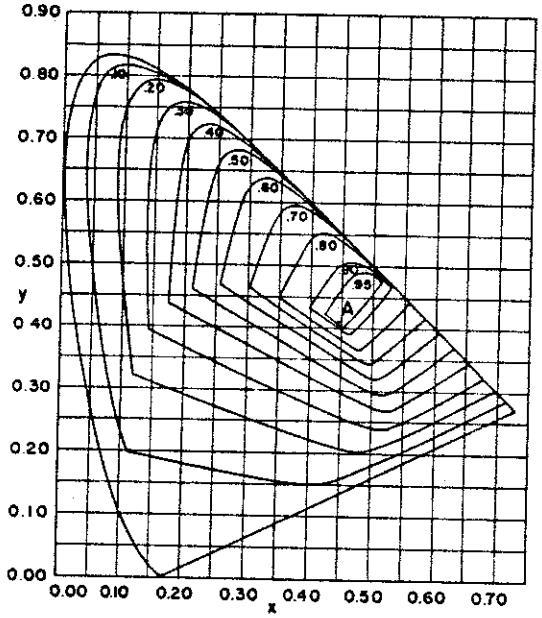
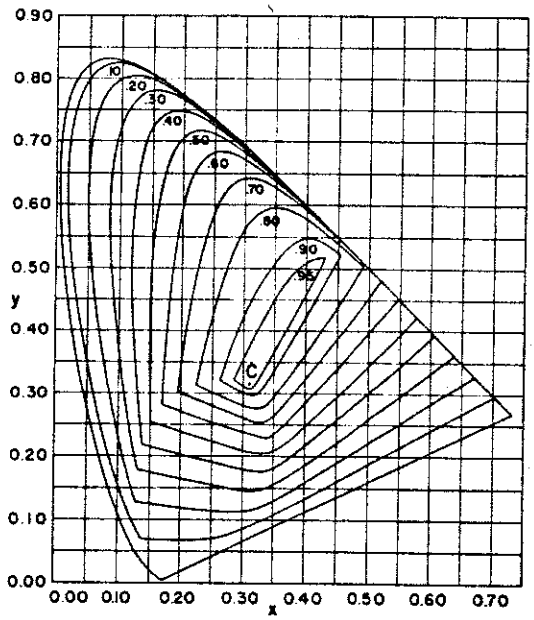


Figure 2-7 : Les quatre types de courbes des facteurs spectraux de réflexion produisant les couleurs optimales avec une transition (a et b) ou deux transitions (c et d).

Les *figures 2-8* montrent dans le plan (x,y) les limites de Mac Adam, coupes à luminance Y constante, du solide des couleurs des illuminants A et C respectivement. La *figure 2-9* donne une vue projective dans l'espace (x, y, Y) de ce dernier solide.



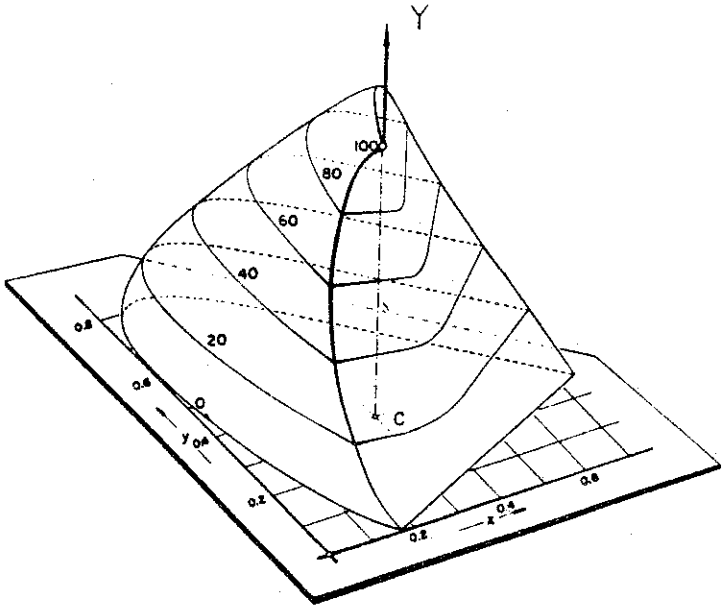
a)



b)

Figure 2-8 : Lieux chromatiques ou limites de Mac Adam dans le diagramme CIE 1931 des couleurs optimales à Y constant (10 à 95 %)
a) cas de la source A.
b) cas de la source C (d'après réf. /12/, p. 341)

Figure 2-9 : Vue projective dans l'espace (x,y,Y) des limites du solide des couleurs de l'illuminant C. (d'après réf. /12/, p. 342)



2-2-6 METRIQUE DE L'ESPACE DES COULEURS

La représentation des couleurs dans les espaces (X, Y, Z) ou (x, y, Y) n'a pas de raison à priori d'être uniforme d'un point de vue perceptif. La norme euclidienne de ces espaces n'a aucun fondement psychophysique. A priori il n'est donc pas possible de prévoir la différence de couleur qui sera perçue entre deux points si on ne connaît que leur distance euclidienne. Les expériences visuelles sur les écarts de couleurs et les seuils différentiels chromatiques le confirment parfaitement (Mac Adam 1942, Wyszecki et Fielder - 1971, Parra 1969, Dupont-Henius 1977, nombreuses références dans /8/, /12/, /17/, /18/ et /19/). L'analyse de tels

résultats doit être d'ailleurs le préambule à toute tentative d'une détermination quantitative de la métrique perceptive de l'espace des couleurs.

La résolution de ce problème n'est encore qu'incomplète et correspond à une des partie les plus difficiles de la colorimétrie. Un très grand nombre de systèmes de classification et de formule de différence de couleur ont été proposés, chacun ayant leur domaine d'application propre (Wyszecki 1972, Chassaigne 1978, réf. /9/ pp. 149-189, /12/ pp. 450-560,...)

Pour se rapprocher d'un espace uniforme et dans un souci de normalisation la C.I.E. a recommandé l'usage du diagramme chromatique UCS - 1960 (voir *fig. 2-10)* dont les coordonnées u et v s'obtiennent par transformation homographique des coordonnées x, y :

$$u = (4x) / (-2x / 12 y + 3) \; , \; v = (6y) / (-2x + 12y + 3) \qquad (2\text{-}10)$$

ou encore :

$$u = 4 X / (X + 15Y + 3Z) \; , \; v = (6Y) / (X + 15Y + 3Z) \qquad (2\text{-}11)$$

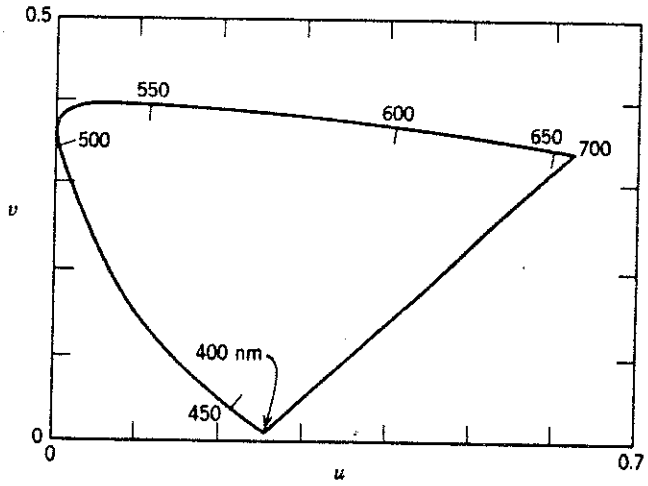


Figure 2-10 : Diagramme chromatique uniforme CIE- 1960.

En 1976 la C.I.E. a apporté une légère modification à ce diagramme en augmentant v d'un facteur multiplicatif 1.5 afin d'en améliorer la correspondance avec de nombreux résultats psychophysiques récents. Elle en a déduit un espace CIE-1976 (L^*, u^*, v^*) approximativement uniforme pour les couleur d'objet en faisant intervenir en plus des paramètres de chromaticité, le paramètre luminance (voir réf. /15/) :

$$L^* = 116\ (Y / Y_n)^{1/3} - 16$$

$$u^* = 13\ L^*\ (u' - u'_n)$$

$$v^* = 13\ L^*\ (v' - v'_n)$$

avec u' = u et v' = 1.5 v. L'indice n caractérise la couleur de surface choisie comme stimulus blanc nominal. S'il s'agit du diffuseur parfait par réflexion, on a $Y_n = 100$.

chapitre 3

CHAPITRE 3

ASPECT CONCRET DU METAMERISME ET DE SES CONSEQUENCES

Le concept du métamérisme est un un des poins fondamentaux de la colorimétrie puisque ce phénomène comme nous l'avons vu qualitativement au paragraphe 2 - 2 - 1 est à la base même de la vision chromatique. Il intervient donc dans toutes les applications techniques et industrielles concernant la couleur. Celles-ci sont importantes et touchent un très grand nombre de secteurs d'activité différents. Leur impact économique est tel qu'il est absolument nécessaire de mieux maitriser les problèmes liés au métamérisme. Cela doit se faire naturellement par une meilleure connaissance théorique du phénomène lui-même, et cet aspect fera l'objet des chapitres suivants où une méthode originale de traitement sera proposée. Mais auparavent, il nous a semblé nécessaire d'aborder le métamérisme d'une manière plus pragmatique en situant bien le sujet de notre étude dans le contexte de ses applications. Ce chapître 3 correspond donc à un exposé général sur les activités industrielles qui lui sont reliées. Certaines de ses parties correspond à une étude purement bibliographique.

3 - 1 APPLICATIONS TECHNIQUES ET INDUSTRIELLES DU METAMERISME

Un problème concret qui se pose à l'industriel et au technicien est d'ajuster les couleurs des objets qu'il fabrique ou reproduit à des couleurs de référence. Cela touche un éventail très large d'industries. Citons principalement les industries chimiques (*Pigment, colorant, teinture,

*Pigment : poudre fine sèche pratiquement insoluble dans les milieux de suspension usuels, utilisée pour son pouvoir opacifiant et éventuellement colorant

Colorant : susbstance colorée soluble ou non, au pouvoir opacifiant faible ou nul (D'après le dictionnaire Technique des Peintures de l'AFNOR)

peintures, vernis...), les industries textiles, des plastiques, l'éclairagisme, l'industrie photographique, l'imprimerie, la télévision.
Ce problème se caractérise en fait de manière très différente suivant qu'il correspond à un des trois types de domaine d'activité précisés par NICKERSON (1965) :

* L'égalité des couleurs : il s'agit d'obtenir une surface colorée (par l'emploi d'encres, peintures, colorants, vernis ou autres procédés) dont l'apparence soit indentique à une couleur prise comme référence Les spécialistes appellent souvent l'échantillon de couleur ainsi réalisé un contretype. Pour une étude approfondie de ce domaine on pourra se reporter aux ouvrages cités en références générales (réf. /5/, /8/, /13/ et /15/) et à BERGER (1977).

* La reproduction des couleurs : cela concerne tous les procédés de synthèse d'image en vraie couleur : photographie, télévision, imprimerie, sérigraphie... Le problème de l'ajustement des couleurs est rendu ici particulièrement difficile par l'aspect très subjectif de leur apparence. HUNT (réf. /14/) différencie six types de reproduction de la couleur ce qui illustre bien ces difficultés : la reproduction de la couleur peut être soit spectrale ; colorimétrique, exacte, équivalente, correspondante ou préférée !

* Le rendu des couleurs d'objet : il permet de mesurer l'influence d'une source artificielle sur l'apparence des couleurs de surface. Ceci correspond à un important problème de l'éclairagisme et intervient notamment pour le contrôle des couleurs.

Dans les deux premiers domaines les techniques consistent à manipuler des matériaux qui modifient les caractéristiques colorimétriques de la lumière qu'ils reçoivent. Il faut donc contrôler les paramètres physiques qui agissent sur cette lumière d'éclairage et qui sont les courbes des facteurs spectraux de réflexion ou transmission des matériaux utilisés. La télévision joue un rôle un peu particulier car pour elle, il s'agit de contrôler l'émission de phosphores qui sont bombardés par un faisceau d'électrons.Dans le troisième domaine, le centre d'intérêt

est la source d'éclairage elle-même et la préoccupation des techniciens va se reporter sur sa courbe d'émission spectrale.

Nous allons voir à présent plus particulièrement le problème de l'égalisation des couleurs. C'est certainement dans ce domaine que le phénomène du métamérisme est le plus crucial et qu'il est le plus aisé d'en apprécier l'importance par la diversité des conséquences qu'il implique. Nous allons indiquer les différentes étapes qu'il faut franchir avant de parvenir à un bon contretype.

3-1-1 FORMULATION DES RECETTES

Le problème est donc pour l'industriel d'obtenir une surface colorée dont la courbe des facteurs spectraux de réflexion combinée à une source d'éclairage bien spécifiée produira une sensation coloré identique à la couleur de référence imposée par son client.

La première solution que tente systématiquement l'industriel est de reproduire une courbe de facteurs spectraux de réflexion pour son échantillon d'essai qui soit identique à celle de l'échantillon de référence fourni par le client. S'il y parvient il aura obtenu l'égalité isomère entre sa couleur et celle de référence, ce qui le met à l'abri de toute contestation sur la fidélité de couleur de son produit. Pour parvenir à cet isomérisme il ne dispose pratiquement que d'un seul moyen qui est d'utiliser des pigments ou colorants qui soient identiques à ceux utilisés dans l'échantillon de référence. Cela suppose qu'on lui ait précisé quelle était la nature de ces produits -ce qui n'est pas forcément le cas- ou qu'il soit parvenu à les déterminer après analyse spectrophotométrique et recherche automatique sur calculateur. Malheureusement, l'emploi de pigments identiques est la plupart du temps impossible car les matériaux des surfaces à traiter ne sont pas forcément les mêmes que ceux du client : les pigments ou colorants utilisés dans les industries plastiques ne sont pas les mêmes par exemple que ceux utilisés dans les industries des peintures ou des textiles. Des problèmes de coût

peuvent aussi intervenir et obliger l'abandon d'un pigment qui conviendrait fort bien au profit d'autres moins coûteux. Ces contraintes imposent alors souvent la réalisation d'une égalisation qui soit simplement métamère avec l'échantillon de référence. Cette solution risque d'introduire quelques inconvénients d'ordre perceptif sur lesquels nous reviendrons plus tard.

Mais que ce soit pour une égalisation de couleur aussi bien isomère que métamère, il faut déterminer la nature des pigments qui vont intervenir dans le mélange et leurs proportions : c'est la formulation des recettes. Il existe deux techniques assez autogonistes :

* La plus ancienne est celle de toute une profession, les coloristes, qui après un long apprentissage sont capables avec de simples observations visuelles de l'échantillon de référence de déterminer la recette d'un mélange métamère ou même isomère dans certaines occasions. Ils disposent, en plus de leur grande expérience, de méthodes de contrôle du métamérisme consitant en des ajustements visuels successifs (LONGLEY - 1976). L'avantage de cette technique est d'être rapide et peu couteuse. Inversement elle n'est pas très fiable ; des facteurs humains très importants comme la fatigue ou l'état de santé peuvent fausser les observations visuelles.

* La technique moderne utilise le calcul automatique pour déterminer les recettes. Les programmes s'appuient sur les modèles d'intéraction de la lumière et de la matière dans les milieux diffusants (turbid médium) où il y a diffusion et absorption (théorie de KUBELKA-MUNK ou celle plus générale de MIE) (voir réf. /8/, GALL - 1971, 1973, KUEHNI -1975, ALLEN - 1977, CHASSAIGNE - 1978). Ces programmes prennent en compte les courbes de densité spectrale des pigments qui sont disponibles pour les milieux de support utilisés. On peut aussi exploiter d'autres paramètres comme leur résistance à différents agents chimiques ou physiques ainsi que leur prix de revient. L'avantage de cette technique est d'être précise, optimisée, reproductible, fiable ce qui est essentiel lorsque des tonnes de matières premières sont en jeu. L'inconvénient est son coût en temps de calcul relativement élevé.

3-1-2 CONTROLE DES COULEURS

L'étape de la formulation de la recette ayant été franchie, on fabrique un premier échantillon d'essai qui très certainement ne va pas présenter une égalisation de couleur parfaite avec la référence. Un contrôle est donc nécessaire et de là éventuellement une correction de la formulation de la recette.

Le moyen le plus objectif, le plus précis de contrôler la couleur est de faire une analyse spectrophotométrique de l'échantillon d'essai pour obtenir sa courbe des facteurs spectraux de réflexion à partir de laquelle sont calculées automatiquement les composantes trichromatiques, un observateur et un illuminant de référence ayant été choisis en accord avec le demandeur.

Dans le cas où on a tenté de faire une égalisation de couleurs isomères, les écarts éventuels entre les deux courbes spectrales sont caractéristiques et procurent surtout la perception d'une différence de luminosité alors que la teinte et la saturation sont en général sensiblement équivalente. Dans ce cas, l'oeil est un excellent juge, rapide, précis et peu onéreux qui déterminera si l'isomérisme est obtenu ou non. Au lieu d'un contrôle visuel on peut aussi faire des mesures simplifiées avec les colorimétres trichromatiques à cellules photoélectriques. Dans le cas d'une égalisation de couleur métamères, les écarts entre les spectres sont plus complexes et des différences simultanées de luminosité, teinte et saturation peuvent être perçues. Dans ce cas l'expérience montre que les observations visuelles sont très incertaines. Les avis différent suivant les observateurs même s'ils ont tous une vision normale et suivant les sources d'éclairage utilisées. Nous reviendrons sur ces points très importants. Les méthodes spectrophotométriques s'avèrent être dans ce cas vraiment indispensables.

Cependant, après la période des essais et corrections successives qui permettent d'aboutir à la formulation d'une recette satisfaisante, le contretype obtenu correspond exactement aux spécifications du client. Au niveau de la production on peut l'utiliser comme référence

Si des variations de couleur se produisent, elles seront du type isomère avec ce contre type. Des techniques de contrôle par tests visuels ou par colorimétres trichromatiques peuvent alors suffire.

3-1-3 MULTIPLICITE DES SOLUTIONS METAMERES

Nous avons vu dans le premier chapitre la vérification expérimentale de la trivariance visuelle. Celle-ci permet de réduire l'infinité des paramètres physiques d'un stimulus coloré (les valeurs en chaque longueur d'onde de sa courbe de répartition spectrale d'énergie) à seulement trois paramètres. En théorie donc il existe une infinité de stimulus physiquement différents qui provoquent la même sensation de couleur, et qui sont indiscernables pour le système visuel. Tous ces stimulus constituent un ensemble de fonctions métamères. Ceci va se réprésenter par l'existence d'un grand nombre de solutions différentes au problème d'égalisation ou de reproduction des couleurs. C'est bien ce que l'on constate en pratique grâce à la diversité des pigments et colorants disponibles qui augmentent les possibilités de formulation des recettes, à la diversité des couches utilisables pour les émulsions photographiques couleur ou celle des encres pour les impressions quadrichromes ou encore celle des phosphores exploitables pour les tubes cathodiques de la télévision ou pour les lanpes fluerescentes...

Il y a donc un choix à faire et pour cela il faut se donner un certain nombre de critères qui peuvent être d'ordre économique, d'ordre technique (résistance aux agents chimiques, physiques...) ou d'ordre colorimétrique.

Le choix d'une solution optimale est un problème très important aussi bien dans le domaine de l'égalisation que celui de la reproduction des couleurs. Il est bien sûr impossible (et inutile) de comparer expérimentalement toutes les solutions techniquement réalisables pour déterminer quelle en est la plus performante. Mais il existe une alternative qui consiste à rechercher par le calcul numérique des fonctions métamères solutions et de procéder alors, toujours par le calcul, à des simulations qui remplaceront les expériences de comparaison qui font défaut.

L'étude théorique des ensembles de métamères que nous présentons

au prochain chapitre nous conduira à la proposition d'une méthode originale de génération des fonctions métamères dont nous comparerons les possibilités avec celles des méthodes antérieures.

Mais, revenons aux critères d'ordre colorimétrique. Le recours à une égalisation métamère n'est pas sans inconvénient car cette égalisation n'est effective en toute rigueur que dans des conditions bien définies. Les conséquences d'une modification de ces conditions sont analysées dans la prochaine partie.

3-2 LIMITATIONS DÛES AU METAMERISME

Le métamérisme entre deux échantillons de couleur dépend de l'observateur qui fait la comparaison et dépend de la nature de la source d'éclairage. Ces "conditions d'observation" peuvent être modifiées dans différents types de situations que nous analyserons rapidement au paragraphe 3-2-1. Cette modification entraine la disparition du métamérisme et la perception d'une différence de couleur entre les deux échantillons qui peut être importante et donc gênante dans un certain nombre de situations concrètes. Ce phénomène doit être obligatoirement pris en compte en pratique et l'industrie pour essayer de le contrôler a développé un très grand nombre d'indices différents qui lui servent de critères et que nous présentons en 3-2-2. Ces indices sont en fait très spécifiques. Il proviennent de méthodes très empiriques et ne permettent pas d'obtenir une compréhension globale de la disparition du métamérisme.

Une autre approche plus récente se révèle être beaucoup plus puissante. Elle permet d'étudier la disparition du métamérisme simultanément pour tous les éléments d'un ensemble de fonctions métamères. Cela est rendu possible par la détermination du volume des inégalités chromatiques que nous définissons en 3-2-3 et dont l'étude complète est l'objet du châpitre 5.

Mais avant de poursuivre il est nécessaire de mieux préciser quelles peuvent être les conséquences d'une modification des conditions

d'observation. Ces conséquences se situent à deux niveaux :

* Prenons un objet dont la couleur à la lumière du jour soit par exemple un turquoise. Si on change de type d'éclairage, on va en général constater un virage de la teinte. Une lampe à incandescence donnera à l'objet un aspect plus verdâtre alors qu'une lampe fluorescente lui procurera certainement une dominante plus bleutée. C'est un problème qui peut se poser à des ingénieurs chimiste (BROCKES - 1968) à qui on demande de reproduire une teinte mode, cette teinte devant conserver une apparence identique quelque soit l'éclairage. Ce problème de "constance de couleurs" est en fait excessivement complexe. Il est relié à différents phénomènes perceptifs comme l'adaptation chromatique, le contraste simultané, la mémoire des couleurs. ... Il est encore actuellement impossible d'en contrôler tous les paramètres. Sa relation avec le métamérisme n'est pas évidente. Notre étude n'aborde pas ce type de problème, mais toutefois la détermination du volume des inégalités chromatiques pour laquelles nous proposons une méthode très adaptée (Ch. 5) permet de résoudre le problème inverse -c'est à dire la prévision des écarts de couleurs extrêmes qui peuvent être obtenus pour un objet lorsqu'on change d'illuminant. Ce changement étant d'ailleurs la cause unique de la modification de teinte, on conçoit que ce problème concerne en définitive plus l'éclairagisme que les industries pratiquant les égalisations de couleur. On indiquera en 3-2-2-2 comment s'effectue l'étude du rendu des couleurs des sources lumineuses qui est un important problème pratique.

* Le deuxième type de conséquences d'une modification des conditions d'observation se situe à un niveau moins cognitif de la perception. Il nous concerne directement. Prenons deux objets dont les couleurs soient métamères sous la lumière du jour et comparons les sous l'éclairage d'une source artificielle. Comme précédemment, on constate surtout le <u>disparition de leur égalité chromatique</u> : le métamérisme entre les deux objets a été détruit par l'emploi d'une autre source d'éclairage. Ce phénomène peut naturellement se produire aussi si le changement est relatif non pas à l'illuminant mais à un des paramètres liés à l'observateur (si ce n'est à l'observateur lui-même). Ce problème est en fait celui qui se pose constamment en égalisation des couleurs : la teinte à reproduie est celle de produits déjà existants en décoration en habillement, en automobile... etl'objet à manufacturer sera vu côte

à côte avec eux et cela sous différent type d'éclairage. On comprend alors bien la nécessité pour l'industrie d'évoluer les risques de désaccord suivant les modifications des conditions d'observation.

3-2-1 MODIFICATIONS DES CONDITIONS D'OBSERVATION

Considérons un observateur qui constate dans une scène réelle que la couleur de deux objets de nature très différente est la-même. Cela signifie que pour ces deux objets vus dans les conditions d'observation présentes, les composantes trichromatiques X Y Z déterminées par les équation (2-6) et (2-7) sont identiques. Dans ces équations il n'y a que les facteurs spectraux de réflexion $r(\lambda)$ qui dépendent des objets eux-mêmes. Toutes les autres données déterminent ce que l'on a déjà appelé "les conditions d'observation" : les fonctions colorimétriques de l'oservateur $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, $z(\lambda)$ et la répartition spectrale d'énergie $S(\lambda)$ de la lumière qui éclaire la scène.

Nous avons vu que tout changement d'éclairage modifiant la courbe $S(\lambda)$ provoque en général la disparition du métamérisme. Cela se produit pour la lumière du jour prise à différentes heures, différentes latitudes ou dans différentes conditions météréologiques (ciel bleu, nuages, brumes...) ou lorsqu'on utilise différents types de sources de lumière artificielles (voir *fig. 2 - 5 et 2 - 6.*)

Les conséquences vont être identiques avec une modification des fonctions colorimétriques. Les causes de celle-ci sont un peu plus complexes et se classent en trois catégories (WYSZECKI - 1959). Soient $\bar{x}_a(\lambda)$ et $\bar{x}'_a(\lambda)$ (a = 1 à 3) les deux ensembles de fonctions trichromatiques spectrales que l'on désire comparer :

1°) Ils peuvent correspondre à un même observateur mais à un choix différent de couleurs primaires. Ils se déduisent l'un de l'autre par une simple transformation linéaire comme nous l'avons indiqué au paragraphe 2-2-2 :

$$\bar{x}'_a(\lambda) = \sum_{j=1}^{3} c_{a,j} \; \bar{x}_j(\lambda) \qquad (a = 1 \text{ à } 3)$$

où les $c_{a,j}$ sont des constantes.

Ce cas a peu d'intérêt pour nous ici puisqu'il ne correspond pas à une modification de sa représentation mathématique.

2°) Les fonctions colorimétriques peuvent se déduire les unes des autres par un même filtrage spectral (λ) :

$$\bar{x}'_a(\lambda) = \tau(\lambda) \cdot \bar{x}_a(\lambda) \quad , \quad (a = 1 \text{ à } 3)$$

C'est le cas pour un observateur qui porte ou non des verres teintés. On admet que c'est aussi le cas lorsqu'un observateur fait ses comparaisons visuelles avec des champs de faible ($\leqslant 4°$) ou fort ($\geqslant 10°$) degré angulaire. Dans ce dernier cas, s'il observe une plage de couleur uniforme, il peut apercevoir une légère variation de couleur au centre de son champ visuel, appelée tache de MAXWELL. Celle-ci correspond à la pigmentation de la macula entourant la fovéa dans la partie centrale de la rétine. JUDD et GRANDVILLE (1939) ont fait des tests psychophysiques avec des échantillons métamères spécialement conçus pour vérifier si les différences de perception constatées avec des champs de petite ou grande dimension ne seraient pas dûes essentiellement à ce filtrage. Enfin, des observateurs de sensibilités chromatiques identiques mais d'âge différents se ramèneraient aussi à ce cas. Il est bien connu que le cristallin dont les cellules ne se régénèrent pas, jaunit de plus en plus au fur et à mesure que l'individu vieillit .

3°) Dans le cas général nous avons des fonctions colorimétriques pour lesquelles n'existent aucune correspondance simple. Il faut alors utiliser plusieurs fonctions spectrales de conversion :

$$\bar{x}'_a(\lambda) = \sigma_a(\lambda) \cdot \bar{x}_a(\lambda) \qquad (a = 1 \text{ à } 3)$$

Nous sommes dans cette situation si on veut comparer :

- Les réponses des cellules photoélectriques filtrées utilisées dans les colorimétres trichromatiques.

- Les fonctions colorimétriques d'observateurs réels comme ceux ayant participés aux expériences de STILES et BUSCH (1959) et SPERANKAYA (1959), qui sont à l'origine de l'observateur CIE - 1964. WYSZECKI et STILES (réf /12/, pp. 425-435) ont publié les données correspondant à vingt d'entre eux.

- Les fonctions colorimétriques d'observateurs fictifs comme celles des observateurs de référence CIE-1931 (2°) et CIE - 1964 (10°) obtenues par moyenne statistique. Ces deux observateurs correspondent bien aux visions couleur pour petits et grands champs comme le montre leur bonne corrélation avec les résultats des test psychophysiques (STROCKA et BROCKES - 1969). Ils ne se déduisent cependant pas l'un de l'autre par simple filtrage comme nous pourrions le penser après ce qui a été indiqué précédemment sur les modifications des fonctions colorimétriques rentrant dans la deuxième catétorie. Ces observateurs ne correspondent pas à des individus réels mais sont l'émanation de résultats statistiques obtenus sur des échantillons de population distincts et par des techniques et des méthodes différentes.

3-2-2 CRITERES DEVELOPPES PAR L'INDUSTRIE

Dans le domaine de la reproduction des couleurs par exemple, il a été nécessaire de développer des critères pour pouvoir comparer les différentes variantes d'un système suivant la qualité visuelle de leurs résultats. Des indices de qualité basés sur des différences de couleur perçues ont ainsi été établis pour un certain nombre de situations précises : inspection visuelle des couleurs, technique dans les studios de télévision, de photographie... (MÜNSCH - 1969).

Dans le domaine de l'éclairagisme, le choix du type de source artificielle est en général fait selon des critères de qualité de rendu des couleurs qui se calculent selon les indices décrits en 3-2-2-2.

Dans le domaine de l'égalisation des couleurs, l'idéal est d'obtenir un accord parfait entre l'échantillon de référence et le contretype quelles que soient les conditions d'observation. Il faudrait théoriquement obtenir une égalisation isomère. On le constate bien lorsqu'on utilise des programmes de formulation de recette pour déterminer un contretype qui soit métamère pour plusieurs conditions d'observation. Plus le nombre de conditions augmente (mais difficulté croissante dans la résolution numérique) et plus les contraintes sur la courbe des facteurs spectraux de réflexion se ressèrent vers une solution isomère. La réalisation de ce contre type isomère n'est souvent pas possible (§ 3-1-1) et on doit se contenter d'une égalisation métamère. Mais parmi tous les contretypes métamères réalisables il est nécessaire de choisir un de ceux qui donnera le plus de satisfaction, c'est à dire la perception minimum d'une différence chromatique avec la couleur à reproduire sous différents éclairages et pour le plus grand nombre d'observateurs. Intuitivement on sent bien que la meilleure solution de rechange à l'isomérisme sera le contretype dans la courbe des facteurs spectraux de réflexion s'en écarte le moins et dont le "degré de métamérisme" est assez faible.

La nécessité de déterminer un critère objectif indiquant si le degré de métamérisme entre deux couleurs d'objet est fort ou faible a conduit l'industrie à établir empiriquement un grand nombre d'indices de métamérisme divers. La C.I.E. doit les comparer et les tester afin d'en proposer des recommandations dans un souci d'uniformisation.

3-2-2-1 INDICES DE METAMERISME

Nous présentons dans cette partie une synthèse assez technique des divers indices de métamérisme qui ont pu être développés. Il faut cependant bien préciser que ces indices répondent à un problème très concret qui est la comparaison des couleurs de deux objets particuliers. Les méthodes de traitement du métamérisme qui constituent la partie originale de notre étude sont des méthodes globales et sont

donc peu concernées par ce problème. On reprécisera ce point plus en détail en 3-2-3.

a) *Indices généraux calculés sans référence à la métrique de l'espace des couleurs*

L'indice de métamérisme le plus général qu'on puisse imaginer est le vecteur multidimentionnel dont les composantes représentent les écarts entre les courbes de réflexion des deux objets sur chaque intervalle de longueur d'onde. JUDD et WYSZECKI (1963) proposent comme indice la norme quadratique de ce vecteur. Constatant que c'est en fait donner là une importance trop élevée pour les valeurs correspondant aux extrémités du spectre, ils proposent d'utiliser une courbe de pondération comme la sensibilité spectral $y(\lambda)$ de la CIE - 1931. NIMEROFF et YUROW (1965) proposent une amélioration supplémentaire en calculant trois normes distinctes du vecteur pondéré respectivement par les fonctions colorimétriques $\bar{u}(\lambda)$, $\bar{v}(\lambda)$, $\bar{w}(\lambda)$ correspondant au diagramme de chromaticité uniforme de la CIE-1960. L'indice s'exprime alors comme la moyenne quadratique de ces trois normes. MORADIAN, COATES et RIGG (1977) ont montré par le calcul et par des tests visuels que cet indice a un bon coefficient de corrélation avec l'écart de couleur maximum qui est perçu entre deux échantillons métamères vus sous des éclairages différents. En fait NIMEROFF et YUROW précise que la méthode la plus simple pour mesurer le degré de métamérisme de deux échantillons est d'estimer par un nombre suffisant d'observateurs la différence de couleur qu'ils percoivent après la modification des conditions d'observation, puis d'en faire la moyenne. Mais cela nécessite de fabriquer les échantillons et de faire les tests visuels.

b) *Indices se référant à la métrique de l'espace des couleurs*

Cette idée de NIMEROFF et YUROW est à l'origine d'un autre type d'indice proposé par JUDD et WYSZECKI (1963, p 153) : "Le degré de métamérisme entre deux objets qui sont métamères pour une source et un observateur de référence est spécifié par leur différence de couleur ΔE

obtenue , après changement de la source, de l'observateur ou des deux simultanément ; la différence ΔE étant exprimée avec une unité de mesure adéquate".

Cette définition implique qu'il faut définir spécifiquement des indices d'illuminant et des indices d'observateurs qui vont correspondre à des situations concrètes différentes suivant que l'intérêt est porté sur les variations de l'éclairage (métamérisme d'illuminant) ou celles des observateurs (métamérisme d'observateur)

Il faut alors se définir :

. la source et l'observateur de référence

. la source ou l'observateur d'essai conduisant à la disparition du métamérisme.

. la formule de différence de couleur qui doit être une de celles couramment recommandée par la CIE.

* Pour l'indice spécial d'illuminant , la CIE (1972) recommande comme référence l'utilisation de l'illuminant D_{65} et de l'un de ses deux observateurs, et comme illuminant d'essai l'illuminant A ou trois autres (F_1, F_2 et F_3) représentant les rayonnements de lampes fluorescentes typiques. BROCKES (1969-1970) vérifia que dans de nombreux cas pratiques, il était suffisant d'utiliser deux illuminants d'essai comme A et F_1 pour avoir une bonne approximation du degré de métamérisme.

* Un indice spécial d'observateur est à l'étude. Si on est concerné par les modifications des conditions d'observations dûes à un changement du champ angulaire, on peut utiliser comme observateur de référence et d'essai les observateurs CIE - 1931 (2°) et CIE-1964 (10°)

c) *Développement des indices d'observateur*

On s'intéresse de plus en plus à la variabilité entre observateurs car on s'aperçoit dans la pratique que , si une égalisation métamère est réalisée par un individu (le coloriste) ou par un observateur fictif (celui utilisé dans le calcul), le désaccord est d'autant plus fréquent et important avec d'autres observateurs réels (comme les clients) que le degré de métamérisme est élevé. Une simulation par l'emploi des deux obser-

vateurs de la CIE s'avérerait inutil car ceux-ci ne comportent aucun renseignement sur cette variabilité. Il faut donc utiliser des données relatives à des observateurs réels ayant expérimenté dans des conditions identique le calcul des 20 différences de couleur E que l'on peut obtenir en prenant l'observateur CIE-1964 comme référence et chacun des 20 observateurs réels comme observateurs d'essai et dont ils ont publié les fonctions colorimétriques. Cette méthode de calcul assez élaborée n'a été qu'assez rarement mise en pratique (BROCKES - 1969, STROCKA - 1977) a montré qu'on pouvait réduire l'ensemble des 20 observateurs à 2 d'entre eux judicieusement choisis pour être très représentatif des variations par rapport à la moyenne de l'ensemble. Adoptant cette moyenne comme observateur de référence et ces deux observateurs comme observateurs d'essai, il calcule les 2 différences de couleur E correspondantes et définit en les moyennant un nouvel indice de métamérisme.

d) *Approche statistique de la variabilité entre observateur*

* MIMEROFF, ROSENBLATT et DANNEMILLER (1962) proposent un système d'observateur de référence complet en calculant, à partir des données sur tous les observateurs réels à l'origine de l'observateur CIE -1964, les variances intra et inter individus ainsi que les covariances entre les composantes trichromatiques spectrales. ALLEN (1969, 1969b) détermine quant à lui un "observateur de déviation standard" plus commode à partir des 20 observateurs de WYSZECKI et STILES. Cela lui permet de réduire les 20 ΔE à un seul indice de métamérisme. Il ne prend pas en compte les variances intra-individus qui sont plus faibles et qui ne l'intéressent pas puisqu'il considère les différences entre observateurs. Les fonctions colorimétriques de cet observateur de déviation standard représentent les écarts quadratiques moyens des fonctions colorimétriques des observateurs réels par rapport à l'observateur de référence. Mais elles prennent des valeurs positives et négatives car ALLEN tient compte de toutes les corrélations entre les différentes parties du spectre et entre elles. On en déduit alors pour une paire de couleurs métamères trois quantités ΔX_a (a = 1 à 3) qui représentent l'écart quadratique moyen des dif-

férences des composantes trichromatiques entre les deux échantillons pour un groupe d'observateurs normaux. De là on peut calculer par une formule de différence de couleur l'indice spécial de métamérisme.

* Citons aussi l'opinion assez fréquemment exprimée que le métamérisme d'observateur serait assez bien représenté par le métarisme d'illuminant (HEMMENDIGER et BOTTINGER - 1977) . Les différences perçues seraient comparables à celles observées lorsqu'on passe d'une source de forte température de couleur proximale comme D_{65}(6500 K) à une autre source plus froide comme A(2854 K). Mais ce résultat est contesté (STROCKA - 1977).

L'étude de la variabilité entre observateurs et ses conséquences est un des domaines actuellement très actif de la colorimétrie. Mais il est indispensable d'accroitre le nombre de données fondamentales sur les fonctions colorimétriques des observateurs réels et de déterminer plus précisément les causes de leurs variabilités. Pour cela il faut souligner l'importance du développement de nouvelles expériences comme celles de VIENOT (1979, 1977).

3-2-2-2 INDICES DE RENDU DES COULEURS

Dans les conditions d'observation définissant le métamérisme ou sa disparition, le type d'éclairage joue un rôle prépondérant. D'autre part, c'est lui aussi qui conditionne l'apparence colorée des objets La qualité du rendu des couleurs est donc un problème important pour les sources artificielles et nous allons résumer les méthodes classiques de le traiter. Mais précisons dès à présent qu'on indiquera en 3-2-3 une nouvelle approche beaucoup plus générale et qui est accessible grâce à nos méthodes particulières du traitement du métamérisme.

Les premiers tubes fluorescents avaient un rendement (ou efficacité lumineuse) remarquable, mais un rendu des couleurs déplorable (JUDD et WYSZECKI (réf. /8/) citent l'exemple de la viande fraichement coupée dont l'aspect sombre et désaturé sous cet éclairage décourageait plus d'un acheteur). Ceci était dû à la très forte dissemblance du spectre de cette source avec celui de la lumière du jour

comme l'illuminant D_{65}, notamment à la présence des raies d'émission du mercure. Les fabricants ont donc été amenés à produire de nouveaux types de sources de meilleure qualité en essayant d'obtenir un spectre plus proche de celui de D_{65} et en utilisant des indices de rendu des couleurs. HALSTEAD (1977) a fait un excellent exposé de cette longue évolution.

* Une première catégorie d'indice(WYSZECKI - 1970) est constituée en fait par des indices de métamérisme calculés à partir des différences spectrales entre la source d'essai et D_{65}, comme ceux que nous avons vu précédemment. Il existe d'ailleurs des normes de tolérance sur les spectres comme en Angleterre où les écarts avec D_{65} ne doivent pas être supérieurs à 15 %. Mais une contrainte supplémentaire doit être rajoutée sur la chromaticité de la source pour s'assurer d'un bon rendu des couleurs comme le montre les résultats de OHTA et WYSZECKI (1976).

Mais il n'est pas nécessaire de ne construire que des lampes spectralement proches de D_{65} . JEROME (1976) indique en effet trois carégories d'éclairage suivant son utilisation :

1) pour une bonne discrémination des contrastes noir/blanc, les lampes fluorescentes peuvent suffire.

2) pour une examination critique des objets colorés (contrôle, inspection...) des sources proches de D_{65} sont conseillées.

3) reste l'éclairage courant où l'on désire avoir pour un légitime confort une bonne appréciation des couleurs.

* Lorsqu'on parle actuellement du rendu des couleurs d'une source lumineuse, on pense en général à son effet sur l'apparence colorée des objets. C'est à dire qu'on fait mentalement une comparaison avec une couleur "vraie" qui serait mémorisée (OUWELTJES - 1973). Ces couleurs sont certainement obtenues avec l'éclairage le plus naturel qui soit : la

lumière du jour. Mais la température de couleur de cet éclairage varie et la vision s'y adapte. C'est pourquoi lorsqu'une source artificielle n'a pas la même température de couleur que D_{65} il faut considérer comme source de référence la lumière du jour dont la température proximale soit la plus voisine. Si celle-ci est inférieure à 5000°K, on prend alors le spectre du corps noir à la température correspondante.

La CIE (1974) recommande de calculer un indice de rendu des couleurs à partir de la différence chromatique ΔE qui est perçu lorsqu'un objet est placé sous chacune des deux sources.Il faudrait théoriquement envisager toutes les couleurs d'objet possibles. Mais, en pratique, la CIE propose 8 couleurs désaturées, choisies parmi les échantillons de l'atlas MUNSELL (voir Réf. /5/ à /12/), dont on calcule 8 indicesparticuliers. Leur moyenne R_a s'appelle l'indice général de rendu des couleurs. KOWALISKI (réf. /9/) donne les détails de la méthode de calcul. Cette limitation à 8 couleurs d'objet n'est pas sans inconvénients.OHTA et WYSZECKI (1956b) ont montré que même si une source avait son indice général R_a parfait, il était possible de constater pour d'autres couleurs une mauvaise restitution de leur apparence. La CIE a cependant conseillé pour des cas spéciaux 6 couleurs supplémentaires dont 4 très saturées.

Bien sûr de nombreux tests visuels ont été faits et doivent être encore faits pour contrôler et comparer tous ces indices et en estimer les tolérances pour le rendu des couleurs (MORLEY et co. - 1973, HALSTEAD - 1969).

Indiquons enfin la mise au point actuelle d'un indice de préférence de couleur (JEROME- 1976). On cherche alors à ce que les sources restituent non plus les couleurs réelles de référence, mais plutôt leurs apparences préférées qui correspondent en général à des couleurs plus saturées. La teinte chair est certainement la couleur pour laquelle le jugement est le plus critique. Elle permet souvent de juger si le réglage d'un système de reproduction est correct ou non.

3-2-3 LE VOLUME DES INEGALITES CHROMATIQUES

Nous avons vu qu'il existe une infinité de stimuli différents qui peuvent être métamères. Ils se représentent tous dans l'espace colorimétrique par un même point de couleur de composante trichromatique $X_oY_oZ_o$ (voir *Fig. 3 - 1a)*. Si les conditions d'observation changent, on va voir apparaître des différences de couleur. Les points de couleur des fonctions métamères se dispersent dans l'espace colorimétrique à trois dimensions et forment un volume que nous appelons "volume des inégalités chromatiques" de l'anglais "color mismatch volume", dans le même esprit que KOWALISKI (réf. /9/, p. 87).Nous le noterons V (voir *Fig. 3-1b)* Nous démontrerons au chapître 5 que ce volume est borné et convexe et nous y indiquerons les différentes méthodes pour déterminer ses limites.

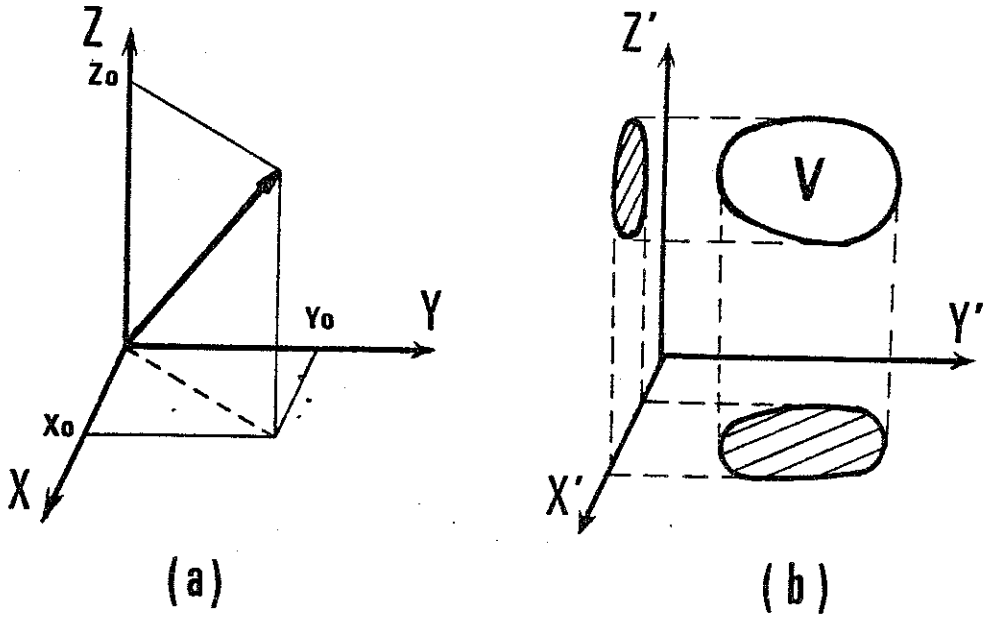


Fig. 3 - 1 : Dispersion des points de couleur d'un ensemble de fonctions métamères après modification des conditions d'observation. a) cas du métamérisme b) volume des inégalités chromatiques.

Le volume V peut contribuer au développement des indices de métamérisme comme l'ont sugéré JUDD et WYSZECKI (1963). En effet deux

échantillons métamères qui ont perdu leur métamérisme après modification des conditions d'observation sont représentés par deux points de couleur appartenant au volume V . Il semble logique de normer leur différence de couleur par celle maximum qui puisse être obtenue avec deux échantillons du même ensemble de métamère . Cette différence maximum est donnée par la plus grande diagonale du volume .

Cependant, les répercutions dûes à l'emploi d'une telle norme apparaissent limitée et nous semble être une utilisation peu optimale de V . En effet, les possibilités du volume V sont telles qu'il serait dommage de les ramener à la seule valeur d'un indice, ce qui diminuerait considérablement l'information. Un volume V correspond à un ensemble complet de fonctions métamères. Sa forme, sa taille, son orientation donne une compréhension très globale des phénomènes perceptifs consécutifs à une variation des conditions d'observation. La manière dont se comportent tous les métamères peuvent donner par exemple une vision très générale des différences entre deux observateurs ou deux illuminants distinct et permet d'en faire une excellente comparaison.

L'indice général de rendu des couleurs de la CIE repose sur des couleurs d'objet dont les courbes des facteurs spectraux de réflexion sont celles de 8 échantillons sélectionnés dans l'Atlas de MUNSELL. Ce choix est restrictif. Une manière plus générale pour caractériser le rendu des couleurs d'une source par rapport à une autre de référence serait par exemple d'évaluer les 8 volumes V correspondant aux couleurs métamères des 8 échantillons recommandés par la CIE .

Pour l'étude des conséquences de la variabilité entre observateurs, il est possible d'envisager des applications utiles de la détermination du volume V : par exemple dans les systèmes de reproduction en couleur comme la télévision ou dans la spécification des tolérences en signalisation par feux lumineux (C.I.E. - 1959).

chapitre 4

CHAPITRE 4

LES ENSEMBLES DE FONCTIONS METAMERES

Nous allons à présent aborder le métamérisme sous sont aspect théorique. Nous allons caractériser mathématiquement les ensembles de métamères, puis nous nous intéresserons au problème de leur génération. Après une étude critique des méthodes antérieures nous proposerons une nouvelle méthode de génération particulièrement adaptée à l'espace des solutions et facilement applicable par calculateur.

4 - 1 CARACTERISATION DES ENSEMBLES DE FONCTIONS METAMERES

Il est nécessaire de faire ici comme dans toute la suite de l'étude une distinction entre :

* le métamérisme des stimuli colorés eux-mêmes caractérisés par la courbe de répartition spectrale d'énergie $f(\lambda)$. Il n'est alors fait référence à aucun type d'éclairage. Un observateur qui expérimente sur un colorimètre se trouve dans cette situation. Pour lui les stimuli correspondent à des lumières colorées immatérielles. On désigne généralement ce type de stimulus par le terme de "couleurs d'ouverture"(réf. /4/, p. 81).

* le métamérisme des couleurs de surface, c'est-à-dire des couleurs d'objets éclairés par une certaine source lumineuse d'émission

spectrale $S(\lambda)$. Les fonctions métamères seront directement dans ce cas les courbes des facteurs spectraux de réflexion (ou transmission) des objets.

4-1-1 CAS DES STIMULI METAMERES : ENSEMBLE F

Pour condenser nos écritures, nous adopterons par la suite les notations suivantes :

$$X_1 = X \quad , \quad X_2 = Y \quad , \quad X_3 = Z$$

$$\bar{x}_1(\lambda) = \bar{x}(\lambda) \quad , \quad \bar{x}_2(\lambda) = \bar{y}(\lambda) \quad , \quad \bar{x}_3(\lambda) = \bar{z}(\lambda)$$

pour respectivement les composantes trichromatiques d'un stimulus et les fonctions colorimétriques de l'observateur de référence. Les expressions (2-6) donnant le point de couleur d'un stimulus deviennent :

$$X_a = k \int_\lambda f(\lambda)\, \bar{x}_a(\lambda)\, d\lambda \quad , \quad (a = 1 \text{ à } 3) \qquad (4\text{-}1)$$

Les stimuli $f(\lambda)$ confondus par le système visuel en une même couleur sont métamères et ont des composantes trichromatiques identiques. Il en existe un nombre infini et forment ce qu'on appellera un ensemble F.

Aucune des fonctions $f(\lambda)$ et $\bar{x}_a(\lambda)$ n'est connue analytiquement. Les intégrales des expressions (4-1) doivent être calculées par des méthodes numériques. Une première source d'erreurs provient des mesures spectrophotométriques des courbes d'émission spectrale $f(\lambda)$ (Réf. /12/, pp. 365-367). Une seconde provient des méthodes numériques elles-mêmes. OHTA et WYSZECKI (1975 b) ont analysés et comparés les méthodes les plus fréquemment utilisées.

Pour notre étude nous avons divisé le spectre visible en un nombre fini d'intervalles $\Delta\lambda_i$ (i = 1 à M) non nécessairement tous égaux et qui peuvent être choisis avec une largeur minimum égale à celle qui a été utilisée pour la détermination des fonctions colorimétriques de l'observateur. Pour M = 30, une équipartition du spectre entre 400 et 700 nm nous conduit à des intervalles $\Delta\lambda_i$ de 10 nm.

On obtient pour les expressions (4-1) :

$$X_a = k \sum_{i=1}^{M} \int_{\Delta\lambda_i} f(\lambda) \quad \bar{x}_a(\lambda) \quad d\lambda \quad , (a = 1 \text{ à } 3) \qquad (4\text{-}2)$$

Dans le cas où les stimuli $f(\lambda)$ sont des fonctions à spectre continue, nous pouvons utiliser pour les intégrales de (4-2) le théorème de la valeur moyenne. Les fonctions $f(\lambda)$ et $\bar{x}_a(\lambda)$ sont en effet continues et positives (paragraphe 2-2-2) sur chaque intervalle $\Delta\lambda_i$. Il existe donc des longueurs d'onde $\lambda_{a,i}$ (a= 1à3 et i= 1àM) telles que :

$$X_a = k \sum_{i=1}^{M} f(\lambda_{a,i}) \quad \int_{\Delta\lambda_i} \bar{x}_a(\lambda) \quad d\lambda \quad , (a=1\text{à}3) \qquad (4\text{-}3)$$

Posons :

$$v_{a,i} = k \int_{\Delta\lambda_i} \bar{x}_a(\lambda) \quad d\lambda \quad , (a = 1\text{à}3,\ i = 1\text{à}M) \qquad (4\text{-}4)$$

Ces valeurs se calculent simplement par la méthode des trapèzes. En effet les fonctions colorimétriques des observateurs de référence CIE étant tabulées pour chaque nanomètre, ces intégrales se transforment en une somme (dans le cas M = 30 par exemple, on dispose de 11 valeurs pour évaluer chacune d'entre elles). Cette approximation conduit à des écarts qui, sur le plan perceptif sont inférieurs au seuil différentiel chromatique.

Soient f_i les valeurs moyennes du stimulus $f(\lambda)$ sur les intervalles $\Delta\lambda_i$. Les fonctions $f(\lambda)$ étant continues, on commettra une erreur d'autant plus faible, en confondant les valeurs $f(\lambda_{a,i})$ et f_i, que les intervalles $\Delta\lambda_i$ sont petits. Nous obtenons finalement pour les composantes trichromatiques les expressions simplifiées suivantes :

$$\boxed{X_a = \sum_{i=1}^{M} f_i \, v_{a,i} \quad , (a = 1 \text{ à } 3)} \qquad (4\text{-}5)$$

Il reste à déterminer les intervalles $\Delta\lambda_i$ pour s'assurer d'une bonne précision. La C.I.E. recommande de faire les calculs pour des intervalles réguliers sur tout le spectre. Dans ces conditions, on juge couramment qu'une largeur d'intervalle de 10 nm est suffisante pour le calcul relatif à des fonctions continues. Dans quelques cas rares, il est nécessaire de descendre à 5 nm (OHTA et WYSZECKI - 1975 b), mais dans de très nombreux cas un intervalle de 20 nm peut suffire (STROCKA- 1973). Nous illustrerons avec des exemples numériques au chapitre 6 l'influence du choix de l'intervalle ainsi que celui des limites du domaine visible.

Dans le cas où la fonction $f(\lambda)$ est non continue, elle possède alors en plus d'une composante continue un spectre de raies. Cette fonction peut se décomposer en sa partie continue et en ses différentes raies λ_j dont les énergies au-dessus de la composante continue ont les valeurs f_j. Les composantes trichromatiques X_a^c de la partie continue se calculent

comme ci-dessus. Celles de chaque raie s'obtiennent directement, avec une précision identique à celle de la mesure des f_j, par les expressions :

$$X_a^j = k \quad f_j \quad \bar{x}_a\,(\lambda_j), \quad (a = 1 \text{ à } 3) \qquad (4\text{-}6)$$

On obtient finalement les composantes trichromatiques de la fonction elle-même :

$$X_a = X_a^c + \sum_j X_a^j \quad , \quad (a = 1 \text{ à } 3) \qquad (4\text{-}7)$$

En fait, les expressions (4-7) peuvent se mettre sous une forme tout à fait semblable à (4-5) en utilisant les relations (4-6) et en posant : $v_{a,j} = k \,.\, \bar{x}_a(\lambda_j)$. Il n'apparaît donc plus nécessaire de distinguer par la suite le cas d'un spectre de raies.

En conclusion, les stimuli métamères $f(\lambda)$ d'un ensemble F se caractérisent donc par des suites de M nombres réels f_i ($i = 1$ à M) vérifiant le système linéaire (4-5). Les stimuli étant de nature physique ($f(\lambda) \geqslant 0$), ces nombres sont tous positifs :

$$\boxed{f_i \geqslant 0 \quad , \quad (i = 1 \text{ à } M)} \qquad (4\text{-}8)$$

Par la suite, on représentera les fonctions $f(\lambda)$ par des vecteurs $\vec{f}$ de l'espace $\mathbb{R}^M$ dont les composantes sont les f_i.

Un ensemble F est entièrement défini par le système linéaire (4-5) et les inéquations (4-8). Il suffit de fixer les paramètres X_a et $v_{a,i}$. Cela correspond au choix d'un point de couleur (X_1, X_2, X_3) et d'un observateur par l'intermédiaire de ses fonctions colorimétriques (relations 4-4). On notera cet ensemble : $F(X_1, X_2, X_3$; observateur).

4-1-2 CAS DES COULEURS D'OBJET METAMERES : ENSEMBLE R

Deux objets qui ont des facteurs spectraux de réflexion $r(\lambda)$ et $r'(\lambda)$ distincts peuvent, lorsqu'ils sont éclairés par une même source de répartition spectrale d'énergie $S(\lambda)$, par réflexion (ou transmission) générer des stimuli de couleur métamères pour un observateur donné. Il peut, là aussi, y en avoir en fait une infinité et on appellera leur ensemble R. Ils ont les mêmes composantes trichromatiques X_a obtenues par les expressions suivantes dérivées de (2-6) (2-7) et (2-8) :

$$X_a = 100 \left[\int_\lambda r(\lambda) \cdot S(\lambda) \quad \bar{x}_a(\lambda)\, d\lambda\right] \Big/ \left[\int_\lambda S(\lambda) \quad \bar{x}_2(\lambda) \quad d\lambda\right], \qquad (a = 1 \text{ à } 3) \qquad (4\text{-}9)$$

En développant la même méthode que pour les stimuli, ces équations se transforment en :

$$\boxed{X_a = 100 \left(\sum_{i=1}^{M} r_i \quad w_{a,i}\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{M} w_{2,i}\right), \quad (a = 1 \text{ à } 3)} \qquad (4\text{-}10)$$

où r_i est la valeur moyenne de la fonction $r(\lambda)$ sur l'intervalle $\Delta\lambda_i$ et $w_{a,i}$ les valeurs définies par :

$$w_{a,i} = \int_{\Delta\lambda_i} S(\lambda) \quad \bar{x}_a(\lambda) \quad d\lambda \quad , (a = 1 \text{à} 3 \ , \ i = 1 \text{à} M) \qquad (4\text{-}11)$$

Ces valeurs s'obtiennent comme les $v_{a,i}$ par la méthode des trapèzes.

Dans le cas où la source possède un spectre de raies, on procède de la même manière que pour les stimuli. On retrouve alors une expression qui est encore semblable à (4-10).

En conclusion, les fonctions $r(\lambda)$ d'un ensemble R de métamères se caractérisent par des suites de M nombres réels r_i (i=1à M) vérifiant le système linéaire (4-10). Comme elles correspondent à des facteurs spectraux de réflexion $(0 \leqslant r(\lambda) \leqslant 1)$, ces nombres vérifient les inégalités :

$$\boxed{0 \leqslant r_i \leqslant 1 \quad , (i = 1 \text{ à } M)} \qquad (4\text{-}12)$$

On représentera aussi les fonctions $r(\lambda)$ par des vecteurs $\vec{r}$ de l'espace R^M dont les composantes sont les r_i.

Un ensemble R est entièrement défini par le système linéaire *(4-10)* et les inéquations *(4-12)*. Fixer les paramètres X_a et $w_{a,i}$ correspond à choisir un point de couleur (X_1, X_2, X_3) et la combinaison d'un observateur et d'un illuminant de référence d'après *(4-11)*. On notera cet ensemble : $R(X_1, X_2, X_3 : S(\lambda)$; observateur).

4 - 2 RECHERCHE DE FONCTIONS METAMERES DANS LES ETUDES ANTERIEURES

L'intérêt d'une telle recherche a été perçue depuis longtemps compte tenu des implications techniques et économiques que cela peut représenter pour l'industrie et qui ont été entrevues au chapitre 3. Différentes méthodes de calcul ont donc été développées pour déterminer les caractéristiques spectrales de couleurs métamères à une couleur donnée. Ces méthodes concernent essentiellement les facteurs de réflexion $r(\lambda)$ plus proches des préoccupations rencontrées dans les industries où se pratiquent les égalisations de couleur. Elles se caractérisent en général par la recherche d'une ou plusieurs solutions particulières.

× MORRIS (1947) détermine des fonctions polynomiales en λ :

$$r(\lambda) = c_0 + c_1 \lambda + c_2 \lambda^2$$

où les coefficients c_i sont déterminés par la résolution du système linéaire à 3 équations dérivé de *(4-9)*.

× BREWER et HOLLY (1948) recherchent des solutions $r(\lambda)$ du type :

$$r(\lambda) = c_1 \, f_1(\lambda) + c_2 \, f_2(\lambda) + c_3 \, f_3(\lambda)$$

où les fonctions f_1, f_2 et f_3 sont choisies parmi un ensemble prédéterminé de fonctions $f_i(\lambda)$ de nature différente (polynomiales, trigonométriques, exponentielles) mais toutes positives et présentant un éventail assez large de formes diverses. Ces fonctions sont tabulées et les auteurs obtiennent chaque solution en déterminant les c_i par une méthode graphique ou par une méthode numérique déduite de la résolution du système *(4-9)*. Bien que les fonctions f_i aient été judicieusement choisies, leur graphe ayant une allure réaliste semblable à des courbes de réflexion réelles, elles ne constituent pas une famille de générateurs permettant d'atteindre toutes les courbes métamères possibles.

× WYSZECKI (1953) formalise le problème et lui donne une solution générale théorique $r(\lambda)$ telle que :

$$r(\lambda) = r_p(\lambda) + r_o^j(\lambda) \qquad (4\text{-}13)$$

où $r_p(\lambda)$ est une solution particulière vérifiant les 3 équations *(4-9)* et où $r_o^j(\lambda)$ est une solution de l'ensemble infini dénombrable des fonctions orthogonales aux fonctions $[S(\lambda) \cdot \bar{x}_a(\lambda)]$, $(a = 1 \text{ à } 3)$ et vérifiant le système homogène associé à *(4-9)* :

$$\int_\lambda r_o^j(\lambda) \; [S(\lambda) \cdot \bar{x}_a(\lambda)] \, d\lambda = 0 \, , (a = 1 \text{ à } 3) \qquad (4\text{-}14)$$

Les fonctions $r_o^j(\lambda)$ métamères au noir $(X_1 = X_2 = X_3 = 0)$ n'ont aucune réalité physique en dehors de la solution triviale $r_o(\lambda) = 0$. L'auteur les appelle "noirs métamères". Il n'indique pas cependant comment les

calculer systématiquement. Il propose comme solution particulière la fonction :

$$r_p(\lambda) = \sum_{a=1}^{3} c_a \, [\, S(\lambda) \, . \, \bar{x}_a(\lambda)] \qquad (4\text{-}15)$$

où les coefficients c_a sont déterminés d'une manière identique à celle de BREWER et HOLLY.

× HELLMIG (1954 , 1955) propose une méthode de calcul approché pour la recherche d'une solution particulière $r(\lambda)$. Celle-ci est définie par la détermination pas à pas de sa valeur moyenne r_i sur des intervalles $\Delta\lambda_i$ égaux. Ces valeurs r_i doivent satisfaire un système d'équations semblable à (4-10).

× HENNICKE (1958) fait une étude des trois méthodes précédentes sur des cas concrets et les compare en fonction du temps de calcul nécessité et de la précision obtenue.

× RICHTER (1958) propose une méthode simple pour l'obtention d'une courbe de réflectance métamère à l'allure réaliste. Il se définit trois filtres $\beta_i(\lambda)$ réels qui par transmission avec la source $S(\lambda)$ peuvent être considérés comme les primaires d'un colorimètre. Par simulation numérique on ajuste le mélange de ces primaires dans des proportions A_i afin d'obtenir l'égalisation métamère avec la couleur de référence. On obtient alors directement une solution :

$$r(\lambda) = \sum_{i=1}^{3} A_i \, \beta_i(\lambda)$$

Toutes ces méthodes ne permettent d'obtenir que quelques solutions particulières des ensembles R.

* Mais Wyszecki (1958) complète sa méthode antérieure en proposant un moyen de générer les noirs métamères intervenant dans l'expression de la solution générale *(4-13)*. Il transforme le système homogène *(4-14)* en un système algébrique après découpage du spectre en bandes $\Delta\lambda_i$ étroites et de largeurs égales (méthode similaire à celle présentée au paragraphe 4-1-1). $r^j_{o,i}$ étant les valeurs moyennes sur $\Delta\lambda_i$ du noir métamère $r^j_o(\lambda)$ et $w_{a,i}$ les constantes dépendant des conditions d'observation, il obtient le système homogène suivant :

$$\sum_{i=1}^{M} r^j_{o,i}\, w_{a,i} = 0 \quad , \quad (a = 1 \text{ à } 3) \qquad (4\text{-}16)$$

Les solutions $r^j_o(\lambda)$ forment un sous-espace vectoriel de dimension (M-3). L'auteur détermine (M-3) noirs métamères : (N^m_i , i = 1 à M), (m=1 à (M-3)), linéairement indépendants qui en constituent une base. La solution générale se déduisant de *(4-13)* devient :

$$r_i = r_{p,i} + \sum_{m=1}^{M-3} a_m N^m_i \quad , \quad (i = 1 \text{ à } M) \qquad (4\text{-}17)$$

Elle est paramétrée par les (M-3) coefficient a_m. Cette méthode permet donc de générer un grand nombre de courbes métamères, une solution particulière $r_p(\lambda)$ étant connue. Elle n'est cependant pas commode pour explorer systématiquement un ensemble R car il est nécessaire de vérifier à chaque fois la condition d'existence ($o \leqslant r_i \leqslant 1$) de la solution obtenue. Si on sort de cet intervalle, on peut cependant réajuster la solution en réduisant par un facteur d'échelle l'ensemble des coefficients a_m.

:: TAKAHAMA et NAYATANI (1972) présente une dernière méthode de génération de facteurs de réflexion métamères assez proche dans la forme de la solution particulière (4-15) proposé par Wyszecki (1953). L'esprit en est cependant différent. Soit (X_a, a = 1 à 3) le point de couleur des fonctions métamères recherchées dans des conditions d'observation déterminées. Une solution $r(\lambda)$ est déduite de toute autre fonction $r'(\lambda)$ dont le point de couleur (X'_a, a = 1 à 3) peut être quelconque. En s'imposant l'hypothèse où $r(\lambda)$ est une déformation minimum au sens des moindres carrés de $r'(\lambda)$, la résolution du calcul donne :

$$r(\lambda) = r'(\lambda) + \sum_{a=1}^{3} b_a \, [\, S(\lambda) \, . \, \bar{x}_a(\lambda)] \qquad (4\text{-}18)$$

où les b_a sont des combinaisons linéaires des écarts ($X_a - X'_a$).

Pour obtenir d'autres solutions, il suffit de changer de fonctions $r'(\lambda)$. Celles-ci peuvent être des courbes de réflexion réelles ou être générées aléatoirement en ajoutant éventuellement une procédure de lissage. L'aspect continu et réaliste de la solution $r(\lambda)$ est directement relié à celle de la courbe $r'(\lambda)$ choisie et de l'illuminant $S(\lambda)$ considéré. Au cas où la source possède des bandes d'émission spectrale puissantes, on est souvent obligé de rejeter la solution car on obtient pour (4-18) des valeurs de $r(\lambda)$ qui sortent fréquemment de l'intervalle d'existence [0,1].

Il faut souligner la nécessité de vérifier dans toutes les méthodes précédentes cette condition d'existence. C'est un obstacle relativement coûteux en temps de calcul lorsque la génération d'un grand nombre de métamères est recherchée.

4 - 3 METHODE DES ELEMENTS SIMPLES

Nous allons à présent proposer une nouvelle méthode particulièrement adaptée à l'exploration systématique des ensembles de métamères F ou R. Cette méthode a l'avantage par rapport aux précédentes de générer des fonctions $f(\lambda)$ et $r(\lambda)$ dont on est sûr qu'elles vérifient à priori les conditions limitatives d'existance. Ceci a pour conséquence directe d'accélérer le temps de recherche d'un grand nombre de métamères. Mais son avantage principal est de permettre une caractérisation claire et exhaustive des ensembles F et R.

Le principe de la méthode repose sur une propriété intéressante vérifiée par les ensembles F ou R : toute fonction $f(\lambda)$ ou $r(\lambda)$ est engendrée d'une manière particulière mais simple par un nombre fini de fonctions métamères spéciales que nous appellerons "éléments simples". Ces éléments simples constituent des ensembles dont les propriétés spécifiques procurent d'autres avantages qui seront vus dans le chapitre suivant. Ils sont de nature différente suivant que l'on considère les ensembles F ou R. c'est pourquoi nous distinguons les deux cas.

4-3-1 GENERATION DES ENSEMBLES DE METAMERES F

Nous recherchons donc l'ensemble des stimuli métamères $f(\lambda)$ ayant pour point de couleur (X_1, X_2, X_3), un observateur de référence étant choisi et déterminé par ses trois fonctions colorimétriques $\bar{x}_a(\lambda)$. Nous utilisons pour cela la formulation algébrique présentée au paragraphe 4-1-1 qui, après découpage du spectre en M intervalles nous permet d'obtenir un système discret. Les éléments de l'ensemble F sont les suites $(f_i, i=1 \text{ à } M)$,

solutions du système linéaire (4-5) de 3 équations à M inconnues et satisfaisant aux M inégalités (4-8).

D'un point de vue géométrique, l'ensemble F peut être décrit comme un hypervolume de l'espace affine à M dimensions associé à R^M. Les M coordonnées des points de cet hypervolume correspondent aux suites (f_i, i = 1 à M). On démontre aisément que F est un volume convexe borné .

4-3-1-1 LIMITES FINIES DE F

Les M conditions d'existence (4-8) imposent la borne inférieure 0 pour chaque composante f_i. Les bornes supérieures s'obtiennent en considérant une propriété élémentaire de la vision et qui a été constatée expérimentalement : toutes composantes trichromatiques spectrales d'un observateur obtenues avec un jeu réel de primaires peut se ramener par combinaison linéaire (voir paragraphe 2-2-2) à trois nouvelles fonctions colorimétriques continues et positives sur le domaine visible et ne pouvant pas y être simultanément nulles. C'est le cas pour les fonctions $\bar{x}_a(\lambda)$ des observateurs CIE - 1931 et CIE - 1964 pour lesquels on a choisi des primaires physiques $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ et $\vec{X}_{10}$ $\vec{Y}_{10}$ $\vec{Z}_{10}$ qui permettaient d'obtenir cette propriété. Comme le problème du métamérisme est indépendant de la transformation linéaire subie par les fonctions colorimétriques, nous supposerons par la suite que ces dernières ont toujours été ramenées à ce type. Après discrétisation cette propriété se traduit par les inégalités :

$$\sum_{a=1}^{3} v_{a,i} > 0 \quad , \quad (i = 1 \text{ à } M) \qquad (4\text{-}19)$$

Nous pouvons alors écrire pour chaque f_i en utilisant (4-8) et (4-19) :

$$0 \leqslant f_i \left(\sum_{a=1}^{3} v_{a,i}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{M} f_j \left(\sum_{a=1}^{3} v_{a,i}\right)$$

$$\leqslant \sum_{a=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{M} f_j \, v_{a,j}\right)$$

Le dernier membre à droite est égal d'après (4-5) à la somme des composantes trichromatiques X_a de l'ensemble F. On obtient directement un majorant de f_i en divisant par le terme de l'inégalité stricte (4-19) :

$$f_i \leqslant \left(\sum_{a=1}^{3} X_a\right) \Big/ \left(\sum_{a=1}^{3} v_{a,i}\right) \qquad (4\text{-}20)$$

4-3-1-2 CONVEXITE DE F

La convexité résulte du fait que toute combinaison linéaire "barycentrique positive" de deux éléments de F, qui est un point du segment les reliant, est aussi un élément de F. Une combinaison barycentrique positive $\vec{b}$ des éléments $\vec{f}$ et $\vec{f}'$ est définie par :

$$\vec{b} = \alpha\vec{f} + \alpha'\vec{f}'$$

ou $\quad b_i = \alpha f_i + \alpha' f'_i \quad , \; i = 1 \text{ à } M$

avec $\quad \alpha > 0 \; , \; \alpha' > 0 \text{ et } \alpha + \alpha' = 1$

Il est alors facile de vérifier que tout barycentre positif $\vec{b}$ vérifie, comme $\vec{f}$ et $\vec{f}'$, le système linéaire (4-5) et les inégalités (4-8) qui définissent l'ensemble F.

4-3-1-3 EXTREMITES DE F

Nous allons à présent démontrer le résultat suivant :

THEOREME : F est un hyperpolyèdre dont les sommets, les "éléments simples", ont une courbe de répartition constituée seulement de 3 bandes spectrales.

Commençons pour cela par quelques considérations géométriques. Les 3 équations du système (4-5) représentent les équations de 3 hyperplans de l'espace R^M. F appartient à leur intersection qui est un sous-espace à (M-3) dimensions. Les inéquations (4-8) indiquent que F est inclu dans les demi-espaces positifs limités par les M hyperplans d'équations :

$$f_i = 0 \quad , (i = 1 \text{ à } M) \qquad (4\text{-}21)$$

Comme il reste à F (M-3) degrés de liberté, l'intuition nous amène assez naturellement à penser que les extrémités du volume F appartiennent à l'intersection de (M-3) de ces hyperplans ; l'appartenance d'un point de F à un hyperplan faisant chaque fois réduire de 1 le nombre de degré de liberté. Ces extrémités ont donc (M-3) coordonnées f_i nulles ce qui signifie physiquement que le stimulus associé est constitué au plus de 3 bandes spectrales élémentaires. Ce sont ces stimuli particuliers de F que l'on appelle "éléments simples". Leur nombre N est fini et inférieur au nombre de combinaisons c_M^3. On les note :

$$\vec{E}^n = (E_1^n, E_2^n, \ldots E_M^n) \quad , (n = 1 \text{ à } N)$$

et où seulement trois E_i^n au plus sont non nuls.

F étant convexe, ce serait donc un hyperpolyèdre dont les sommets seraient les éléments simples. On peut alors en déduire très intuitivement le résultat suivant qui constitue la propriété fondamentale de l'ensemble F.

<u>THEOREME</u> Toute fonction métamère $\vec{f}$ de l'ensemble F peut être générée par un "barycentre positif" des éléments simples $\vec{E}^n$ (n = 1 à N).

C'est-à-dire qu'il existe au moins un ensemble de N nombres positifs α_n tels que :

$$\vec{f} = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \vec{E}^n \qquad (4\text{-}22)$$

avec

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n = 1$$

La démonstration algébrique exacte de cette propriété est donnée en annexe I-a.

4-3-1-4 GENERATION BARYCENTRIQUE DE F

Réciproquement il est clair que toute combinaison barycentrique positive des éléments simples est aussi un élément de F. Cela découle de la propriété de convexité de F.

Nous pouvons en conclure que le problème du calcul des fonctions métamères de F est réduit à la détermination de ses éléments simples. Ces N solutions particulières d'allure élémentaire sont particu-

lièrement adaptées à une recherche systématique et rapide par calculateur (comme nous le verrons au chapitre 6). La totalité des fonctions métamères peut alors être générée par simple combinaison barycentrique positive.

4-3-2 GENERATION DES ENSEMBLES DE METAMERES R

Une analyse très similaire peut être faite pour les ensembles de métamères R. Les points $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ correspondant à $\vec{r}$ dans l'espace affine associé à R^M appartiennent à l'hypervolume R s'ils satisfont les équations *(4-10)* et les inégalités *(4-12)* bien plus contraignantes que celles de *(4-8)*. On peut démontrer que le volume R est aussi un hyperpolyèdre dont les sommets sont constitués de N' éléments simples. Ces éléments simples ont (M-3) de leurs coordonnées égales à 0 ou 1, les 3 dernières coordonnées ayant des valeurs intermédiaires. Deux exemples d'éléments simples pour le cas des fonctions de réflexion métamères sont indiqués à la *Fig. 4-1*.

On démontre comme pour F (voir annexe 1-b) que la totalité des fonctions métamères peut être générée par simple composition barycentrique positive à partir de ces éléments simples. Ceux-ci de nature plus complexe que ceux de F sont aussi aisément déterminés par calculateur. On leur adjoindra cependant des conditions restrictives supplémentaires que nous verrons au chapitre 7.

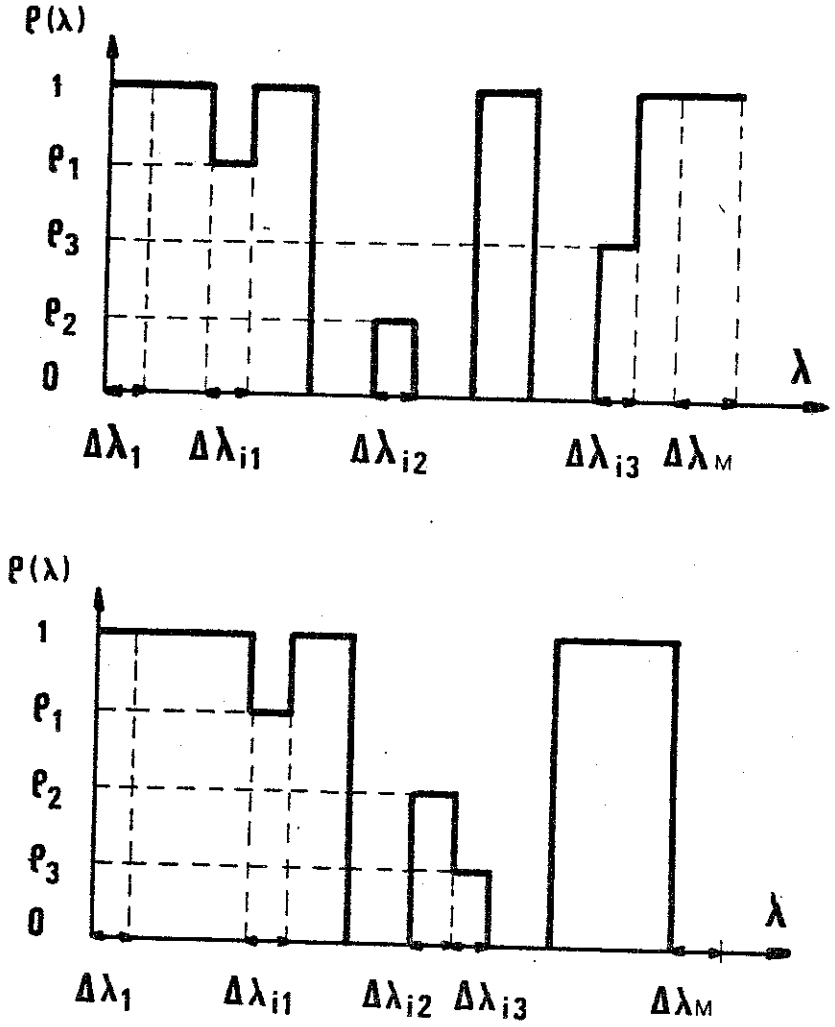


Figure 4-1 : *Exemples de 2 courbes des facteurs spectraux de réflexion correspondant à des éléments simples d'un ensemble métamère* R.

4-3-3 CAS LIMITES DES ENSEMBLES DE METAMERES

Les ensembles F ou R varient suivant le point de couleur choisi dans l'espace colorimétrique et présentent des cas limites.

4-3-3-1 CAS DE F

Si un stimulus de composantes trichromatiques (X_1, X_2, X_3) a pour chromaticité (x_1, x_2) un point du spectre, la raie monochromatique correspondante sera le seul élément de F (X_1, X_2, X_3) et son unique élément simple. Ceci est un résultat assez intuitif lorsqu'on considère la convexité du lieu spectral dans le diagramme chromatique (voir *Fig. 2-2)*. Cependant celui-ci présente dans le domaine rouge une partie parfaitement rectiligne qui est due à l'annulation d'une des fonctions colorimétriques (voir *Fig. 2-3 et 2-4)*. On a par exemple $\bar{z}(\lambda) = 0$ pour $\lambda > 650$ nm et $\bar{z}_{10}(\lambda) = 0$ pour $\lambda > 560$ nm. Il est donc possible dans ce domaine spectral d'obtenir des métamères d'une raie monochromatique, combinaisons d'autre raies du même domaine.

Inversement si on s'éloigne du lieu spectral, le nombre de métamères au sein d'un ensemble F doit augmenter ainsi que celui de ses éléments simples ; le maximum devant être atteint pour la région centrale de l'espace des couleurs réelles qui correspond au blanc. Les exemples numériques du chapitre 6 le confirment.

4-3-3-2 CAS DE R

STILES et WYSZECKI (1962) ont défini une génération probabiliste de courbes des facteurs spectraux de réflexion quelconques. Utilisant une méthode de Monte-Carlo, ils ont alors évalué statistiquement la répartition des points de couleur d'objet dans le solide des couleurs sous la forme d'un histogramme tridimensionnel. Ils ont obtenu une forte concentration de points dans la région des gris à 50 % et une décroissance monotone de la densité au fur et à mesure qu'on se rapproche de l'enveloppe du solide des couleurs.

Les ensembles R correspondant à la région centrale du solide devront donc avoir un grand nombre d'éléments simples, ce nombre diminuant au fur et à mesure qu'on considère des ensembles R aux couleurs de plus en plus saturées ou lumineuses. A la limite pour les points des couleurs optimales situés à la surface du solide, les ensembles R ne sont plus constitués que d'un seul élément. Nous avons en effet vu (paragraphe 2-2-5) qu'il n'existe qu'une seule courbe des facteurs spectraux de réflexion qui corresponde à ce type de point. Celle-ci possède d'ailleurs bien les caractéristiques d'un élément simple (voir *Fig. 2-7)*. Il faut cependant noter le cas des rouges où la surface du solide des couleurs possède des sections linéaires, conséquences de la rectitude du spectre pour les grandes longueurs d'onde. Les couleurs optimales de cette région peuvent avoir des métamères. Cette exception avait déjà été précisées par SCHROENDIGER (1920).

4-3-3-3 F : CAS LIMITE DE CERTAINS ENSEMBLES R

Avec les exemples numériques présentés dans les deux derniers chapitres on constatera une certaine dépendance entre les ensembles F et R. Mais nous pouvons dès à présent essayer de mieux comprendre les liens qui existent entre eux. Des considérations assez intuitives nous ont même conduits à expliciter ces liens : les ensembles de stimuli métamères F correspondent au cas limite d'ensemble de couleurs d'objet métamères particuliers.

Soit un ensemble F (X_1, X_2, X_3) quelconque non vide et un de ses éléments $\vec{f}$. Sauf dans le cas particulier où F correspond à une raie monochromatique, il est toujours possible de trouver une fonction $\vec{f}$ qui n'ait pas de composantes f_i nulles. (Nous l'admettrons ici sans le démontrer. C'est une conséquence de la propriété de convexité de l'espace des couleurs réelles.) Nous pouvons considérer $\vec{f}$ comme la fonction de répartition d'une source lumineuse fictive.

Appelons d'autre part "gris métamères" les courbes des facteurs spectraux de réflexion $r(\lambda)$, qui éclairées par une source lumineuse ont un même facteur de réflexion et une couleur dont les caractéristiques chromatiques sont identiques à celles de la source. Nous allons alros démontrer le résultat suivant :

THEOREME : Il existe une borne supérieure telle que, pour tout ε qui lui est inférieur, F est équivalent à l'ensemble R des gris métamères de facteur de réflexion ε et vus par notre observateur de référence sous l'illuminant $\vec{f}$.

Les composantes trichromatiques des gris sont proportionnelles à celles de $\vec{f}$ et valent $(X_1(\varepsilon/X_2),\ \varepsilon,\ X_3(\varepsilon/X_2))$. Ces gris $\vec{r}$ constituent l'ensemble $R\,(X_1(\varepsilon/X_2),\ \varepsilon,\ X_3(\varepsilon/X_3),\ \vec{f})$ et vérifient les équations *4-10* :

$$\frac{\varepsilon}{X_2} X_a = 100 \left(\sum_{i=1}^{M} r_i\, w_{a,i} \right) / \left(\sum_{j=1}^{M} w_{2,i} \right) , \quad (a = 1 \text{ à } 3) \qquad (4\text{-}23)$$

Sur chaque intervalle $\Delta\lambda_i$, les 3 valeurs $w_{a,i}$ ne sont pas simultanément nulles d'après les relations *(4-19)* vérifiées par les fonctions colorimétriques de l'observateur et d'après le choix fait pour la source $\vec{f}$. Définissons le nombre strictement positif A suivant :

$$A = \text{Min} \quad [\text{Max}_i\ (w_{a,i} \ ;\ a = 1 \text{ à } 3)\ ;\ i = 1 \text{ à } M]$$

On peut alors choisir un ε positif suffisamment petit vérifiant :

$$0 < \varepsilon < A \left(100 \frac{X_2}{X_a} \right) / \left(\sum_{j=1}^{M} w_{2,i} \right) , \ (a = 1 \text{ à } 3) \qquad (4\text{-}24)$$

De *(4-23)* on déduit alors successivement :

$$\sum_{i=1}^{M} r_i\ w_{a,i} < A , \quad (a = 1 \text{ à } 3)$$

$$r_i\ w_{a,i} < A , \quad (a = 1 \text{ à } 3 \text{ et } i = 1 \text{ à } M)$$

$$r_i \, \mathrm{Max}_i \, (w_{a,i} \; ; a = 1 \text{ à } 3) < A < \mathrm{Max}_i \, (w_{a,i} \; ; a = 1 \text{ à } 3) \; , \; (i = 1 \text{ à } M)$$

d'où finalement : $r_i < 1$, $(i = 1 \text{ à } M)$

C'est-à-dire tout simplement que lorsque le facteur de réflexion atteint une valeur ε suffisamment faible, les courbes des facteurs spectraux de réflexion ne peuvent plus atteindre la limite supérieure 1 des inégalités *(4-12)*. Celles-ci se ramènent donc aux inégalités *(4-8)* et le problème de la recherche des éléments simple de R devient identique à celui pour F. Ces éléments simples sont les mêmes au facteur multiplicatif ($\frac{\varepsilon}{X_2}$) près.

En pratique, nous constaterons dans les exemples numériques du chapitre 7 que lorsque nous faisons décroître le facteur de réflexion des gris métamères d'une source $S(\lambda)$, leur ensemble $R(X_S, Y_S, Z_S, S(\lambda))$ ressemble de plus en plus à l'ensemble $F(X_S, Y_S, Z_S)$ pour finalement se confondre avec lui pour les faibles valeurs de Y_S.

4 - 4 EXTENSION DE LA METHODE DES ELEMENTS SIMPLES

La méthode des éléments simples peut être étendue pour la recherche de fonctions qui restent métamères pour plusieurs conditions d'observation.

Dans le cas des stimuli métamères, considérons deux observateurs P et Q différents de fonctions colorimétriques $x_a^p(\lambda)$ et $x_a^q(\lambda)$ respectivement, (a = 1 à 3). On recherche les fonctions $\vec{f}$ de l'ensemble $\Phi\,(X_1^p, X_2^p, X_3^p \; ; X_1^q, X_2^q, X_3^q)$ qui sont métamères simultanément pour l'observateur P avec le point de couleur (X_1^p, X_2^p, X_3^p) et pour l'observateur Q avec le point de couleur (X_1^q, X_2^q, X_3^q).

On a par conséquent :

$$\Phi(X_1^p, X_2^p, X_3^p ; X_1^q, X_2^q, X_3^q) = F(X_1^p, X_2^p, X_3^p ; P) \cap F(X_1^q, X_2^q, X_3^q ; Q)$$

Ces stimuli doivent donc satisfaire simultanément à deux systèmes linéaires de 3 équations du type (4-5) :

$$X_a^p = \sum_{i=1}^{M} f_i \; v_{a,i}^p$$

$$X_a^q = \sum_{i=1}^{M} f_i \; v_{a,i}^q \qquad (a = 1 \text{ à } 3) \qquad (4\text{-}25)$$

Tous les raisonnements mené au paragraphe 4-3-1 sont encore valables à la condition de prendre en compte non plus le système (4-5) à 3 équations mais le système (4-25) ci-dessus à 6 équations. On trouve alors que F est toujours un hyperpolyèdre convexe dont les sommets sont de nouveaux éléments simples ayant la particularité d'avoir 6 bandes spectrales non nulles au plus, au lieu de 3.

Si nous avions m conditions d'observation ($m < \frac{M}{3}$) à considérer, les éléments simples de l'espace Φ correspondant auraient dans ce cas (3 x m) bandes spectrales non nulles.

Dans le cas des couleurs de surface un raisonnement identique nous conduit à l'existence de nouveaux éléments simples dont les coordonnées sont toutes égales à 0 ou 1 à l'exclusion au plus de 6 (ou 3 x m) coordonnées de valeur intermédiaire.

Chapitre 5

CHAPITRE 5

LE VOLUME DES INEGALITES CHROMATIQUES

Le volume des inégalités chromatique V a été défini au paragraphe 3-2-3. Il est porteur d'une information très importante dont les applications ont été brièvement mentionnées. Ce chapitre est consacré à la détermination de ce volume V. Après l'étude des méthodes publiées antérieurement, nous présentons une solution originale déduite de la génération des fonctions métamères par la méthode des éléments simples. Elle permet de déterminer simultanément les limites théoriques du volume V et la distribution des points de couleur en son sein. Cette double possibilité ainsi que sa facilité de mise en oeuvre pour le calcul informatisé lui donnent un net avantage sur les autres méthodes. L'analyse de celles-ci va nous fournir les points de comparaison nécessaires.

5 - 1 DETERMINATION DU VOLUME V DANS LES ETUDES ANTERIEURES

Deux approches très différentes ont été utilisées pour la détermination du volume V. Ces travaux ont recherché soit la répartition des points de couleur des métamères par des méthodes statistiques, soit les limites théoriques du volume V.

5-1-1 APPROCHE STATISTIQUE

:: WYSZECKI (1959) utilise la technique de Monte-Carlo pour générer des fonctions de couleur d'objet métamères à partir de sa méthode des noirs métamères (1958). Pour que les fonctions générées soient représentatives de l'ensemble R auquel elles appartiennent, il lui est nécessaire de choisir comme fonction particulière de départ une courbe des facteurs spectraux de réflexion dont les valeurs ne soient pas trop rapprochées de 0 ou 1. Comme exemple, il prend un gris avec un facteur de réflexion de 25 % ($r_o(\lambda) = 25$ pour tout λ). Considérant un changement d'observateur, il calcule les points de couleur de ces fonctions dans l'espace chromatique du 2ème observateur. Ces points suivent une loi de distribution normale trivariante. Il définit alors en utilisant la loi du χ^2 un ellipsoïde centré au point de couleur moyen et contenant en probabilité 95 % des points chromatiques correspondant à l'ensemble des fonctions métamères R

:: WYSZECKI (1962) propose l'emploi d'un sous-ensemble restreint de l'ensemble R des gris métamères à 30 % (référence : illuminant C et observateur CIE-1931). Il indique les courbes des facteurs spectraux de réflexion de douze gris sensés représenter au mieux R et qu'il a construites suivant la technique de Richter (1958) pour qu'elles aient une allure réaliste. Les 12 points de couleurs correspondants, obtenus après un changement d'observateur, se répartissent dans un volume dont la forme et l'orientation est très similaire à celle de l'ellipsoïde calculé par la méthode statistique précédente. Cependant la taille en est différente. La dispersion des 12 points est plus large que les limites de l'ellipsoïde

statistique. Un des gris s'en écarte de 60 %. L'interprétation de ce résultat assez surprenant est délicate. Il semblerait mettre en cause la représentativité de sa taille par la loi du χ^2 et rappelle qu'il ne donne aucune indication sur les limites théoriques du volume V.

* STILES et WYSZECKI (1962) proposent une méthode probabiliste très générale qui permet d'obtenir d'une part le nombre relatif des couleurs d'objet constituant un ensemble métamère R, d'autre part la distribution de leurs points de couleur dans le volume V consécutif à une modification des conditions d'observations. Après découpage du spectre en M intervalles $\Delta\lambda_i$, ils se définissent une base de fonctions en escalier $r(\lambda)$ vérifiant les hypothèses suivantes :

- les valeurs r_i des fonctions $r(\lambda)$ comprises entre 0 et 1 varient de manière indépendante d'un intervalle $\Delta\lambda_i$ à l'autre.

- Les fonctions de distribution $P(r_i)$ des variables r_i sont identiques sur tous les intervalles $\Delta\lambda_i$.

Les composantes trichromatiques X_a (a = 1 à 6) des fonctions $r(\lambda)$ relatives aux deux conditions d'observations s'expriment par des relations du type *(4-10)*. Chaque composante est donc une combinaison linéaire de M variables aléatoires r_i. Pour une valeur de M suffisamment grande, les auteurs appliquent le théorème de la limite centrale (voir Cramer -1974). Le vecteur $(X_1, X_2, \ldots, X_6)$ suit alors une loi de distribution normale multivariante.

Par intégration sur X_4, X_5, X_6 on obtient le nombre relatif des éléments de l'ensemble métamère $R(X_1, X_2, X_3, S(\lambda))$. Ce nombre décroît exponentiellement en fonction de la distance (quadratique) du point (X_1, X_2, X_3)

considéré au point moyen ($X_{m,1}$, $X_{m,2}$, $X_{m,3}$), centre de gravité des points de couleur de la base complète des fonctions $r(\lambda)$. Ce point moyen dépend des lois de distribution P admises pour les valeurs r_i. La décroissance exponentielle est d'autant plus rapide que M est grand ce qui révèle le délicat problème du choix de M.

La distribution des points de couleur du volume V associé à R suit une loi de distribution normale trivariante. Avec la loi du χ^2 à 3 degrés de liberté, on détermine un ellipsoïde devant contenir 95 % de l'ensemble de ces points. Le centre de l'ellipsoïde dépend du point de couleur (X_1, X_2, X_3) choisi, par contre sa forme, son orientation et son volume en sont indépendants. Ce résultat peut paraître surprenant compte tenu des remarques faites au paragraphe 4-3-3-2 sur la petitesse des ensembles de métamères proches des couleurs optimales et pour lesquels la taille des volumes V devraient logiquement se réduire. Nous le vérifierons effectivement avec les exemples numériques du chapitre 6. Les auteurs expliquent ce résultat par le fait que la distribution normale obtenue est un cas limite et que cette approximation est d'autant plus mauvaise que l'on s'écarte du centre de gravité ($X_{m,a}$; a = 1 à 6).

Cette théorie est difficilement transposable pour les ensembles de stimuli $f(\lambda)$. La difficulté vient du choix des lois de distribution $P(f_i)$ qui doivent vérifier des conditions limites à l'∞, les f_i n'étant théoriquement pas limités par une borne supérieure. On ne dispose d'aucune donnée pour que ce choix soit réaliste.

:: STILES, WYSZECKI et OHTA (1977) proposent une amélioration à la méthode probabiliste précédente. L'ancienne base des courbes des facteurs spectraux de réflexion $r(\lambda)$ en escalier n'avait pas de corrélation entre les bandes spectrales, ce qui n'est évidemment pas le cas dans la nature. Les auteurs définissent une nouvelle base de fonctions $r(\lambda)$ déterminées par des méthodes de Fourrier et limitées en fréquence. Leur aspect

se rapproche donc plus de celui des courbes réelles. On se définit une fréquence de coupure ω afin de limiter les oscillations des fonctions. La suite de la méthode et les conclusions sont tout-à-fait semblables à celles de Stiles et Wyszecki (1962). L'ellipsoïde obtenu dépend de ω. Plus la fréquence de coupure est basse, plus sa taille se réduit et son excentricité croît. Pour une valeur particulière l'ellipsoïde est presque identique à celui obtenu par la méthode précédente.

:: NAYATANI et TAKAHAMA (1972) utilisent les 12 gris métamères de Wyszecki (1962) pour tester leur efficacité dans la mesure du rendu des couleurs des sources de même chromaticité que la source C. Pour cela, ils considèrent 10 lampes fluorescentes d'indice général de rendu des couleurs R_a distinct. Ils calculent pour chaque lampe :

- l'ellipsoïde de la méthode de Stiles et Wyszecki (1962) et en déduisent un rayon sphérique équivalent R_c.
- l'écart moyen $< \Delta E_m >$ du point de couleur de chacun des 12 gris à celui du gris constant à 30 %.

Pour les 10 lampes testées ils obtiennent une bonne corrélation entre $< \Delta E_m >$ et R_c. Ceci indiquerait une bonne représentabilité des 12 gris pour l'ensemble infini des gris métamères à 30 % : $R(X_c, 30\%, Z_c, C)$. Mais la corrélation est par contre mauvaise entre les indices R_a et R_c. Cela peut provenir de deux raisons différentes qui conduisent à des conclusions opposées :

- le calcul de R_c n'est fait qu'en considérant des gris moyens (l'ellipsoïde de Stiles et Wyszecki n'est d'ailleurs significatif en toute rigueur que pour ce domaine central de l'espace des couleurs), alors que l'indice R_a de la CIE prend en compte 8 couleurs distinctes (voir paragraphe 3-2-2-2) et pourrait être ainsi plus représentatif des écarts de couleurs pour l'ensemble du solide des couleurs.
- Inversement R_c est une valeur moyenne calculée pour un ensemble infini de courbes (celles des gris métamères) alors que R_a ne correspond qu'à huit courbes particulières et dans ce sens peut donc être moins représentatif.

Une prolongation très utile de cette étude consisterait à rechercher la corrélation entre R_c (ou $< \Delta E_m >$) et la taille théorique du volume des inégalités chromatiques pour différents points répartis dans le solide des couleurs. Si elle est bonne $< \Delta E_m >$ serait un excellent indice de rendu des couleurs.

5-1-2 LIMITES THEORIQUES DU VOLUME V

ALEN (1966, 1969a, 1973) est le premier à déterminer par le calcul les limites théoriques du volume V. Il y parvient en recherchant parmi les points d'intersection d'une droite avec le volume V les deux points extrêmes à l'aide d'un programme de maximisation et minimisation. Allen mentionne qu'il utilise les techniques de la programmation linéaire (voir HIMMELBLAU - 1972) mais n'indique pas précisément la méthode employée. Pour ces points extrêmes appartenant aux limites théoriques de V, il obtient des courbes des facteurs spectraux de réflexion très proches de celles des couleurs optimales (voir paragraphe 2-2-5) puisque leurs valeurs sont égales à 0 ou 1 et que le nombre de leur transition est limité. Cependant ce nombre est élevé (>10) et doit dépendre fortement de la méthode utilisée.

OHTA et WYSZECKI (1975a, 1975c) améliorent et étendent cette étude. Après découpage du spectre, ils obtiennent un système d'équations et d'inéquations similaires à *(4-10) et (4-12)* à partir desquelles ils utilisent ces techniques de programmation linéaire. Le principe en est toujours le même : rechercher les points d'intersection extrêmes de V avec une droite. Les courbes des facteurs spectraux de réflexion calculées par cette méthode pour ces points de couleur ont toutes leurs valeurs r_i égales à 0 ou 1, exceptées cinq valeurs intermédiaires.

La programmation linéaire a donc permis de résoudre le problème de la détermination des limites théoriques de V. Cependant elle est assez lourde à mettre en oeuvre et peut s'avérer très coûteuse en temps de calcul si une bonne précision de l'enveloppe de V est recherchée. Dans ce cas, il est en effet nécessaire de la "transpercer" un très grand nombre de fois par une droite. Les auteurs se limitent d'ailleurs en général à la détermination précise de quelques coupes planes de V.

5 - 2 APPLICATIONS DE LA METHODE DES ELEMENTS SIMPLES

Nous allons à présent montrer l'efficacité de la méthode des éléments simples pour la détermination des limites théoriques du volume V d'une part et la répartition des points de couleur des fonctions métamères au sein de V d'autre part. Les limites de V s'obtiennent directement et globalement ce qui permet des calculs plus rapides que ceux utilisant les techniques de programmation linéaire. Pour la deuxième application on définit une méthode très simple de génération statistique des métamères. Elle a l'avantage par rapport aux méthodes antérieures de pouvoir très aisément donner la répartition de leurs points dans V, et ceci sans restriction sur les composantes trichromatiques définissant F ou R, qu'elles soient celles de couleurs très saturées ou non.

5-2-1 DETERMINATION DES LIMITES THEORIQUES DE V

* Cas des ensembles de stimuli métamères F

Dans l'introduction de (4-1) nous avons précisé que les stimuli considérés pour les ensembles F étaient ceux des couleurs d'ouverture, c'est-à-dire de lumières immatérielles détachées de tout contexte comme celui

d'une scène réelle éclairée. Les conditions d'observation sont entièrement définies par l'observateur. Leur modification correspond donc uniquement à la donnée de trois nouvelles fonctions colorimétriques $\bar{x}'_a(\lambda)$ ou, ce qui est équivalent, à celle des 3 x M coefficients $v'_{a,i}$ (a = 1 à 3 ; i = 1 à M) qui en dérivent par les relations (4-4).

Les points de couleur des fonctions métamères $\vec{f}$ d'un ensemble $F(X_1, X_2, X_3)$ se dispersent dans le volume des inégalités chromatiques Leurs nouvelles composantes trichromatiques s'obtiennent comme pour (4-5) par :

$$X'_a = \sum_{i=1}^{M} f_i \; v'_{a,i} \quad , (a = 1 \text{ à } 3) \qquad (5\text{-}1)$$

Autrement dit V est une projection linéaire de l'hypervolume F dans l'espace chromatique de dimension trois. Cette projection, comme toute transformation linéaire conserve les barycentres et notamment, les barycentres "positifs". Par conséquent toutes les propriétés de l'hypervolume F sont transmises à V. En particulier, V est un polyèdre convexe et est identique à l'ensemble des barycentres positifs de la projection des éléments simples dans l'espace colorimétrique.

Les sommets de V sont donc des projections des éléments simples. Mais cette transformation nous fait passer d'un espace à M dimensions (M > 3) à un espace à 3 dimensions et provoque une sorte de dégénérescence des éléments simples. En effet, certaines de leurs projections sont situées à l'intérieur du volume V. Nous le constaterons dans les exemples numériques. Les volumes V ont moins de sommets que les volumes F dont ils sont issus.

On voit ainsi que si nous avons déterminé les éléments simples d'un ensemble métamère F, il est aisé de déterminer les limites théoriques du volume des inégalités chromatique V consécutif à une certaine modification

des conditions d'observation. Il suffit de rechercher l'enveloppe des points de projection de ces éléments simples, c'est-à-dire le plus petit polyèdre convexe qu'ils sous-tendent. Pour d'autres conditions d'observation, il suffira de recommencer en modifiant juste les paramètres de la projection.

× Cas des ensembles de couleurs d'objet R

Les résultats précédents sont facilement étendues au volume V qui correspond à une modification des conditions d'observation pour un ensemble $R(X_1, X_2, X_3, S(\lambda))$. Dans ce cas la projection est définie par :

$$X'_a = 100 \left(\sum_{i=1}^{M} r_i \; w'_{a,i} \right) / \left(\sum_{j=1}^{M} w'_{2,i} \right) \qquad (5\text{-}2)$$

où les coefficents $w'_{a,i}$ se déduisent par les expressions *(4-10)* des nouvelles fonctions colorimétriques $\bar{x}'_a$ et du nouvel illuminant $S'(\lambda)$. En dehors de ce point, tout est semblable au cas précédent et les conclusions en sont identiques.

Pour Ohta et Wyszecki (1975a) les limites de V étaient atteintes pour des courbes des facteurs de réflexion partout égales à 0 ou 1 sauf sur 5 bandes où les valeurs étaient intermédiaires. Dans notre cas, les sommets de V correspondent à des fonctions qui sont partout égales à 0 ou 1 sauf sur seulement 3 bandes où leurs valeurs sont intermédiaires. Cette différence de 3 à 5 est facilement interprétée lorsqu'on se rappelle que Ohta et Wyszecki ne recherchaient pas des sommets de V mais ses limites d'intersection avec une droite de l'espace colorimétrique. En d'autre terme, ils ajoutaient aux équations *(4-10)* deux autres contraintes linéaires, les équations de deux plans définissant la droite, sur les valeurs r_i des courbes de facteurs spectraux de réflexion.

5-2-2 GENERATION STATISTIQUE DES METAMERES

La méthode des éléments simples nous suggère une génération de fonctions métamères suivant un processus aléatoire dont on pourra déduire une description statistique de la répartition des points de couleur correspondants dans le volume des inégalités chromatiques V.

Les fonctions métamères appartenant aux ensembles F ou R n'ont pas toute la même probabilité dans les conditions d'observations usuelles. Par exemple, parmi les deux courbes des facteurs spectraux de réflexion de la *figure 5-1*, la plus continue (a) aura sûrement plus de chance d'être rencontrée que la plus dentelée (b). En particulier les éléments simples qui sont les fonctions plus discontinues des ensembles F ou R

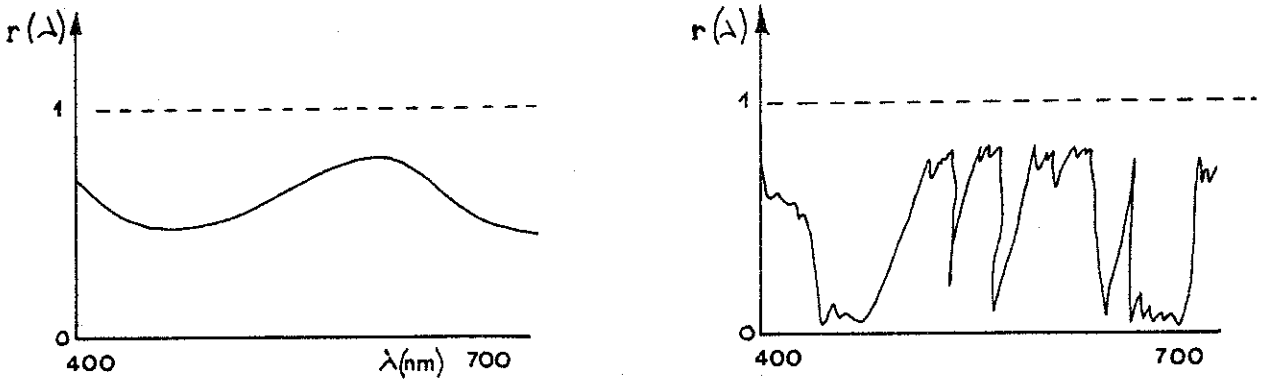


Figure 5-1 : Deux courbes de réflexion : (a) d'allure continue doit avoir une plus forte probabilité que (b).

sont certainement moins probables que leur barycentre géométrique $\vec{g}$ qui est une fonction très lissée :

$$\vec{g} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{E}^j \qquad (5\text{-}3)$$

Malheureusement le problème de définir clairement laquelle des probabilités doit être assignée à une fonction spectrale déterminée, est encore non résolu. Il faudrait faire une analyse statistique de tous les stimuli de couleur qui peuvent être rencontrés dans notre environnement naturel. Les innombrables mesures spectrophotométriques que cela représente dénoncent le côté irréaliste de cette procédure. Néanmoins, l'approche statistique du métamérisme apparaît comme une des meilleures approches.

Les déterminations statistiques du volume V décrit en 5-1-1 ont conduit Wyszecki (1959) à une génération de métamères par technique de Monte Carlo, Stiles et Wyszecki (1962) à une génération probabiliste de fonctions spectrales très découpées (leurs bandes sont non corrélées) et Stiles, Wyszecki et Ohta (1977) au même résultat mais avec une base de fonctions dont le spectre de Fourier est limité en fréquence.

Nous allons montrer une autre méthode de génération statistique des métamères. Elle est déduite de l'ensemble des éléments simples par un processus d'une grande simplicité qui favorise la rapidité des calculs. Cette méthode est parfaitement adaptée à la technique de Monte-Carlo et permet de générer des fonctions qui peuvent être plus ou moins fortement lissées. Elle a aussi l'avantage, contrairement aux méthodes antérieures, de pouvoir s'appliquer pour n'importe quelle couleur, d'objet située dans le solide des couleurs. Nous verrons au paragraphe 5-2-3 qu'elle permet surtout de déterminer aisément la répartition des points de couleur des fonctions métamères dans le volume V (paragraphe 5-2-3).

Soit donc l'ensemble complet des N éléments simples $\vec{E}^j$. Commençons par considérer un ensemble de N nombres scalaires aléatoires α_j. L'unique contrainte sur ces N α_j est d'être positifs. A partir de cet ensemble aléatoire on génère la fonction spectrale aléatoire $\vec{f}$ (ou $\vec{r}$) par la composi-

tion barycentrique suivante :

$$\vec{f} = \left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \vec{E}^j \right) / \left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \right) \qquad (5\text{-}4)$$

Malgré l'absence de spécification sur la façon de générer aléatoirement les α_j, nous sommes sûrs que $\vec{f}$ restera une fonction spectrale métamère (voir paragraphe 4-3-1-4). Si nous nous assurons de plus que toutes les combinaisons des α_j peuvent être atteintes, alors n'importe quelle fonction spectrale métamère a une probabilité non nulle d'être générée. La distribution de probabilité de $\vec{f}$ est dépendante de la méthode de calcul utilisée pour déterminer l'ensemble des éléments simples. Mais cette remarque ne doit pas être gênante en pratique. Nous constaterons en effet dans les exemples numériques des chapitres suivants que la distribution des éléments simples est stable. Les variations de leurs moments d'ordre 1 ou d'ordre 2 sont inférieures à 1 % pour des calculs faits avec des intervalles $\Delta\lambda_i$ de 5 nm (M = 60), 10 nm (M = 30) ou 20 nm (M = 15).

Le problème à présent est de préciser comment choisir les α_j de façon à donner une forte probabilité aux fonctions spectrales qui ont le plus de chance d'être rencontrées dans la nature et une faible probabilité à celle qui en ont moins. On peut agir essentiellement sur la valeur moyenne $< \alpha_j >$ de chaque α_j, sur sa distribution de probabilité $P(\alpha_j)$ ou même sur les corrélations $P(\alpha_i, \alpha_j)$ entre différents α_j. Ces nombreux paramètres libres devraient être définis par l'observation expérimentale de la distribution des stimuli de couleurs réels. Cependant l'impossibilité actuelle d'obtenir ce type d'information nous impose de choisir les hypothèses les plus simples possible.

Cela nous conduit à une version élémentaire de ce processus aléatoire de génération qui peut être obtenue de la manière suivante : considérons un entier n. Tirons à n reprises successives et <u>indépendantes</u> un élément simple $\vec{E}^{(k)}$ (k = 1 à n) parmi l'ensemble des N éléments simples dont on supposera les probabilités égales : $P(\vec{E}^{(k)} = \vec{E}^{j}) = 1/N$; j = 1 à N. On génère alors une fonction métamère aléatoire $\vec{f}$ (ou $\vec{r}$) en écrivant :

$$\vec{f} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \vec{E}^{(k)} \qquad (5\text{-}5)$$

La distribution de probabilité ainsi obtenue est une loi multinomiale (ou polynomiale) (voir PEYRET - 1964, p. 163) dans un espace à M dimensions. Elle vérifie les propriétés suivantes :

* la moyenne est le centre de gravité des éléments simples.

En effet :

$$< \vec{f} > = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} < \vec{E}^{(k)} > = < \vec{E}^{(k)} >$$

Comme

$$< \vec{E}^{(k)} > = \sum_{j=1}^{N} P(\vec{E}^{(k)} = \vec{E}^{j}) \; \vec{E}^{j} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{E}^{j} = \vec{g}$$

On obtient bien :

$$< \vec{f} > = \vec{g} \qquad (5\text{-}6)$$

ou encore : $< f_p > = < g_p >$; p = 1 à M

* Soit T_f la matrice symétrique des covariances du vecteur aléatoire $\vec{f}$. C'est une matrice symétrique M x M dont les éléments sont :

$$(T_f)_{pq} = < (f_p - g_p)(f_q - g_q) > \quad ; \quad p,q = 1 \text{ à } M$$

Soit T_E la matrice des covariances des éléments simples :

$$(T_E)_{pq} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} (E_p^j - g_p) \quad (E_q^j - g_q)$$

On démontre facilement que :

$$\boxed{T_f = \frac{1}{n} T_E} \qquad (5\text{-}7)$$

Quelques soient p et q, (p,q = 1 à M) :

$$(T_f)_{pq} = < [(\frac{1}{n} \sum_k E_p^{(k)}) - g_p] \quad [(\frac{1}{n} \sum_k E_q^{(k)} - g_q] >$$

$$= \frac{1}{n^2} < [\sum_k (E_p^{(k)} - g_p)] \quad [\sum_k (E_q^{(k)} - g_q)] >$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{k'=1}^{n} < (E_p^{(k)} - g_p)(E_q^{(k')} - g_q) >$$

Les variables aléatoires $E^{(k)}$ étant indépendantes nous avons :

Pour $k \neq k'$: $< (E_p^{(k)} - g_p)(E_q^{(k')} - gq) > = < E_p^{(k)} - g_p > . < E_q^{(k')} - g_q >$

$$= 0$$

Pour k = k' : $< (E_p^{(k)} - g_p)\ (E_q^{(k)} - g_q) > = \sum_{j=1}^{N} P(\vec{E}^{(k)} = \vec{E}^j)\ (E_p^j - g_p)\ (E_q^j - g_q)$

$$= (T_E)_{pq}$$

On en déduit finalement :

$$(T_f)_{pq} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (T_E)_{pq} = \frac{1}{n} (T_E)_{pq}$$

La loi multinomiale est une loi discontinue. Elle a les propriétés suivantes :

* la probabilité de $\vec{f}$ est strictement nulle en dehors de l'hyperpolyèdre F(ou R).

* la probabilité est minimum aux sommets de l'hyperpolyèdre où se trouvent les fonctions spectrales métamères les plus irrégulières.

Pour n suffisamment grand, on voit intuitivement que la probabilité de $\vec{f}$ va croître progressivement en s'éloignant des bords du polyèdre pour devenir maximum au centre de gravité $\vec{g}$ au voisinage duquel se trouvent les fonctions spectrales les plus lissées. On peut d'ailleurs utiliser le résultat très général du théorème de la limite centrale (voir Cramer - 1974, p. 316). La distribution discontinue de $\vec{f}$ tend au sens des probabilités vers une distribution normale multivariante centrée autour de la moyenne $\vec{g}$. Cette loi se concentre autour de $\vec{g}$ avec un coefficient sur les écarts types qui est inversement proportionnel à $\sqrt{n}$ d'après (5-7). Il serait juste de relier la valeur de n à des études expérimentales sur la distribution statistique

des fonctions spectrales rencontrées dans le monde habituel des observateurs. Grâce à sa simplicité, ce processus aléatoire est un moyen assez puissant, surtout si on considère le problème très utile de la distribution des composantes trichromatiques des métamères quand les conditions d'observations sont modifiées.

5-2-3 DISTRIBUTION DANS V DES POINTS DE COULEUR DES METAMERES

Soit C le point de couleur de la fonction métamère générée aléatoirement. Les coordonnées (X_1, X_2, X_3) de $\vec{C}$ s'obtiennent par les transformations linéaires (5-1) ou (5-2) suivant qu'il s'agit des stimuli ou des couleurs d'objet. Appelons P la matrice 3 x M associée à cette projection de l'espace des M composantes spectrales dans l'espace chromatique :

$$(P)_{ai} = v'_{a,i} \qquad \text{(cas de F)}$$

$$(P)_{ai} = 100\, w'_{a,i} \,/\, \left(\sum_{j=1}^{M} w'_{2,j}\right) \quad \text{(cas de R)} \qquad (a = 1 \text{ à } 3 \text{ et } i = 1 \text{ à } M)$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\vec{C} = P\ \vec{f}$$

Cette transformation définit une nouvelle variable aléatoire $\vec{C}$. Sa distribution de probabilité suit une loi trinomiale et vérifie les propriétés suivantes (voir Cramer - 1974, p. 298) :

* La moyenne est le centre de gravité de la projection des éléments simples ou ce qui est équivalent la projection de leur centre de gravité $\vec{g}$

$$\begin{aligned} < \vec{C} > &= < P \ \vec{E}j > \\ &= P \ \vec{g} \end{aligned} \qquad (5\text{-}9)$$

* Soient T_c et T_{PE} respectivement les matrices 3 x 3 des covariances de $\vec{C}$ et des points de couleur des éléments simples. Ces matrices dérivent directement de T_f et T_E par les expressions suivantes déduites de la projection P :

$$T_C = P \ T_f \ {}^tP$$

$$T_{PE} = P \ T_E \ {}^tP$$

En utilisant la relation (5-7), on obtient finalement :

$$\boxed{T_C = \frac{1}{n} \ T_{PE}} \qquad (5\text{-}10)$$

On constate donc que la matrice T_C s'obtient directement à partir du calcul des variances et covariances des points de couleur des éléments simples. La distribution de la variable aléatoire $\vec{C}$ peut se représenter par "l'ellipsoïde des concentrations" analogues aux ellipsoïdes d'inertie de la mécanique. Il se définit à partir de la matrice inverse de celle des covariances de $\vec{C}$ (Cramer - 1974, p. 300) et est donnée par l'équation suivante :

$$(X_1, X_2, X_3) \ T_C^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = 5$$

On peut définir de la même façon un "ellipsoïde des écarts types" à partir de la matrice des covariances T_{PE} :

$$(X_1, X_2, X_3) \quad T_{PE}^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = 1$$

Ses demi-axes sont égaux aux écarts types des projections des éléments simples dans les trois directions principales et correspondent à la racine carré des trois valeurs propres de la matrice T_{PE}. Nous représenterons très souvent cet ellipsoïde dans les exemples numériques.

D'après (5-10) l'ellipsoïde des concentrations de la variable aléatoire $\vec{C}$ est directement proportionnel à l'ellipsoïde des écarts types des $\vec{PE}^j$. Il s'en déduit par le facteur de réduction $\sqrt{n/5}$. Cette représentation permet de montrer clairement que pour des valeurs de n croissantes, la probabilité du point de couleur de la fonction métamère aléatoire se ressère autour du centre de gravité des projections des éléments simples. Enfin, d'après le théorème de la limite centrale, cette distribution de probabilité tend vers une loi normale trivariante.

La méthode des éléments simples s'avère donc être très efficace pour l'étude du volume des inégalités chromatiques V puisqu'elle permet d'en obtenir simultanément les limites théoriques et la distribution de probabilités de ses points de couleur, les fonctions métamères les plus probables étant celles dont la répartition spectrale est la plus lissée.

chapitre 6

CHAPITRE 6

APPLICATIONS NUMERIQUES

DE LA METHODE DES ELEMENTS SIMPLES

Pour les applications de la méthode des éléments simples présentée dans cette étude, nous choisirons dans la majorité des cas des problèmes dont il existe déjà quelques données. Notre but est de tester cette méthode et d'en illustrer quelques-unes des possibilités pour la comparer aux autres méthodes.

La première partie est consacrée aux ensembles F de stimuli métamères pour lesquels les conditions d'observation sont entièrement définies par l'observateur. Une modification de ces conditions (voir paragraphe 3-2-1) va donc nous permettre en pratique de comparer deux types d'observateur.

La deuxième partie est consacrée aux ensembles R des courbes des facteurs spectraux de réflexion métamères. Le volume V des inégalités chromatiques permettra d'étudier le métamérisme d'illuminant et le métamérisme d'observateur dans les problèmes de réflexion.

6 - 1 COMPARAISON DE DEUX OBSERVATEURS

6-1-1 OBSERVATEURS DE REFERENCE COLORIMETRIQUE CIE-1931 ET CIE-1964

Nous calculons tout d'abord 20 ensembles métamères F typiques pour l'observateur de référence colorimétrique CIE-1931. Puis nous faisons le calcul des composantes trichromatiques des stimuli de couleur de chacun de ces ensembles métamères vus par l'observateur de référence colorimétrique CIE-1964.

Les équations de base (4-5) et (5-1) étant homogènes et linéaires, le problème peut être traité à une constante multiplicative près pour toutes les composantes trichromatiques. Nous choisissons arbitrairement de fixer Y à 100 pour chacun des 20 ensembles. Les deux autres composantes trichromatiques sont définies dans l'espace colorimétrique par les deux coordonnées trichromatiques x et y (voir tableau I) d'où :

$$X = \frac{100}{y} x \quad \text{et} \quad Z = \frac{100}{y} (1-x-y)$$

On notera simplement l'ensemble métamère correspondant : F(x,y, 100, CIE-1931). Les calculs ont été effectués sur le domaine spectral visible : 400-700 nm avec des intervalles de 10 nm (M = 30). Le nombre des éléments simples pour un ensemble métamère varie avec sa localisation dans le diagramme de chromaticité CIE (x,y). Le tableau I montre dans le cas présent que ce nombre varie entre 200 et 1000. Le maximum est atteint pour l'ensemble n°2 situé dans le domaine des rouges. Cela confirme l'importance déjà signalée au paragraphe 4-3-3-1, de la partie rectiligne du lieu spectral dans les grandes longueurs d'onde, puisqu'elle augmente les

TABLEAU I : Exemples de 20 ensembles métamères F(x, y, 100) pour l'observateur de référence colorimétrique CIE-1931. Pour chaque ensemble le calcul donne N éléments simples qui, lorsqu'ils sont projetés dans l'espace chromatique (x_{10}, y_{10}, Y_{10}) CIE-1964, ont un centre de gravité (x_g, y_g, Y_g). Inversement, pour les ensembles métamères F(x_g, y_g, Y_g) de l'observateur de référence supplémentaire CIE-1964, les N' éléments simples correspondant ont le centre de gravité (x'_g, y'_g, Y'_g) de leurs projections dans l'espace chromatique (x,y) CIE-1931.

Ensemble	x	y	N	x_g	y_g	Y_g	N'	x'_g	y'_g	Y'_g
1	0.650	0.275	932	0.6248	0.2848	102.5	918	0.6464	0.2749	100.3
2	0.550	0.350	1008	0.5341	0.3569	105.0	1028	0.5487	0.3486	99.9
3	0.450	0.450	950	0.4498	0.4477	104.7	948	0.4509	0.4454	99.4
4	0.525	0.250	978	0.4905	0.2553	107.2	968	0.5220	0.2531	100.8
5	0.350	0.550	820	0.3642	0.5399	104.7	834	0.3513	0.5450	99.4
6	0.425	0.300	998	0.4028	0.3040	109.7	1016	0.4231	0.3003	100.3
7	0.400	0.160	878	0.3605	0.1581	112.0	884	0.4003	0.1634	101.0
8	0.250	0.650	608	0.2786	0.6330	105.0	608	0.2543	0.6413	99.1
9	0.300	0.400	908	0.2969	0.4035	111.4	896	0.2998	0.3981	99.9
10	0.300	0.200	980	0.2806	0.2048	117.2	980	0.2990	0.2044	101.0
11	0.150	0.700	398	0.1825	0.6931	108.8	420	0.1518	0.6938	99.4
12	0.175	0.500	624	0.1863	0.5156	115.3	620	0.1785	0.4908	98.4
13	0.200	0.275	846	0.1965	0.2917	121.5	802	0.1996	0.2769	100.1
14	0.225	0.080	942	0.2111	0.0876	134.1	878	0.2244	0.861	103.4
15	0.070	0.700	224	0.1048	0.7136	114.8	290	0.754	0.6835	98.1
16	0.100	0.400	448	0.1009	0.4677	132.2	410	0.1025	0.3946	98.7
17	0.150	0.150	706	0.1467	0.1812	141.5	662	0.1509	0.1478	98.5
18	0.050	0.600	216	0.0631	0.6805	128.3	216	0.0509	0.5977	99.8
19	0.050	0.400	206	0.0372	0.5291	147.6	206	0.0511	0.3981	99.7
20	0.075	0.275	230	0.0655	0.3701	153.4	240	0.0771	0.2708	100.1

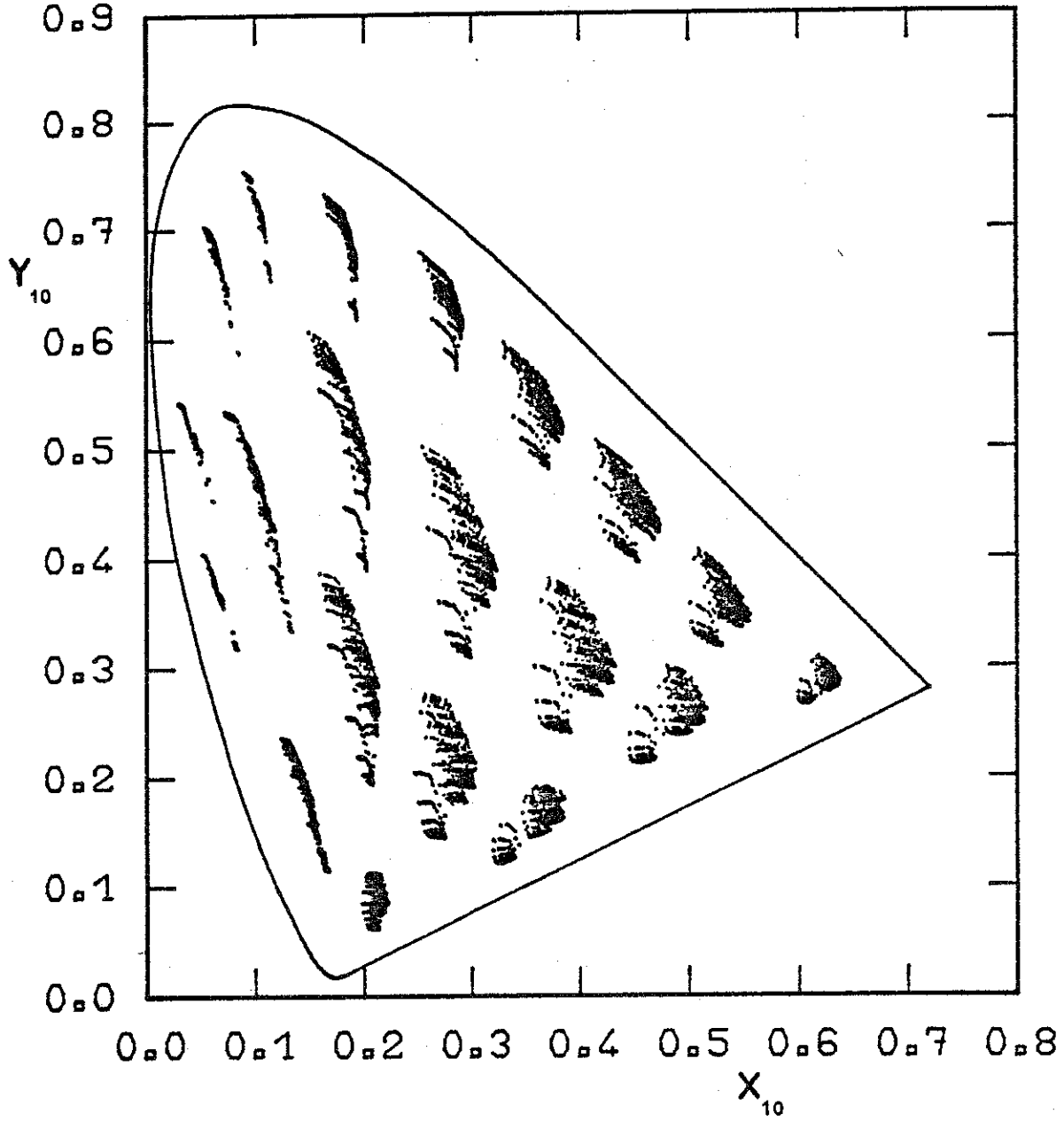


Figure 6-1 : *Dispersion dans le diagramme chromatique CIE-1964 des éléments simples de 20 ensembles de métamères F correspondant à l'observateur de référence CIE-1931 et définis au tableau I.*

possibilités de combinaison entre bandes spectrales pour la détermination des éléments simples. L'ensemble n°14 situé dans les violets pourpres saturés possède 942 éléments simples. Ce nombre élevé s'explique en fait par une autre particularité du lieu spectral : les coordonnées trichromatiques spectrales des violets varient très peu entre 380 et 450 nm (voir *figure 2-2)*. Les ensembles métamères peu saturées (n° 3, 6, 9, 10, 13) ont cependant un nombre sensiblement équivalent d'éléments simples.

La *figure 6-1* représente la projection des 20 ensembles métamères dans le diagramme de chromaticité CIE-1964 (x_{10}, y_{10}). Les limites théoriques de chacun des 20 volumes des inégalités chromatiques V sont définies sur le diagramme par le plus petit polyèdre convexe qui contient les projections des éléments simples de chacun des 20 ensembles métamères. Les enveloppes des volumes V sont indiqués à la *figure 6-2*. les projections de leurs centres de gravité (x_g, y_g, Y_g), calculés dans l'espace chromatique (x_{10}, y_{10}, Y_{10}) sont représentées par une étoile (voir tableau I). Chaque centre de gravité est relié sur la *figure 6-2* au point du diagramme de chromaticité CIE-1931 (représenté avec les mêmes axes), dont les coordonnées trichromatiques (x,y) définissent l'ensemble correspondant des métamères (voir tableau I).

La combinaison de la *figure 6-2* et du tableau I est riche en information sur les divergences existant entre la perception des couleurs des deux observateurs. Par exemple, le fait que l'observateur de référence supplémentaire CIE-1964 est plus sensible dans le domaine bleu et bleu-vert est apparent dans le tableau I où la luminance moyenne Y_g d'un ensemble F est de l'ordre de 140 ou plus quand les coordonnées trichromatiques (x,y) de cet ensemble métamère sont dans le même domaine de teinte pour l'observateur de référence CIE-1931. Les calculs indiquent aussi que les variations de luminosité peuvent être très grandes (37 %) pour un ensemble

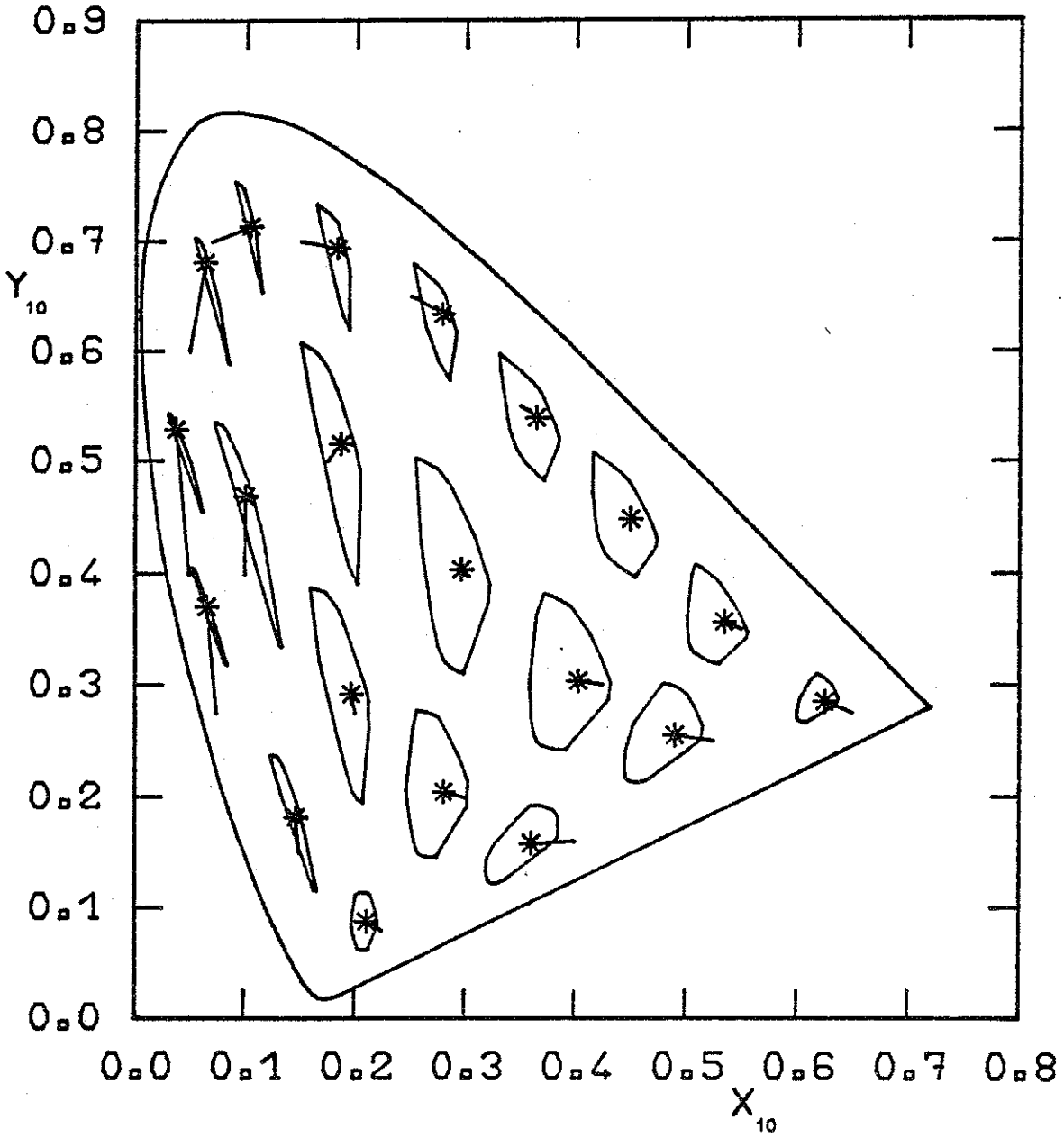


Figure 6-2 : *Limites dans le diagramme chromatique CIE-1964 des volumes des inégalités chromatiques des 20 ensembles métamères F définis au tableau I. Le centre de gravité (x_g, y_g, Y_g) de chacun des ensembles des éléments simples est noté par une étoile et est relié au point de coordonnées trichromatique (x,y) CIE-1931 indiqué sur les mêmes axes. Ce point défini l'ensemble métamère correspondant (voir tableau I).*

de fonctions métamères lorsqu'elles sont vues par le second observateur. D'autre part, comme prévu, le volume V est plus large au centre du diagramme chromatique (région du blanc) et décroît au fur et à mesure que les coordonnées trichromatiques se rapprochent du lieu spectral.

La figure 6-3 représente la situation inverse. Nous avons en effet calculé les ensembles métamères pour l'observateur de référence CIE-1964, définis par les 20 triplets des coordonnées du barycentre géométrique (x_g, y_g, Y_g) précédemment calculés. Les volumes V correspondants sont représentés à la *figure 6-3* pour l'observateur de référence CIE-1931. Un résultat intéressant ressort du tableau I : les nouveaux centre de gravité (x'_g, y'_g, Y'_g) se retrouvent pratiquement situés aux coordonnées initiales (x, y, 100) avec une précision de l'ordre de 1 %. Cela signifie, au moins pour les deux observateurs considérés qu'il existe une correspondance réciproque entre leurs espaces chromatiques (x, y, Y) ; un point dans l'espace du premier observateur correspond au centre de gravité dans l'espace du second observateur et réciproquement. La question de la généralité de cette intéressante propriété reste posée et nécessite d'autres études. Nous pouvons cependant rappeler que, suivant la statistique développée à la partie 5-2-2, le centre de gravité est le point le plus probable du volume V, ce qui indiquerait que, quand cette statistique est appliquée à deux observateurs différents, elle conduit à des résultats compatibles.

Tous ces résultats ont mis en évidence de grands écarts entre les deux observateurs de référence CIE-1931 et CIE-1964. Ils soulignent l'importance qu'il y a à bien considérer les conditions angulaires du champ d'observation utilisé en pratique. Le choix de l'observateur de référence le mieux adapté en dépend.

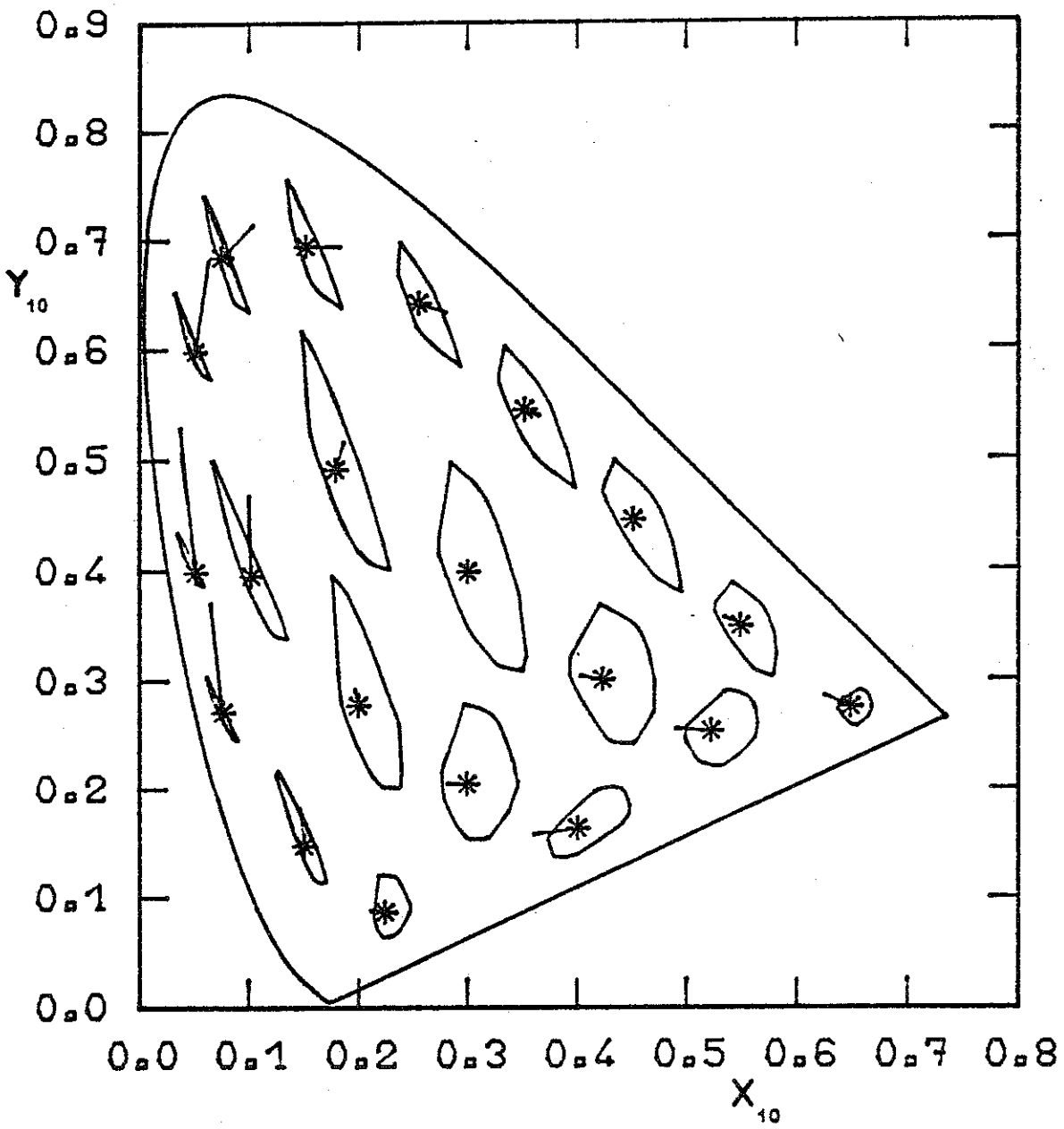


Figure 6-3 : *Limites dans le diagramme chromatique du volume des inégalités chromatiques des 20 ensembles métamères* Γ *qui correspondent à l'observateur de référence CIE-1964 et aux 20 centres de gravité* (x_g, y_g, Y_g) *du tableau I.*

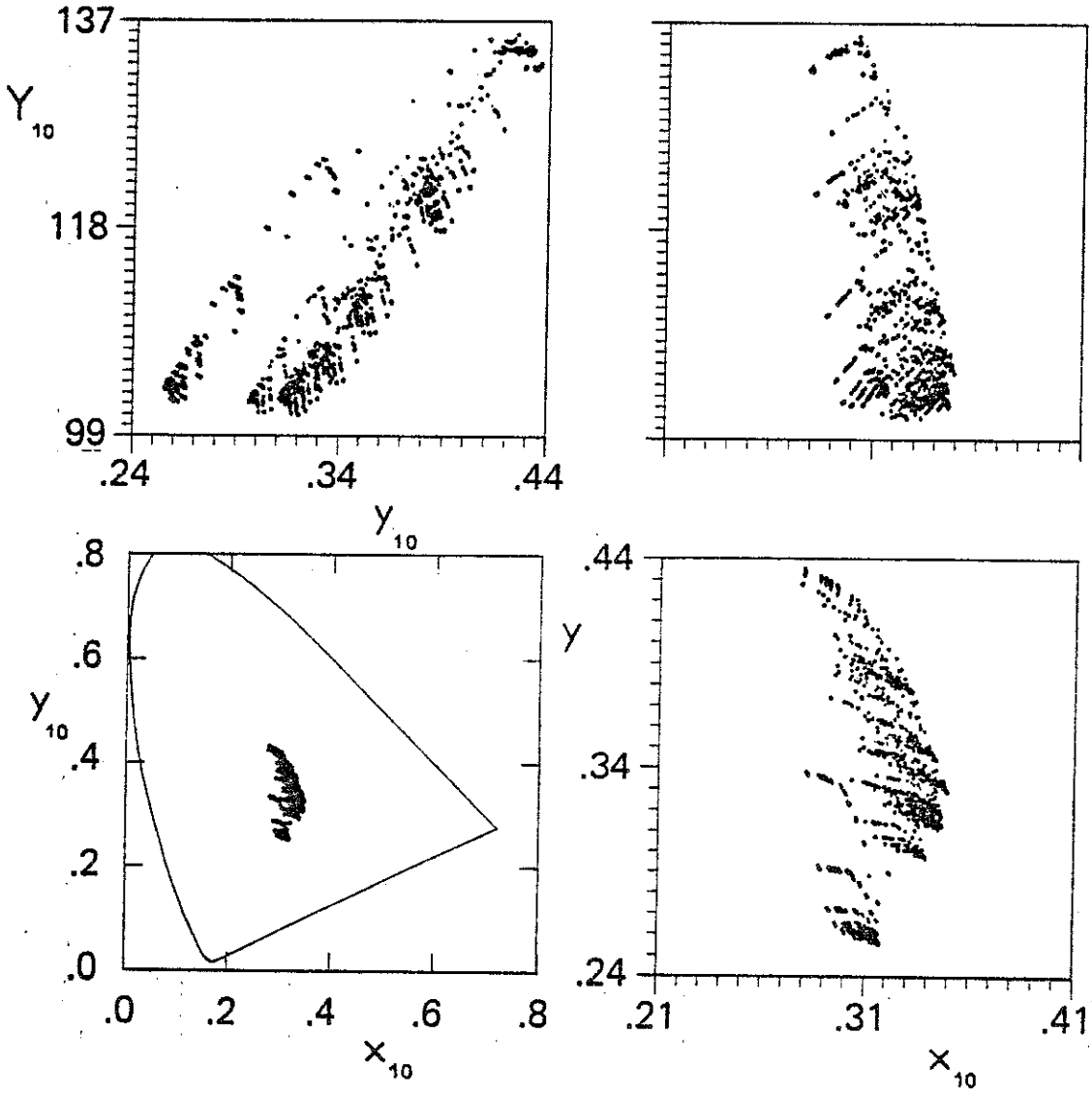


Figure 6-4 : *Projection dans l'espace chromatique (x_{10}, y_{10}, Y_{10}) CIE-1964 des éléments simples de l'ensemble métamères F qui correspond au blanc équiénergétique W avec Y = 100 et à l'observateur de référence CIE-1931. Calculs effectués dans le domaine de 400 à 700 nm avec des intervalles de 10 nm.*

6-1-2 INFLUENCE DES PARAMETRES LIES AU CALCUL

Dans le diagramme chromatique on ne peut faire apparaître qu'une projection du volume des inégalités chromatiques. Afin d'obtenir une meilleure représentation de ce volume, nous donnons à la *figure 6-4* les trois projections (x_{10}, y_{10}), (x_{10}, Y_{10}), (y_{10}, Y_{10}), dans l'espace chromatique (x_{10}, y_{10}, Y_{10}) de l'observateur de référence CIE-1964, correspondant au volume V de l'ensemble métamère F(0.333314, 0.333288, 100, observateur CIE-1931). Les stimuli de couleur de cet ensemble sont métamères au blanc équiénergétique W. Le calcul a été effectué comme précédemment pour M = 30 ; nous trouvons 968 éléments simples.

Nous montrons à la *figure 6-5* le résultat d'un calcul très similaire excepté que le domaine d'intégration est étendu de 380 à 770 nm avec le même intervalle de 10 nm (M = 39). Le volume V est très distendu vers les jaunes. Nous avons trouvé que les nouveaux éléments simples responsables de cette déformation ont au moins une composante dans la bande spectrale 380-390 nm, où l'observateur CIE-1931 est bien plus sensible que l'observateur CIE-1964. Cependant ce résultat peut ne pas être très significatif car la mesure des fonctions colorimétriques est difficile et imprécise dans le domaine des très courtes longueurs d'onde.

La *figure 6-6* montre le même volume V calculé avec des intervalles de 5 nm dans le domaine 400-700 nm (M = 60). Les limites de V sont très similaires à celles obtenues dans le cas M = 30, mais le nombre des éléments simples est bien plus grand (N = 7844). Afin d'estimer plus précisément qu'elle est la différence correspondant aux figures *6-4* et *6-6*, nous comparons la distribution des éléments simples dans l'espace chromatique (x_{10}, y_{10}, Y_{10}) par la méthode d'analyse statistique décrite au paragraphe 5-2-3. Les différentes vues de l'ellipsoïde des écarts types centré au centre de gravité des projections des éléments simples, sont représentées à la *figure 6-7*. Les enveloppes du volume V pour les cas M = 30

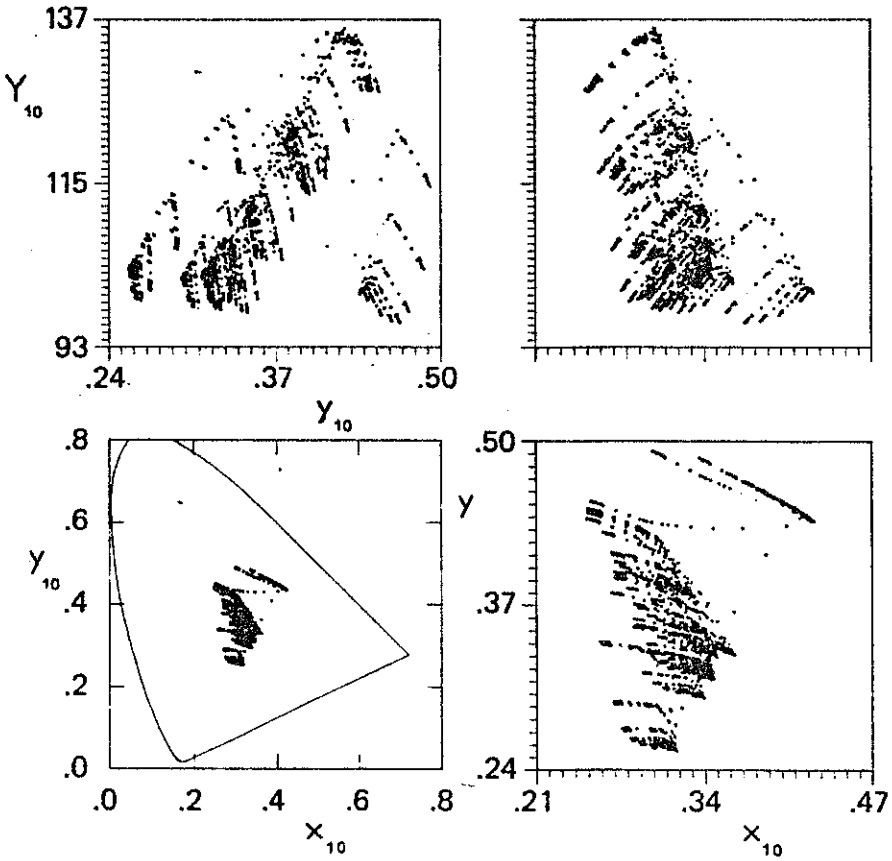


Figure 6-5 : *Identique à la figure 6-4, mais pour des calculs effectués dans le domaine de 380 à 770 nm avec des intervalles de 10 nm.*

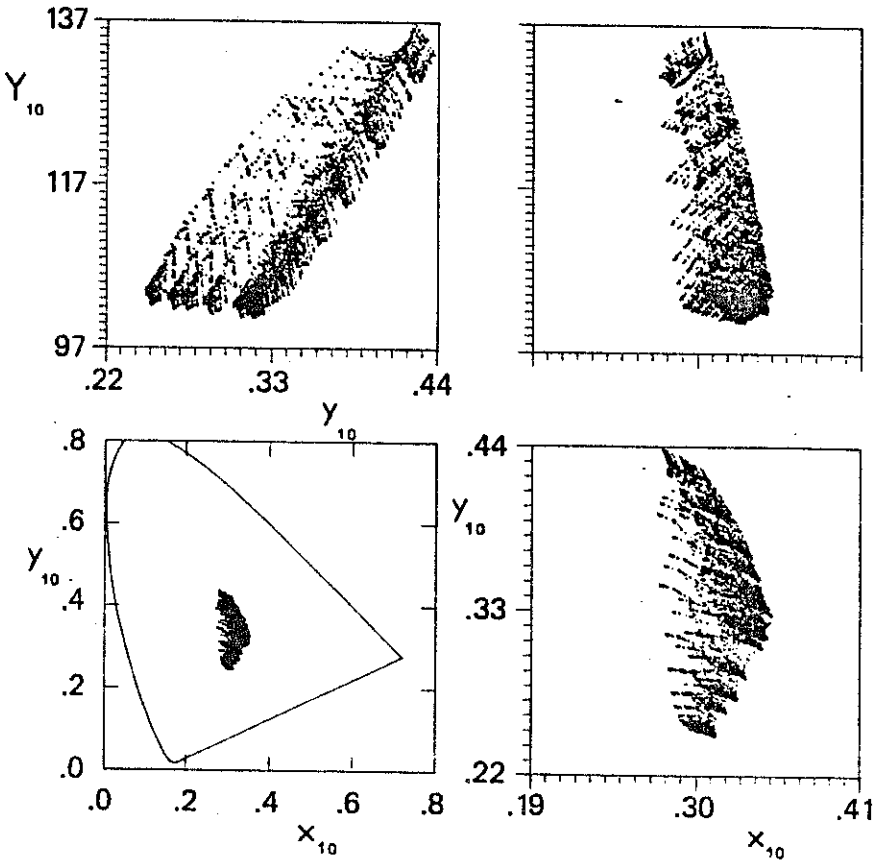


Figure 6-6 : *Identique à la figure 6-4, mais pour des calculs effectués dans le domaine de 400 à 700 nm avec des intervalles de 5 nm.*

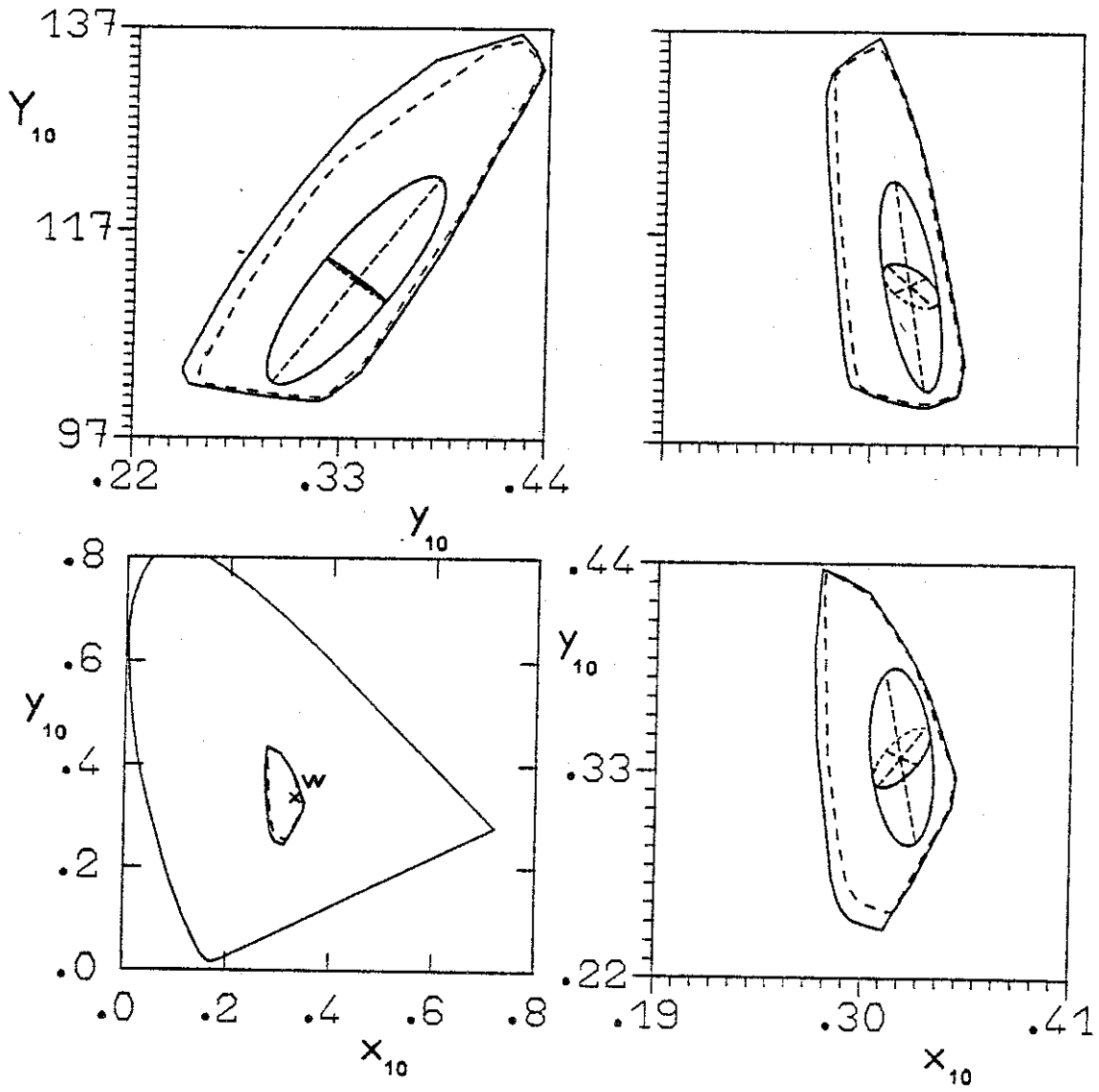


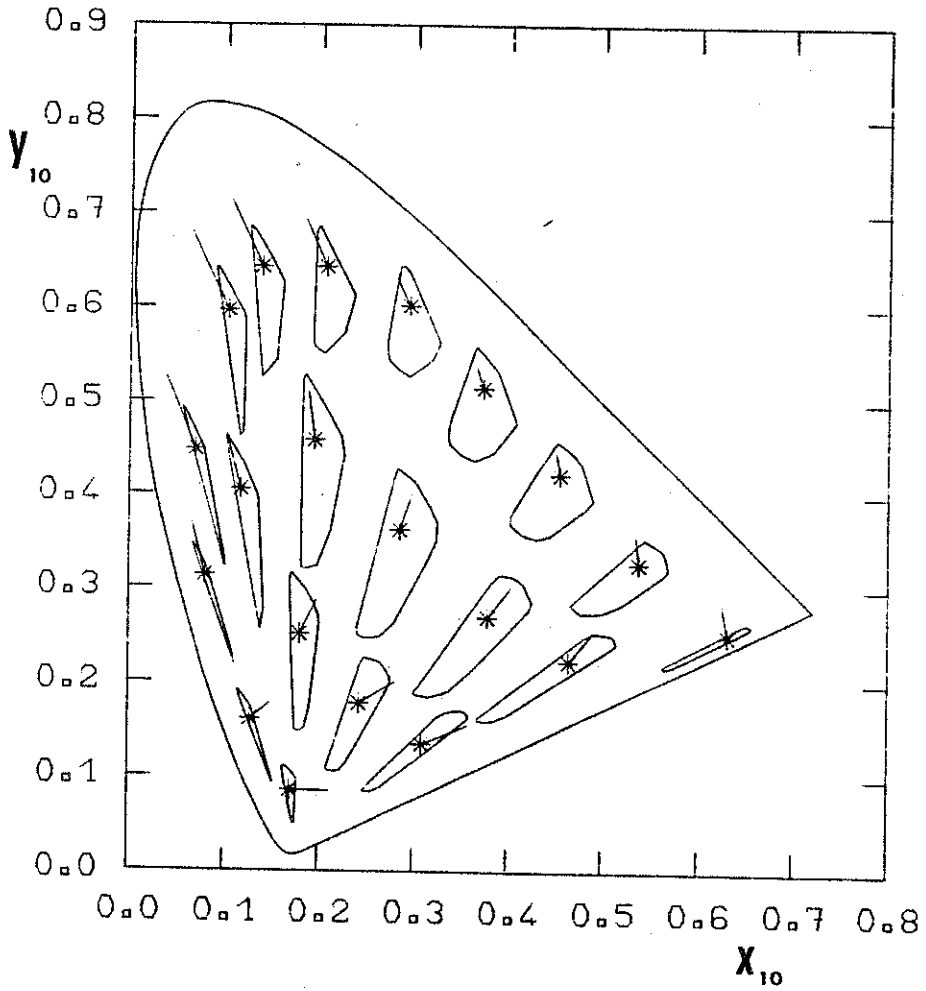
Figure 6-7 : *Limites du volume des inégalités chromatiques dans l'espace chromatique (x_{10}, y_{10}, Y_{10}) CIE-1964, correspondant à l'ensemble métamère F du blanc équiénergétique W(Y = 100) et à l'observateur de référence CIE-1931. Calculs effectués dans le domaine de 400 à 700 nm avec des intervalles de 5 nm. L'ellipsoïde des écarts types calculé avec la distribution des projections des éléments simples est indiqué. Les lignes pointillées représentent les limites du même volume pour un calcul effectué avec des intervalles de 10 nm.*

et M = 60 y sont aussi représentées. Les calculs effectués avec des intervalles de 5 nm semblent mener à une forme de V légèrement plus grande et plus précise que celle obtenue avec des intervalles de 10 nm. Cependant, dans les deux cas, les ellipsoïdes des écarts types sont très similaires puisque leurs paramètres ne diffèrent pas de plus de 0,2 %. Le choix des largeurs d'intervalle n'influe donc pas sur la distribution de probabilité des projections des fonctions métamères aléatoires générées suivant notre méthode décrite au chapitre 5.

6-1-3 VARIABILITE DES OBSERVATEURS REELS

Nous avons comparé l'observateur de référence CIE-1964 avec les 20 observateurs réels dont les données ont été publiées par WYSZECKI et STILES (réf. /12/). Leurs fonctions colorimétriques $\bar{r}(\lambda)$ $\bar{v}(\lambda)$, $\bar{b}(\lambda)$ ont été transformées par la matrice indiquée en réf. /12/, p. 327. Cette matrice permet d'obtenir un système très proche de celui dans lequel est exprimé l'observateur CIE-1964. Nous avons calculé les 20 ensembles métamères de coordonnées (x'_g, y'_g, 100) (voir Tableau I), définis dans l'espace chromatique (x, y, Y) de chaque individu, puis leurs volumes des inégalités chromatiques correspondant à l'espace chromatique (x_{10}, y_{10}, Y_{10}) CIE-1964. Nous présentons à la *figure 6-8* les exemples obtenus pour deux observateurs réels dont les résultats sont particulièrement différents.

La figure 6-9 représente les volumes V correspondant aux mêmes ensembles de métamères mais calculés avec l'observateur de déviation standard d'Allen (1969b) (voir paragraphe 3-2-2-1). L'orientation de la déformation des volumes obtenus ainsi que leurs tailles correspondent assez bien en moyenne à celles constatées sur ceux des 20 observateurs réels.



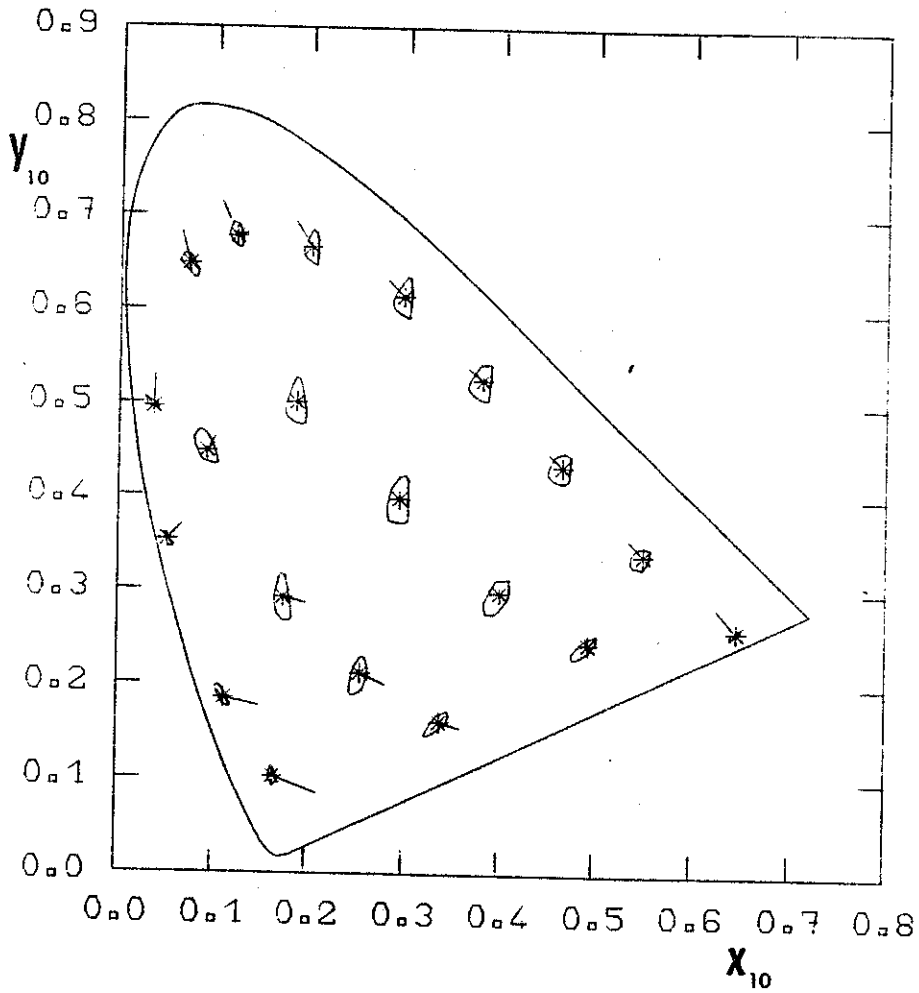


Figure 6-8 : Comparaison entre deux observateurs réels (Wyszecki et Stiles, Réf. /12/) et l'observateur de référence CIE-1964.

La variabilité entre individus réel semble donc être moins importante que les différences entre les deux observateurs de référence de la CIE.

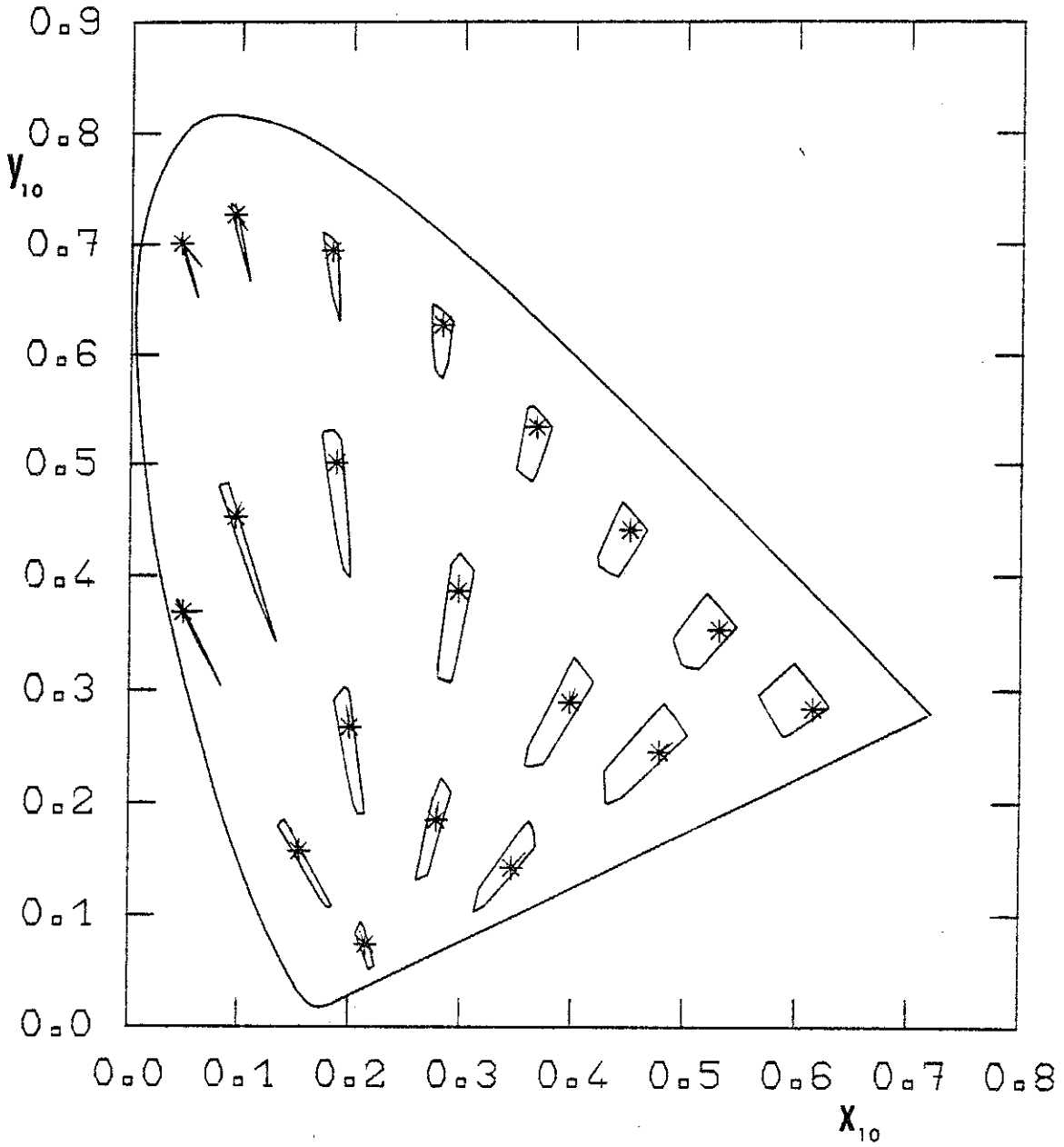


Figure 6-9 : Comparaison entre l'observateur de déviation standard d'Allen (1969b) et l'observateur de référence CIE-1964.

:: En conclusion la méthode des éléments simples apparaît être appropriée à l'analyse comparative des propriétés colorimétriques de différents observateurs. Le calcul numérique est assez facilement programmable et son temps d'exécution est relativement rapide. La détermination des éléments simples de l'ensemble F correspondant aux *figures 6-4 et 6-6* ont nécessité sur un calculateur CII-IRIS 80 un temps d'unité centrale de : 2.5 s et 19.4 s respectivement. On a pour celà mis au point un algorithme rapide décrit en annexe II. Il effectue une recherche optimisée des éléments simples en ne testant pas systématiquement chacune des C_3^M combinaisons possibles de bandes spectrales. Le choix de M = 30 pour le nombre d'intervalles de 10 nm compris entre 400 et 700 nm procure une excellente détermination du volume des inégalités chromatiques de l'ensemble F. La représentation des différentes projections de ce volume et de l'ellipsoïde des écarts types associé, ont nécessité la résolution de différents problèmes :

- algorithme de recherche de l'enveloppe polygonale convexe d'un nuage de points projetés dans un plan (il permet de tracer automatiquement les limites théoriques de V).

- Tracé en perspective de l'ellipsoïde des écarts types avec axes principaux, petite ellipse et contour elliptique de sa vue projective.

6 - 2 VOLUME DES INEGALITES CHROMATIQUES DANS LES PROBLEMES DE COULEUR D'OBJET

Dans les prochains exemples, nous calculons les limites théoriques des inégalités chromatiques dans le cas des problèmes de réflexion. Autrement dit, nous calculons le volume V consécutif à une modification des conditions d'observations et correspondant à l'ensemble $R(X, Y, Z, S(\lambda))$ pour un observateur donné. Les éléments simples de cet ensemble sont recherchés sachant qu'ils vérifient les équations *(4-10)*, *(4-12)* et *(5-2)*. Dans les problèmes de réflexion où le spectre est découpé en M bandes, on peut déduire de l'allure des courbes des éléments simples (voir *figure 4-1)* que leur nombre est inférieur au nombre théorique maximum $2^{M-3}\ C_3^M$ - qui est excessivement grand.

6-2-1 RECHERCHE D'UN SOUS-ENSEMBLE DES ELEMENTS SIMPLES

Le temps de calcul peut cependant être considérablement réduit en ne considérant que des éléments simples pour lesquels il n'existe que trois transitions entre les valeurs égales à 1 d'une part et celles égales à 0 ou à des valeurs intermédiaires d'autre part. Ceci se traduit par une réduction énorme du nombre d'éléments simples à calculer. Ceux qui sont éliminés devraient se projeter à l'intérieur du volume V et non pas sur ses limites extérieures. Cette simplification est fondée sur les résultats d'Ohta et Wyszecki (1975a) qui généralisèrent ceux obtenus par Schröndiger (1920) et Mac Adam (1935). Les calculs effectués par Ohta et Wyszecki avec un nombre fini M de bandes spectrales, indiquent que le théorème de SCHRÖDINGER pourrait être étendu à un plus grand nombre de contraintes linéaires : l'hypothèse où $\Delta\lambda \to 0$ avec $M \to \infty$ les courbes extrêmes des facteurs spectraux de réflexion (celles qui se projètent sur les limites de V)

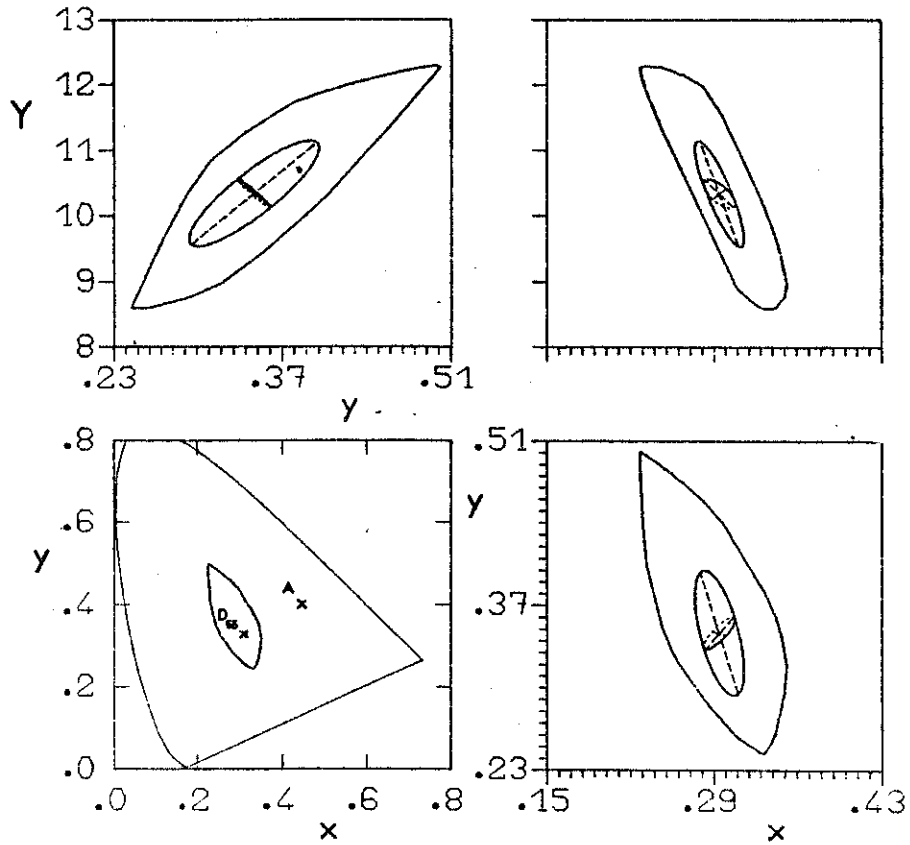


Figure 6-10 : *Limites du volume des inégalités chromatiques et ellipsoïde des écarts types dans l'espace chromatique (x, y, Y) CIE-1931 pour les gris métamères à Y = 10 %. Illuminant de référence A ; illuminant d'essai : D_{65}.*

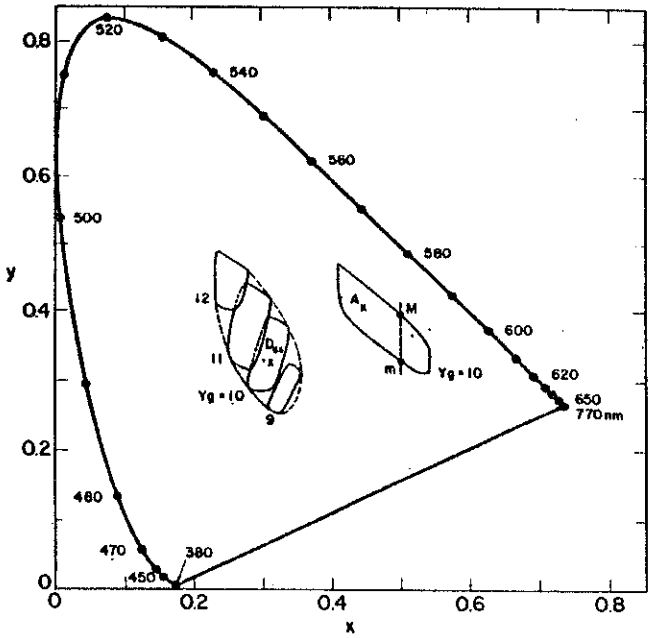


Figure 6-11 : *Résultats de OHTA et WYSZECKI (1975a). Coupes du volume des inégalités chromatiques des gris métamères à Y = 10 % dans l'espace chromatique (x, y, Y) CIE-1931.*
Gauche : Illuminant de référence A ; illuminant d'essai : D_{65} (coupes à Y = 9, 10, 11, 12,
droite : Illuminant de référence : D_{65} ; illuminant d'essai : A (coupe à Y=10).

auraient un nombre de transitions égal au nombre de contraintes linéaires. Dans notre cas, les éléments simples sont soumis aux trois équations linéaires *(4-10)*. Par conséquent leurs courbes extrêmes correspondant aux limites théoriques de V n'auraient que trois transitions. Afin de vérifier cette assomption d'OHTA et WYSZECKI et pour prendre aussi en compte le fait que notre modèle possède un nombre fini d'éléments spectraux, nous résolvons le problème à la fois pour trois transitions et quatre transitions.

Les algorithmes mis en oeuvre ont été optimisés d'une manière similaire à celle décrite en annexe II pour les ensembles F.

6-2-2 APPLICATION AU METAMERISME D'ILLUMINANT

Un ensemble métamère R est défini pour un observateur et un illuminant. Nous allons tout d'abord étudier les limites du métamérisme pour un changement d'illuminant, en appliquant la méthode des éléments simples à des problèmes déjà résolus par OHTA et WYSZECKI (1975a, 1975c) avec les techniques de programmation linéaire.

Nous calculons l'ensemble métamère qui correspond aux gris à 10 % vu par l'observateur de référence CIE-1931 sous l'illuminant de référence A de la CIE : R(0.447574, 0.407439, 10 %, A, CIE-1931). Les Calculs sont effectués sur le domaine 400-700 nm avec des intervalles de 10 nm et des courbes de réflexion à 4 transitions. La figure *6-10* montre le volume V obtenu quand l'illuminant A est remplacé par l'illuminant de référence D_{65} de la CIE. Nous obtenons pour les limites théoriques de V des résultats très similaires à ceux obtenus par OHTA et WYSZECKI (1975a) qui sont reproduits à la *figure 6-11*. Nous indiquons à la *figure 6-10* l'ellipsoïde des écarts types qui correspond à l'ensemble des projections des éléments simples pris en considération dans ce calcul (4 transitions).

Nous avons aussi calculé le cas inverse : le volume V qui correspond à l'ensemble des gris métamères R(0.312727, 0.329024, 10 %, D_{65}, CIE-1931) vus par le même observateur sous l'illuminant de référence A, est indiqué à la *figure 6-12*.

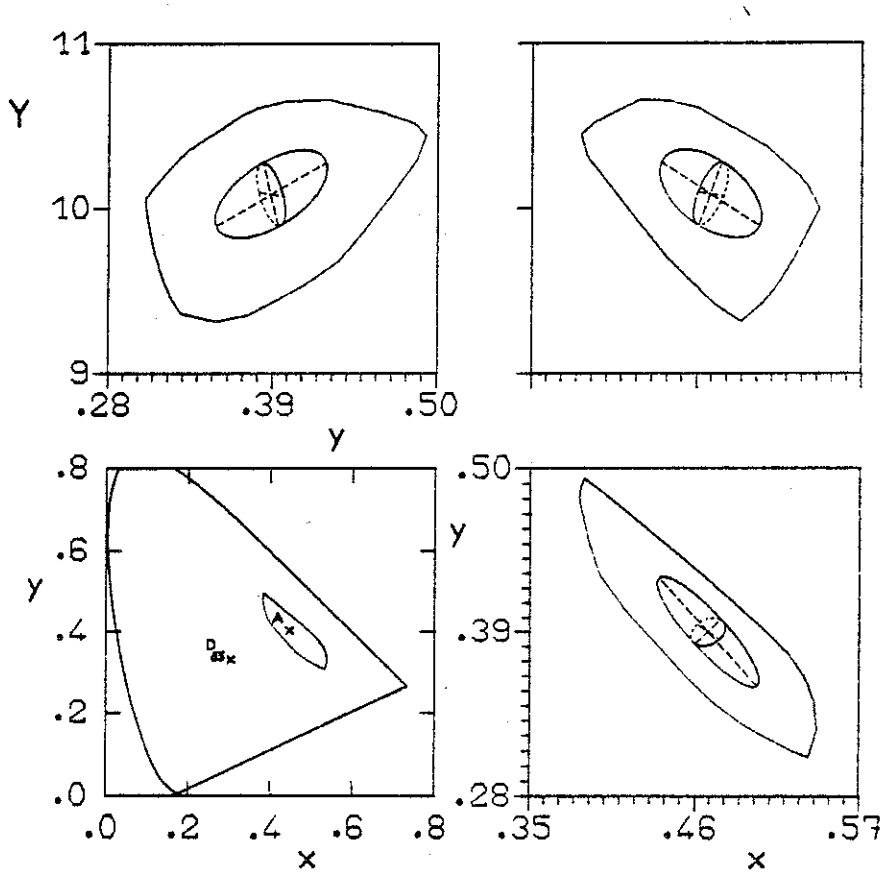


Figure 6-12 : *Limites du volume des inégalités chromatique et ellipsoïde des écarts types pour les gris métamères à Y = 10 %. Illuminant de référence : D_{65} ; illuminant d'essai : A*

Ces résultats sont encore parfaitement en accord avec ceux obtenus par les techniques de programmation linéaire (voir *figure 6-11)*. Pour ce calcul le nombre d'éléments simples est 110370 ce qui est encore un nombre très grand. Il a nécessité 12mn 2s de temps d'unité centrale sur le calculateur CII-IRIS 80. Le même problème a été effectué en se limitant aux éléments simples ayant au plus 3 transitions. Leur nombre a été réduit à 38085 (temps de calcul Δt = 4 mn 7 s) mais les limites du volume V correspondant sont, à la précision des calculs, identiques aux limites obtenues avec des éléments simples à 4 transitions. Ce résultat confirme l'hypothèse de OHTA et WYSZECKI sur la possibilité d'extension du théorème de Schroëndiger.

6-2-3 REDUCTION SUPPLEMENTAIRE DU TEMPS DE CALCUL

Afin d'étudier les possibilités de réduction des frais de calcul, la même résolution pour l'ensemble des gris métamères R(0.312727, 0.329024, 10 %, D_{65}, CIE-1931) vus sous l'illuminant de référence A, a été faite avec des bandes spectrales de largeur 20 nm (M = 15).A nouveau, nous avons fait des essais pour les éléments simples à 4 transitions et ceux à 3 transitions. Le temps de calcul a été très fortement réduit : Δt = 5.2 s et 4.3 s respectivement ; le nombre des éléments simples est devenu : 1088 et 893. Dans ce cas aussi, les éléments simples limités à 3 transitions donnent les mêmes résultats que ceux à 4 transitions. Le volume V est indiqué à la *figure 6-13* où il apparaît être légèrement plus petit que celui calculé avec des intervalles de 10 nm.

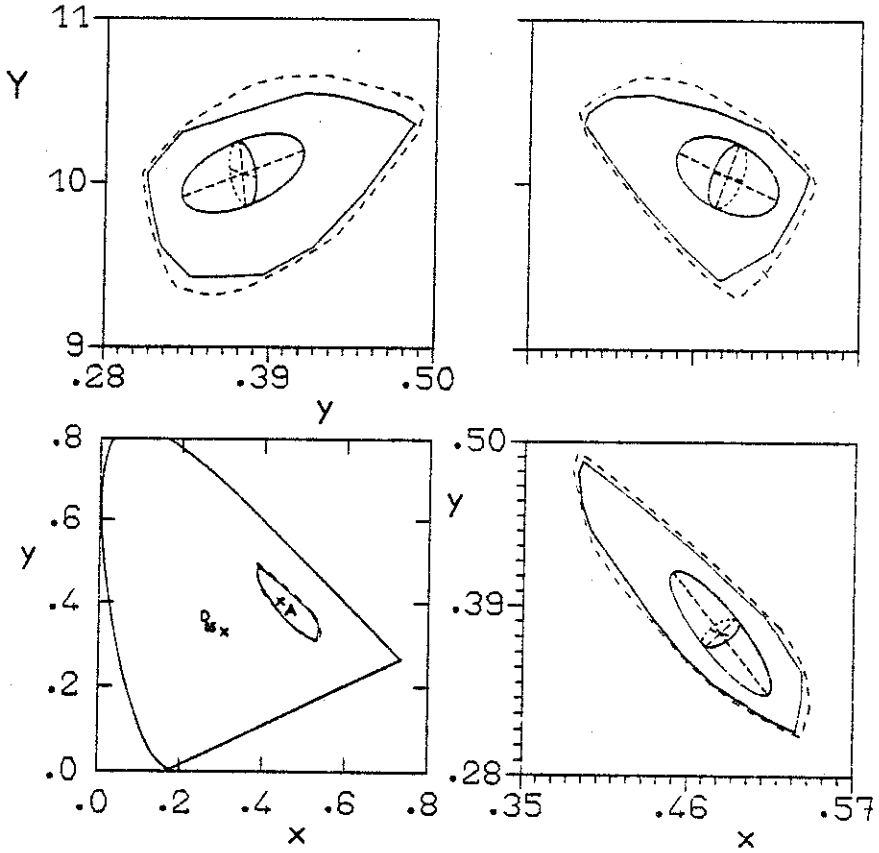


Figure 13 : *Identique à la figure 6-10 mais pour des calculs effectués avec des intervalles de 20 nm. Les limites pour les intervalles de 10 nm sont indiqués en pointillées.*

Cependant la forme générale et les dimensions de V restent très bien définies. Les projections des éléments simples à 4 transitions sont indiquées à la *figure 14*.

La distribution statistique des éléments simples à 4 transitions pour M = 30 et M = 15 peut être aussi comparé à l'aide des *figures 6-12* et *6-13*. La forme générale des ellipsoïdes des écarts types est semblable, mais il apparaît une légère translation du centre de gravité, produite peut être par le fait que nous ne traitons qu'un sous-ensemble particulier des éléments simples.

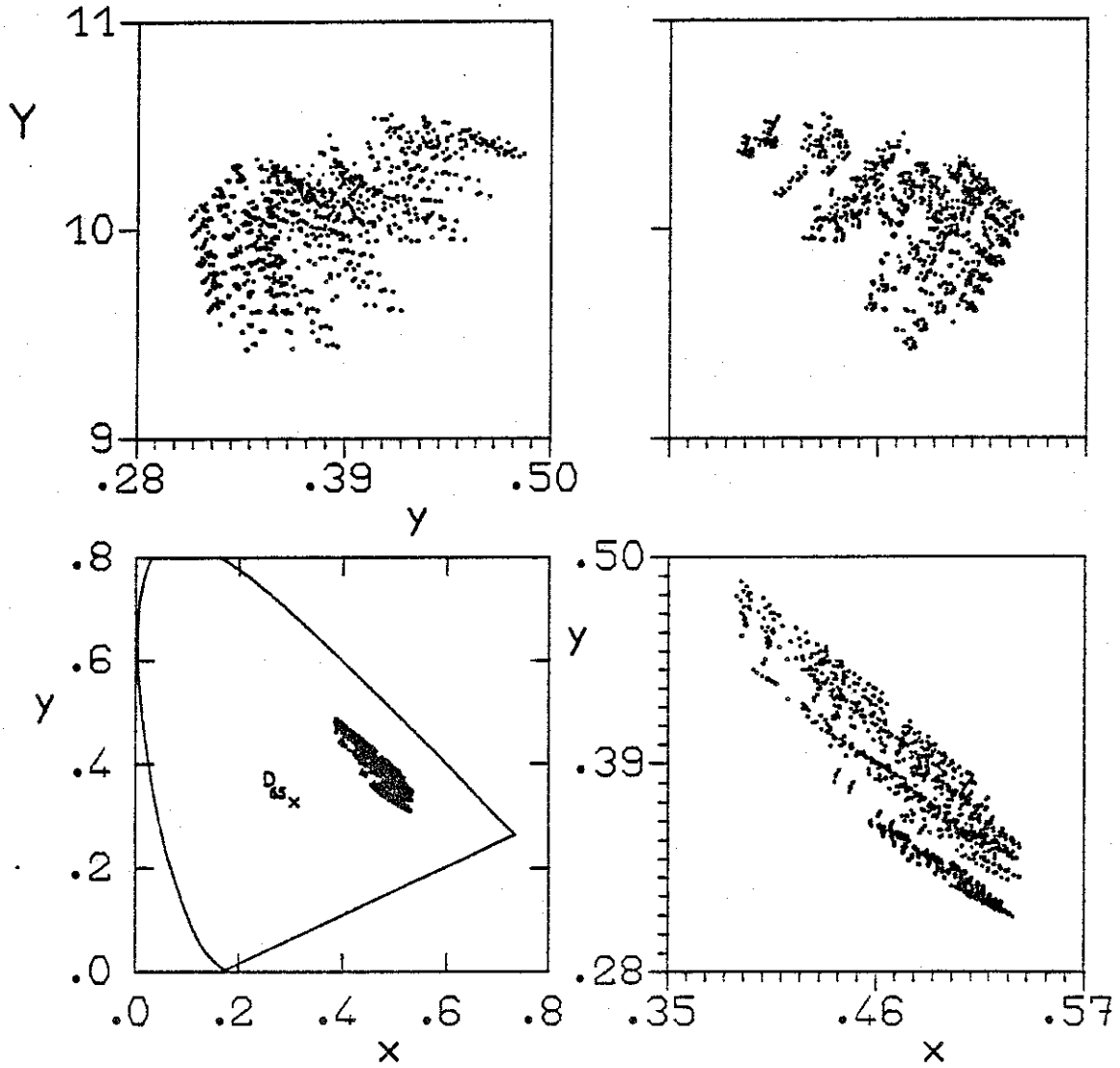


Figure 6-14 : *Projection des éléments simples obtenus pour des intervalles de 20 nm comme à la figure 6-11.*

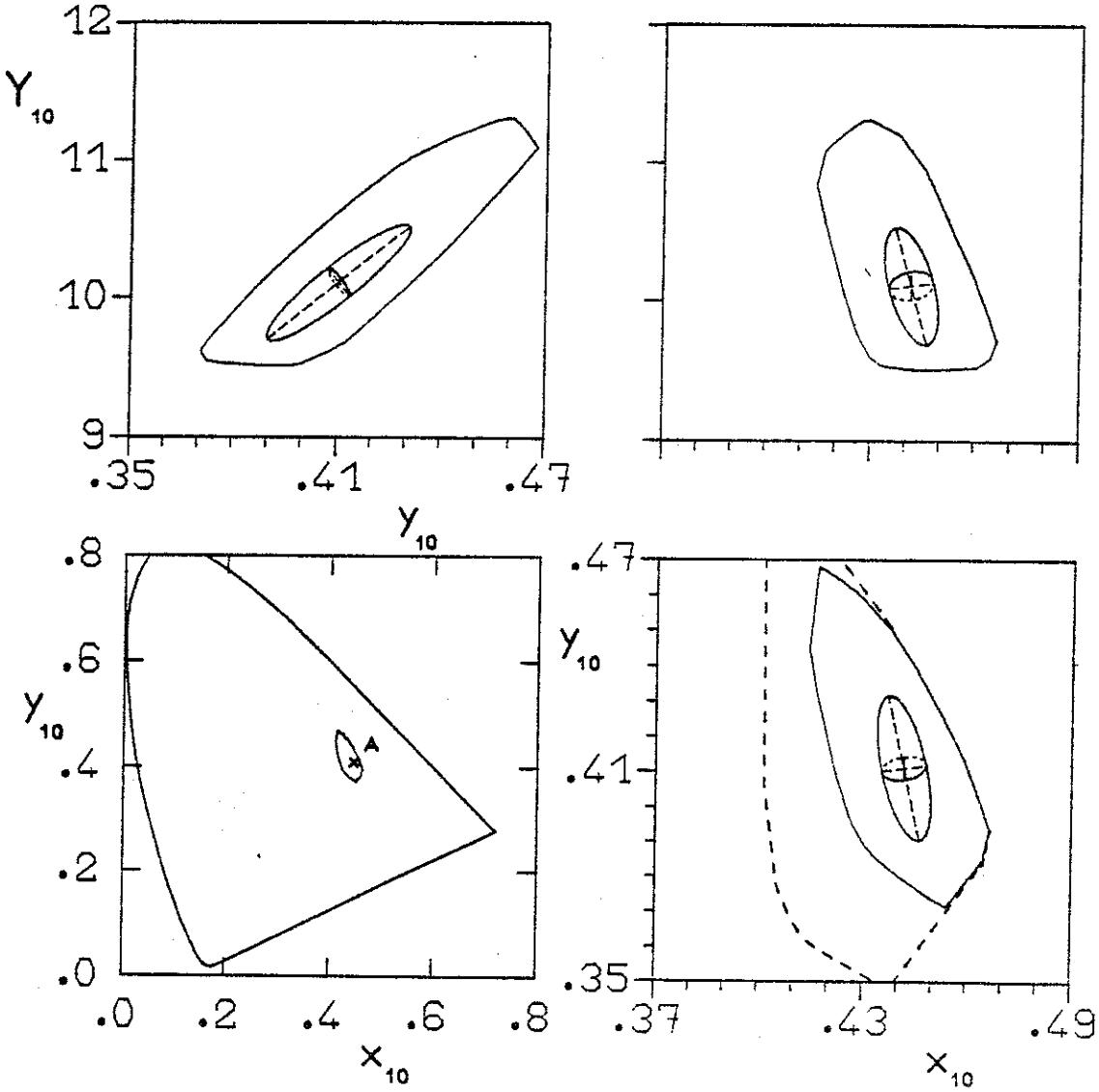


Figure 6-15 : *Limites du volume des inégalités chromatiques et ellipsoïde des écarts types dans l'espace chromatique (x_{10}, y_{10}, Y_{10}) CIE-1964 pour les gris à Y = 10 % qui sont métamères pour l'observateur de référence CIE-1931. Illuminant de référence : A. Les lignes pointillées indiquent le volume des inégalités chromatiques qui correspond au même changement d'observateur pour l'ensemble métamère F défini aux coordonnées trichromatiques de A.*

6-2-4 APPLICATION AU METAMERISME D'OBSERVATEUR

Nous allons étudier les limites du métamérisme dans le cas d'un changement d'observateur et retrouver notamment les résultats théoriques du paragraphe 4-3-3-3 où nous avions indiqué que les ensembles F correspondaient au cas limite d'ensembles R particulier.

⁘ Considérant l'ensemble des gris métamères R(0.447574, 0.407439, 10 %, A, CIE-1931) relatif à l'observateur de référence CIE-1931, nous calculons le volume V correspondant dans l'espace chromatique de l'observateur CIE-1964. Les résultats sont indiqués à la *figure 6-15*, (de nouveau les éléments simples à 4 transitions ou à 3 transitions conduisent à des résultats identiques). Dans la projection (x_{10}, y_{10}) de la *figure 6-15*, nous avons tracé en pointillé les limites du volume V correspondant à l'ensemble des stimuli métamères F(0.447574, 0.407439, A, CIE-1931) vu par l'observateur CIE-1964. On voit bien qu'il contient entièrement le volume V de l'ensemble R précédent. Le volume V généré par cet ensemble F représente la limite extrême des volumes V des ensembles de couleurs d'objet métamères R(0.447574, 0.407439, Y, A, CIE-1931), qui peut être atteinte lorsque Y tend vers zéro.

⁘ Si nous comparons les *figures 6-10* et *6-15*, nous constatons que dans les deux cas les limites du volume V obtenu et l'ellipsoïde des écarts types sont assez voisins en forme et en direction -leur taille dans la *figure 6-15* étant cependant plus petite-. La première figure correspond au changement d'illuminant : A → D_{65}, la seconde au changement d'observateur : CIE-1931 → CIE-1964. Cette similitude tend à confirmer l'opinion d'HEMMENDIGER et BOTTINGER (1977) selon laquelle le métamérisme d'observateur peut assez bien se représenter par le métamérisme d'illuminant (voir fin du paragraphe 3-2-2-1). Il faut cependant bien préciser qu'il ne s'agit pas là d'un résultat général ; il ne s'applique que pour les 2 observateurs et les 2 illuiminants

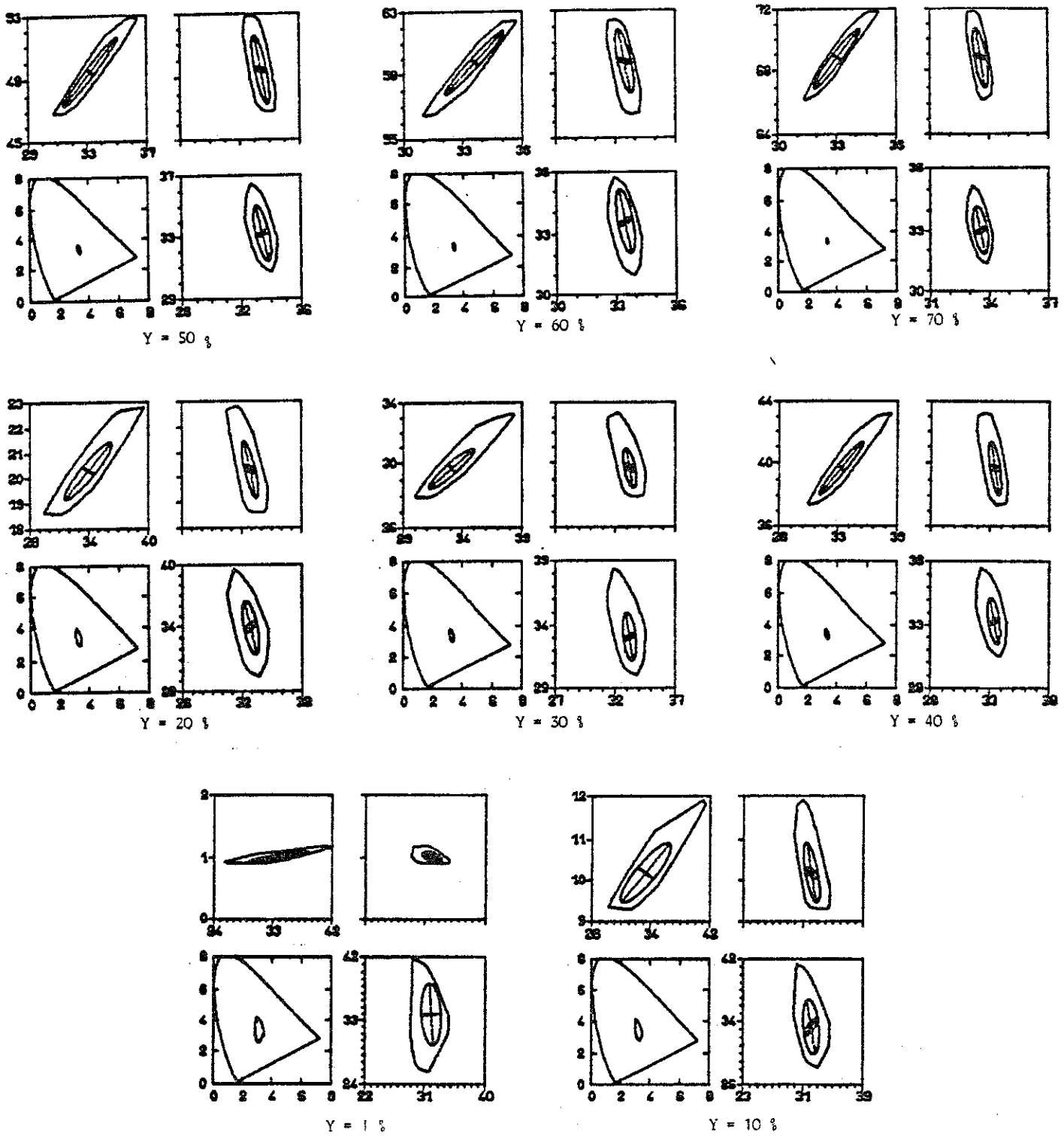


Figure 6-16 : *Limites de 8 volumes des inégalités chromatiques dans l'espace chromatique* (x_{10}, y_{10}, Y_{10}) *CIE-1964 pour des ensembles métamères* R *définis aux coordonnées trichromatiques du blanc équiénergétique W avec* $Y = 1, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70$ *% et correspondant à l'observateur de référence CIE-1931. Illuminant de référence :* D_{65}.

considérés ci-dessus. Le fait que le volume V de la *figure 6-15* soit environ 3 fois plus petit que celui de la *figure 6-10* tendrait lui à confirmer un des résultats expérimentaux de MORADIAN, COATES et RIGG (1977) selon lesquels le métamérisme d'observateur est faible par rapport au métamérisme d'illuminant. C'est d'autant plus vrai que notre changement d'observateur (CIE-1931 → CIE-1964) est très important comparé aux variations entre individus normaux placés dans des conditions d'observations semblables (voir paragraphe 6-2-1 et 6-2-3).

* Nous donnons à la *figure 6-16* un exemple où le volume V évolue en fonction d'un seul paramètre, le facteur de réflexion, pour un ensemble de couleurs d'objet métamères de chromaticité fixé. Nous avons représenté pour l'observateur CIE-1964 8 volumes V correspondant aux ensembles R(0.3333314, 0.333288, Y, D_{65}, CIE-1931) ayant la même chromaticité que le blanc équiénergétique W, (Y = 1, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70 %). On trouve pour Y = 1 %, que la projection de V dans le diagramme chromatique (x_{10}, y_{10}) est identique à celle pour l'ensemble F(0.3333314, 0.333288, 100, CIE-1931) (voir *figure 6-7*).Ce résultat indique qu'il existe une propriété plus générale que celle qui a été démontrée en 4-3-3-3 : tout ensemble de couleur d'objet métamère R(x, y, Y, S(λ), observateur P) est équivalent quand Y → 0 à l'ensemble des stimuli métamères F(x, y, Y, observateur P) et ceci quelque soit la source S(λ) (vérifiant $S_i > 0$, i = 1 à M pour écarter les cas singuliers). On constate d'autre part que la taille de la projection de V dans le diagramme chromatique se réduit au fur et à mesure que Y croit. L'écart maximum ΔY du facteur de réflexion dans un volume V passe par un maximum vers Y = 50 % mais l'écart relatif maximum ΔY/Y diminue constamment pour des valeurs de Y croissantes.

conclusion

CONCLUSION

Nous entamerons cette conclusion par un examen critique de la contribution de notre recherche à la connaissance du domaine de la couleur. Nous avons analysé le phénomène du métamérisme par une approche théorique et avons dégagé une propriété permettant une caractérisation très claire des ensembles métamères : ceux-ci possèdent un nombre fini d'éléments particuliers que nous avons appelées éléments simples. A partir d'eux peut être obtenu l'ensemble complet. La nouvelle méthode de génération des courbes métamères que nous en avons déduite est par nature très différente des méthodes proposées antérieurement. Au contraire de celles-ci, elle n'a pas pour but la recherche d'un nombre limité de solutions mais, elle est adaptée à la détermination d'un grand nombre de courbes notamment lors d'études statistiques. C'est de la recherche des éléments simples que dépend essentiellement le temps de calcul. Ensuite, l'obtention d'une fonction métamère est directe et rapide.

L'application la plus intéressante du calcul des éléments simples concerne l'évolution du métamérisme après une modification des conditions d'observation. Nous avons développé dans le chapître 5 une méthode originale permettant de caractériser simultanément les limites théoriques du volume V des inégalités chromatiques et la répartition des nouveaux points de couleur des fonctions métamères. Cette méthode à l'originalité de pouvoir s'appliquer à toutes les couleurs réelles. Elle laisse aussi un degré de liberté pour le choix des fonctions permettant un lissage plus ou moins grand. Cependant, pour l'approche statistique nous avons choisi les hypothèses les plus simples possibles. Il faudrait envisager d'utiles prolongements de cette étude avec des hypothèses qui soient plus proches des conditions réelles.

Comme le montrent les exemples numériques la méthode des éléments simples s'applique aisément aux ensembles de stimuli de couleur, rendant possible la comparaison de la vision colorée de différents observateurs.

.../...

Dans le cas des ensembles métamères relatifs aux couleurs d'objet, la méthode permet d'étudier le métamérisme d'illuminant ou d'observateur ou le rendu des couleurs d'une lampe. Mais le nombre d'éléments simples est alors trop élevé pour que nous puissions en faire la recherche complète. On se limite donc à un de leurs sous-ensembles particulier en faisant l'hypothèse que les dimensions du volume ne s'en trouvent pas réduites. Les extrapolations sur lesquelles se fondent ces hypotèses restent à démontrer, moins elles sont vérifiées par les exemples numériques. Le temps de calcul a pu ainsi être considérablement réduit sans affecter sensiblement la précision du résultat.

Nous connaissons l'importance du facteur "coût" lors de l'utilisation de ce type de méthodes dans le domaine industriel. Nous pensons que notre méthode, en diminuant ce coût, permettra des développements intéressants dans les domaines de l'égalisation et de la reproduction des couleurs ou celui de l'éclairagisme.

L'utilisation de notre méthode est aussi une alternative à l'emploi des techniques de programmation linéaire. D'un point de vue plus général la méthode des éléments simples est une approche globale qui s'appose à l'approche ponctuelle de la programmation linéaire indiquant que des applications dans d'autres domaines que celui de la colorimétrie pourraient être envisagées. Nous pensons en particulier à des applications en recherche opérationnelle pour des problèmes dont les contraintes sont semblables à celles que nous avons rencontrées.

ooOoo

annexe 1

ANNEXE I

DEMONSTRATION DE LA PROPRIETE FONDAMENTALE

DES ENSEMBLES DE METAMERES

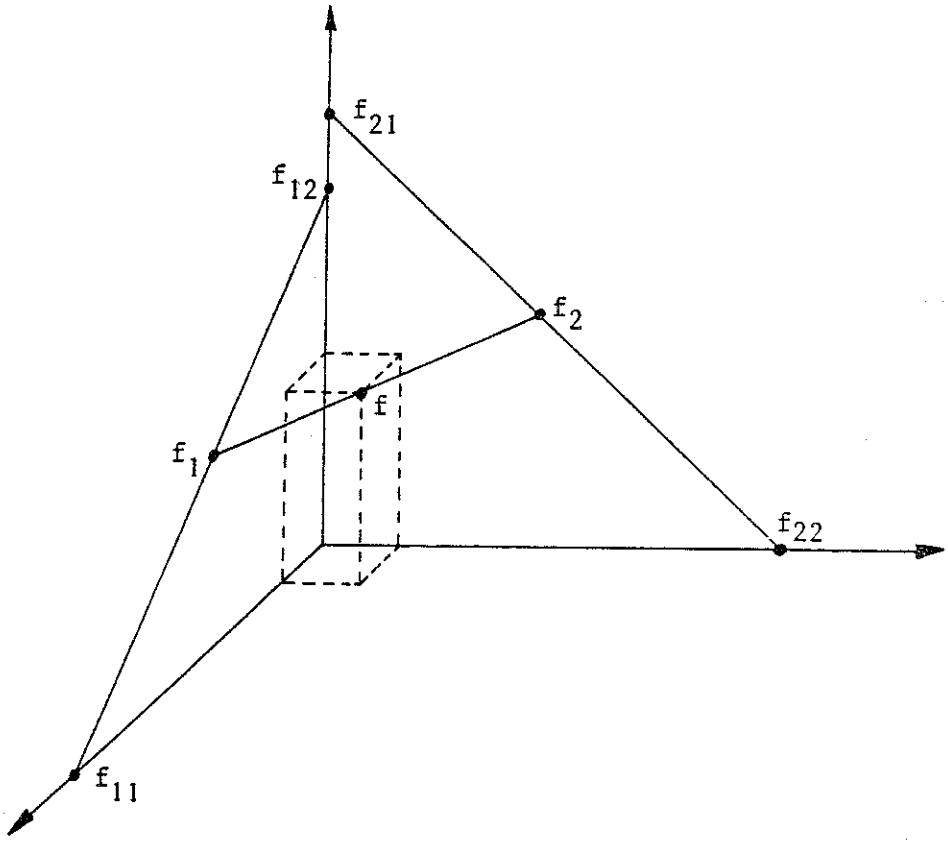
a) Cas de F

Montrons que toute fonction métamère $\vec{f} = (f_i,\ i = 1 \text{ à } M)$ d'un ensemble F peut se décomposer en une combinaison barycentrique positive des éléments simples E^n définies au paragraphe 4-3-1-3 et composés de seulement 3 coordonnées E_i^n non nulles.

Soit p le nombre de coordonnée nulles de la fonction $\vec{f}$ choisie : $0 \leqslant p \leqslant M - 1$

* Si $p \geqslant M-3$, $\vec{f}$ est par définition un élément simple de F
* Si $p \leqslant M-3$, il suffit de démontrer simplement que $\vec{f}$ est le barycentre positif de deux points $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ de F ayant (p + 1) coordonnées nulles. En effet en réitérant cette construction pour chacun des nouveaux points $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$, on obtiendra 4 points $\vec{f}_{11}$, $\vec{f}_{12}$, $\vec{f}_{21}$, $\vec{f}_{22}$ ayant (p + 2) coordonnées nulles. Après quelques étapes on atteindra par cette arborescence des points à q coordonnées nulles, $q \geqslant M-3$, qui sont les éléments simples recherchés. La loi de composition barycentrique à coefficents positifs étant transitive ; on démontrera bien ainsi la proposition de départ.

* Nous avons illustré schématiquement sur la figure ci-dessous, l'esprit de la démonstration en la transposant dans le cas d'un espace à trois dimensions où les éléments simples n'auraient qu'une seule coordonnée non nulle. (f_1 et f_2 ont une composante nulle et f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22} sont des éléments simples.)



Recherchons donc deux points de F, ayant (p + 1) coordonnées nulles, tels que $\vec{f}$ en soit un barycentre positif. Toute permutation sur les indices n'ayant aucune conséquence sur le résultat, nous pouvons écrire :

$$f_q = 0 \quad , \quad (q = 1 \text{ à } p) \qquad (a - 1)$$

$$f_j > 0 \quad , \quad (j = P + 1 \text{ à } M) \qquad (a - 2)$$

$\vec{f}$ étant un élément de F, il vérifie les trois équations du système linéaire (4-5). En lui associant les p équations ($a-1$), on obtient un système de (p + 3) équations indépendantes à M variables f_i. Il y a une infinité de solutions. Choisissons en une quelconque différente de $\vec{f}$: $\vec{f}'$. L'ensemble des points f^α ($\alpha \in R$) de la droite ff' sont aussi solutions :

$$f_i^\alpha = f_i + \alpha (f_i' - f_i) \quad , \quad (i = 1 \text{ à } M) \qquad (a - 3)$$

Mais pour que les points $\vec{f}^\alpha$ appartiennent à F, une condition nécessaire et suffisante est qu'il vérifient les inégalités :

$$f_j^\alpha \geqslant 0 \quad , \quad (j = m+1 \text{ à } M) \qquad (a - 4)$$

Recherchons les valeurs de α pour lesquelles ces conditions sont satisfaites. Pour cela on partitionne l'ensemble (p + 1, p + 2, ... M) en trois sous-ensembles J_1, J_2, J_3 tels que :

$$j \in J_1 \iff f_j' > f_j$$

$$j \in J_2 \iff f_j' < f_j$$

$$j \in J_3 \iff f_j' = f_j$$

On vérifie que J_1 et J_2 ne sont pas vides en utilisant la propriété déjà évoquée en 4-3-1-1 pour la recherche des limites de F. Nous pouvons par conséquent définir les deux nombres A_1 et A_2 :

$$A_1 = \mathrm{Max}_{j \in J_1} (f_j \ / \ (f_j - f'_j) = f_{j_1} \ / \ (f_{j_1} - f'_{j_1})$$

$$A_2 = \mathrm{Min}_{j \in J_2} (f_j \ / \ (f_j - f'_j) = f_{j_2} \ / \ (f_{j_2} - f'_{j_2})$$

avec $J_1 \in J_1$ et $j_2 \in J_2$. D'après (a-2) on a les inégalités strictes :

$A_1 < 0 < A_2$.

Montrons que tous les points $\vec{f}^{\alpha}$ avec $A_1 \leqslant \alpha \leqslant A_2$ sont des éléments de F, c'est-à-dire qu'ils satisfont les inégalités (a-4). Il suffit de le vérifier en reprenant les équations (a-3) pour j = p+1 à M :

× $j \in J_3$: $\quad f_j^{\alpha} = f_j > 0$ d'après (a-2)

× $j \in J_1$:

$$\left.\begin{array}{l} (f'_j - f_j) > 0 \\ A_1 \leqslant \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow f_j^{\alpha} \geqslant f_j + A_1 \ (f'_j - f_j)$$

$$\geqslant f_j + f_j/(f_j - f'_j) \times (f'_j - f_j)$$

$$\geqslant 0$$

Nous avons en particulier $f_{j_1}^{A_1} = 0$

× $j \in J_2$:

$$\left.\begin{array}{l} (f'_j - f_j) < 0 \\ A_2 \geqslant \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow f_j^{\alpha} \geqslant f_j + A_2 \ (f'_j - f_j)$$

$$\geqslant f_j + f_j/(f_j - f'_j) \times (f'_j - f_j)$$

$$\geqslant 0$$

Avec de même $f_{j_2}^{A_2} = 0$

Les deux points $\vec{f}^{A_1}$ et $\vec{f}^{A_2}$ sont donc des éléments de F et ont au moins (p + 1) coordonnées nulles. Pour terminer la démonstration il ne reste plus qu'à vérifier que $\vec{f}$ correspond à une combinaison barycentrique positive des points $\vec{f}^{A_1}$ et $\vec{f}^{A_2}$. En éliminant $\vec{f}'$ des deux relations suivantes :

$$\vec{f}^{A_1} = \vec{f} + A_1 \ (\vec{f'} - \vec{f})$$
$$\vec{f}^{A_2} = \vec{f} + A_2 \ (\vec{f'} - \vec{f})$$

on obtient :

$$\vec{f} = \left(\frac{A_2}{A_2 - A_1}\right) \ \vec{f}^{A_1} + \frac{A_1}{A_1 - A_2} \ \vec{f}^{A_2}$$

Les deux coefficients $\frac{A_2}{A_2 - A_1}$ et $\frac{A_1}{A_1 - A_2}$ sont bien positifs avec leur somme normalisée à 1.

b) Cas de R

Il s'agit de montrer à présent que toute fonction métamère $\vec{r} = (r_i \ ; \ i = 1 \text{ à } M)$ de R se décompose en une combinaison barycentrique positive des éléments simples $\vec{E}^n$ définis au paragraphe 4-3-2 et composés de (M - 3) coordonnées E_i^n égales à 0 ou 1, les 3 coordonnées restantes ayant des valeurs intermédiaires.

La démonstration se mène d'une manière identique à celle faite dans le cas de F. Il faut y apporter quelques modifications en substituant *(a-1)*, *(a-2)*, *(a-3)* et *(a-4)* par :

$$r_q = 0 \text{ ou } 1 \quad , (q = 1 \text{ à } M) \qquad (b\text{-}1)$$

$$0 < r_j < 1 \quad , (j = p+1 \text{ à } M) \qquad (b\text{-}2)$$

$$r_i^\alpha = r_i + \alpha\,(r'_i - r_i) \qquad (b\text{-}3)$$

$$0 \leqslant r_j^\alpha \leqslant 1 \quad , (j = p+1 \text{ à } M) \qquad (b\text{-}4)$$

La partition J_1, J_2, J_3 de $(p + 1, p + 2, \ldots, M)$ est telle que :

$$j \in J_1 \iff r'_j > r_j$$

$$j \in J_2 \iff r'_j < r_j$$

$$j \in J_3 \iff r'_j = r_j$$

On définit pour α les nouvelles valeurs A_1 et A_2 :

$$A_1 = \text{MAX}\,[\text{MAX}_{j \in J_1}(r_j/(r_j - r'_j)),\ \text{MAX}_{j \in J_2}((1 - r_j) / (r'_j - r_j))]$$

$$A_2 = \text{MIN}\,[\text{MIN}_{j \in J_1}((1 - r_j) / (r'_j - r_j)),\ \text{MIN}_{j \in J_2}(r_j / (r_j - r'_j))]$$

On vérifie qu'on a les inégalités strictes : $A_1 < 0 < A_2$. Vérifions à présent que les points $\vec{r}^\alpha$ avec $A_1 \leqslant \alpha \leqslant A_2$ sont des éléments de R. Il suffit qu'ils satisfassent $(b\text{-}4)$:

$$\times\ j \in J_3 : r_j^\alpha = r_j \Rightarrow 0 < r_j^\alpha < 1 \qquad \text{d'après } (b\text{-}2)$$

* $j \in J_1$:

$$\left.\begin{array}{l} (r'_j - r_j) > 0 \\ (b\text{-}3) \\ A_1 \leqslant \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r_j^\alpha \geqslant r_j + A_1(r'_j - r_j) \\ \quad \geqslant r_j + r_j/(r_j - r'_j) \times (r'_j - r_j) \\ \quad \geqslant 0 \end{array}$$

$$A_2 \geqslant \alpha \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} r_j^\alpha \leqslant r_j + A_2(r'_j - r_j) \\ \quad \leqslant r_j + (1 - r_j)/(r'_j - r_j) \times (r'_j - r_j) \\ \quad \leqslant 1 \end{array}$$

* $j \in J_2$: on vérifie de même $0 \leqslant r_j^\alpha \leqslant 1$

Pour chacune des fonctions $\vec{r}^{A_1}$ et $\vec{r}^{A_2}$ il existe un indice de $J_1 \cup J_2$ pour lequel la limite 0 ou 1 est atteinte. La démonstration se termine comme précédemment en obtenant l'expression :

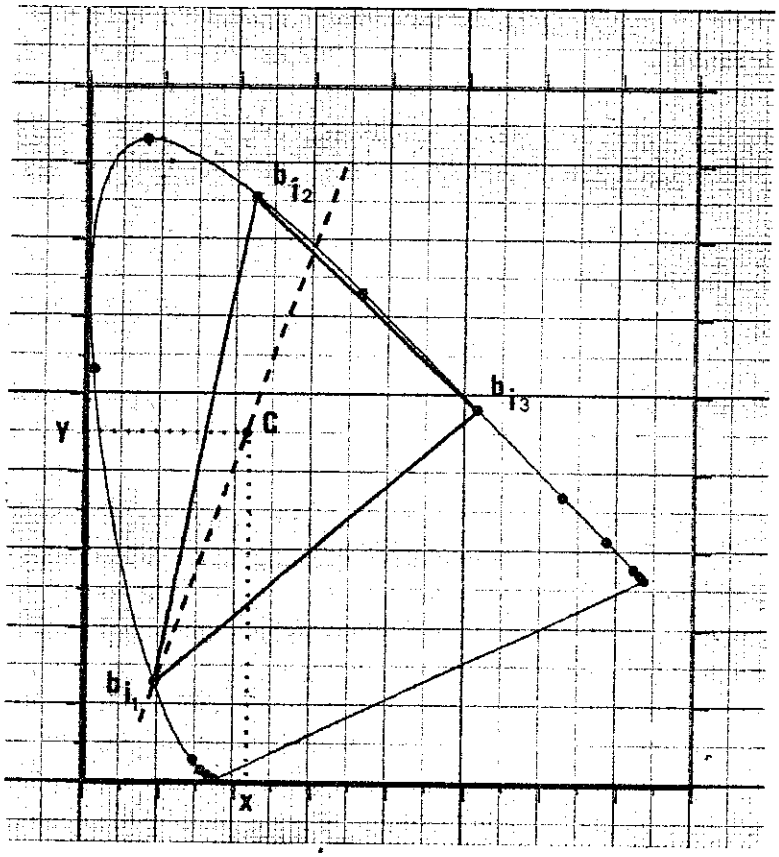
$$\vec{r}^{\alpha} = \frac{A_2}{A_2 - A_1} \vec{r}^{A_1} + \frac{A_1}{A_1 - A_2} \vec{r}^{A_2}$$

annexe 2

ANNEXE II

RECHERCHE RAPIDE DES ELEMENTS SIMPLES DE F

Soit C la couleur définissant l'ensemble métamère F de coordonnée trichromatique (x,y), et (x_i, y_i) , (i = 1 à M) les coordonnées des M bandes spectrales b_i recouvrant le domaine visible. La recherche systématique des éléments simples -combinaisons métamères constituées de 3 bandes b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}- se fait en utilisant la règle des centres de gravité du diagramme chromatique (voir réf. /4/, p. 92) : le point (x,y) doit être à l'intérieur du triangle formé par les 3 bandes b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}.



Pour cela on fait varier i_1 de manière croissante à partir de 1. A chaque valeur de cet indice, on détermine la droite $b_{i1}C$. Si cette droite recoupe le lieu spectral, on recherche toutes les paires de bandes b_{i2}, b_{i3} qui sont de part et d'autre. Pour chaque triplet b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}, il ne reste plus qu'à déterminer l'amplitude correcte de chacune des bandes pour obtenir l'élément simple correspondant. Si la droite $b_{i1}C$ ne recoupe pas le lieu spectral, nous arrêtons l'algorithme car nous sommes alors sûrs d'avoir déjà calculé tous les différents éléments simples possibles.

Le gain en temps de calcul dépend de l'emplacement de C dans le diagramme chromatique. Si C est proche du lieu spectral, le gain est plus important. Dans le cas le plus défavorable de la région centrale du diagramme nous avons gagné un facteur 3.5 sur le temps de recherche des éléments simples.

bibliographie

REFERENCES GENERALES

PERCEPTION DES COULEURS :

/1/ CARTERETTE Edward C. et FRIEDMAN Morton P. - 1975

Handbock of Perception, tome V : Seeing
Academic Press, New York

/2/ CORNSWETT T.N. - 1970

Visual Perception
Academic Press, New York

/3/ EVANS Ralph M. - 1974

The perception of color
Wiley Interscience, New York

/4/ LEGRAND Yves - 1972

Optique physiologique, tome II : Lumière et Couleur
Masson, Paris

COLORIMETRIE GENERALE :

/5/ BILLMEYER Fred W. et SALTZMANN Max - 1966

Principles of Color Technology
Interscience Div., John Wiley, New York

/6/ BOUMA P. - 1971

Physical aspect of colour
2ème ed., St Martin Press, Pays-Bas

/7/ HUNTER Richard S. - 1975

The measurement of appearance
John Wiley, New-York

/8/ JUDD Deane B. et WYSZECKI Günter - 1975

Color in business, science and industrie
3ème éd., John Wiley, New York

/9/ KOWALISKI Paul - 1978

Vision et mesure de la couleur
Masson, Paris

/10/ STILES W.S. - 1978

Mechanisms of Colour Vision : Selected papers of W.S. Stiles with a new introductory essay
Académic Press, New York

/11/ WRIGHT W.D. - 1969

The measurement of colour
4ème ed., Van Nostrand, New York

/12/ WYSZECKI Günter et Stiles W.S. - 1967

Color Science : concepts and methods, quantitative data and formulas.
John Wiley, New York

COLORIMETRIE ET APPLICATIONS :

/13/ BERGER Anni et BROCKES Andréas - 1971

Color measurement in the textile industrie
Bayer Farben Revue, Edition spéciale N° 3/1,
Farbenfabriken Bayer AG, Leverkusen, Allemagne.

/14/ HUNT R.W.G. - 1975

The reproduction of colour
3e ed., Fountain Press, Londres

/15/ INDUSTRIAL COLOR TECHNOLOGY - 1972

A symposium sponsered by the Division of Industrial and Engineering chemistry at the 159th meeting of the American Chemical Society (Sept. 11, 1968)

American Chemical Society, Washington

/16/ PEARSON D.E. - 1975

Transmission and display of pictorial information
Pentech Press, Londres

COMPTE-RENDUS DE CONGRE :

/17/ COLOR 69 - 1970

Stockholm 1969, Proc. Ist AIC Congr. "Color 69"
Tomes I et II, Muster-Schmidt, Göttingen, Allemagne

/18/ COLOR 73 - 1973

York 1973, Proc. 2nd AIC Congr. "Color73"
Adam Hilger, Londres.

/19/ COLOR 77 - 1978

Troy 1977, Proc. 3rd AIC Congr. "Color 77"
Adam Hilger, Londres

PUBLICATIONS DE LA COMMISSION INTERNATIONALE DE L'ECLAIRAGE :

/20/ CIE N° 15 - 1971

Colorimétrie
Bureau central de la CIE, 52 bd Malesherbes, Paris

Supplément N°1 - 1971

Indice spécial de métamerisme pour le changement d'illuminant

Supplément N°2 - 1976

Recommandations de la CIE sur les espaces chromatiques uniformes, les formules de différence de couleur et les termes psychométriques de la couleur.

/21/ CIE N° 17 - 1970

Vocabulaire international de l'éclairage
Bureau central de la CIE. 52 bd Malesherbes. PARIS.
(4e édition à paraître)

BIBLIOGRAPHIE

- ALLEN Eugène - 1966
  Theoretical limits of metamerism
  j. Opt. Soc. Amer., Vol 56, p. 559

- ALLEN Eugène - 1969a
  Some new advances in the study of metamerism
  Color Engineering, Vol. 7, N° 1, pp. 35-40

- ALLEN Eugène - 1969b
  "An index of Metamerism for Observer Differences"
  Color 69 - Réf./17/ pp. 771-784

- ALLEN Eugène - 1973
  Maximal colours and colour constancy
  Color 73, réf./18/ p. 369

- ALLEN Eugène - 1977
  "Advances in colorant formulation and shading"
  Color 77 - Réf./19/ pp. 153-179

- BERGER - SCHUNN Anni - 1977
  "Color and Quality Control in Industry"
  Color 77 - Réf./19/ pp. 181-197

- BREWER W.L. et HOLLY F.R. JR. - 1948
  "Syntheses of Spectral Distribution Curves"
  J. Opt. Soc. Amer. vol 38, N° 10 pp. 858-874

- BROCKES Andreas - 1968
  The problem of Color metamerism from an industrial viewpoint.
  Color Engineering - Mai-Juin 68 pp. 48-54

- BROCKES Andreas - 1969b
  Vergleich der Metamerie - Indizes bei Lichtartwechsel von Tageslicht zur Glühlampe und zu verschiedenen Leuchtstofflampen
  Die Farbe, Vol 18, p. 233

- BROCKES Andreas - 1970
  Vergleich von berechneten Metamerie - Indizes mit Abmusterungsergepnissen
  Die Farbe - Vol. 19 p. 135

- CHASSAIGNE Patrick - 1978
  "Evolution des différentes formules d'écarts de couleur"
  Information Couleur, n° 4 pp. 15-23

- CHASSAIGNE Patrick - 1978
  Identification des pigments par leur caractéristique dans les milieux diffusants
  Couleurs n° 100, p. 5-11

- CIE N° 2 - 1959
  Couleur des signaux lumineux
  Bureau central de la CIE, 52 bd Malesherbes, PARIS

- CIE N° 13 - 1974
  Méthode de mesure et de spécification des qualités de rendu des couleurs des sources de lumière
  TC - 3.2 - 2ème édition

- CRAMER Harald - 1974
  Mathematical Methods of Statistics
  13ème édition - Princeton University Press - Etats-Unis

- DUPONT-HENIUS D. - 1977
  Differential Color perception thresholds
  Color 77 - réf./19/, pp. 492-494

- GALL L. - 1971
  The Colour Science of Pigments
  BASF - Allemagne

- GALL L. - 1973
  Computer Colour Matching
  Color 73 Réf./18/, pp. 153-178

- GRANDVILLE Walter C. et JUDD Deane B - 1949
  Metameric Colors and the Macular Pigment
  J. Opt. Soc. Amer. Vol. 39, pp. 632-633

- GUILD J. - 1931
  The colorimetric properties of the spectrum,
  Phil. Trans. Roy. Soc. (London),
  Vol. A N° 230, p. 149

- HALSTEAD Margaret B. - 1969
  "Colour Rendering Tolerances"
  Color 69 - réf./17/ pp. 831-838

- HALSTEAD Margaret B. - 1977
  "Colour rendering : Past Present and Future"
  Color 77 - réf./19/ pp. 97-127

- HELLMIG E. - 1954
  "Die bedingt-gleichen Farben und die Farben mit farbwerten Null"
  Farbe, vol. 3, p. 165

- HELLMIG E. - 1955
  "Praktische Methoden zur Ermittlung der Remissionsfunktionen von Farben mit vorgegebenen Farbenwerten unter besonderes Berücksichtigung von < Unecht-Schwartz >".
  Farbe, vol 4, p. 3

- HEMMENDINGER Henry et BOTTIGER RUTH C. - 1977
  "Metamerism and its influence an attainable color tolerances"
  Color 77 - réf./19/ pp. 425-428

- HENNICKE Irmgard - 1958
  "Die Ermittlung von Remissionskurven bedingt-gleicher Farben"
  Farbe, vol. 7, pp. 93-119

- HIMMELBLAU D.M. - 1972
  Applied non linear programming
  Mac Graw Hill - New-York

- JEROME Charles W. - 1976
  Color Rendering properties of light sources
  Color Research and Application
  Vol. 1, n° 1, pp. 37-42

- JUDD D.B. et WYSZECKI G. - 1963
  Color in Business, Science and Industrie
  2ème édition, John Wiley et Sons,
  New-York, p. 153

- KUEHNI Rolf G. - 1975
  Computer Colorant Formulation
  Lexington books, div. D.C. Heath and Company,
  Lexington, Massachussetts

- LONGLEY W.V. - 1976
  A visual approach to controlling metamerism
  Color Research and Application
  Vol. 1, n° 1, pp. 43-49

- MAC ADAM David L. - 1935
  "The Theory of the Maximum Visual Efficiency of Colored Materials
  J. Opt. Soc. Am., vol. 25, pp. 249-252

- MAC ADAM D.L. - 1942
  Visual sensitivities to color differences in daylight
  J. Opt. Soc. Amer. Vol. 32, n° 5, pp. 247-274

- MORADIAN S., COATES E., RIGG B. - 1977
  Indices of metamerism
  Color 77 - réf./19/ pp. 438-441

- MORLEY D.I., HALSTEAD M.B., PALMER D.A. et STAINSBY A.G. - 1973
  Subjective assessments of colour-rendering indices
  Color 73, réf./18/, pp. 359-361

- MORRIS Robert H. - 1947
  "Metameric Formulation"
  J. Opt. Soc. Amer, vol. 37, n° 8, pp. 669-670

- MUNCH Wolfram - 1969
  "Verhaltensmerkmale von Licht und Körperfarben auf einheitlicher Bewertungsgrundlage"
  Color 69- réf./17/ pp. 811-823

- NAYATANI Y. et TAKAHAMA K. - 1972
  Adequateness of using 12 metameric gray object colors in appraising the Color. Matching property of lamps
  J. Opt. Soc. Amer, vol. 62, N° 1, pp. 140-143

- NICKERSON D. - 1965
  Terminology of color rendering
  J. Opt. Soc. Amer, vol 55 n° 2, pp. 213-214

- NIMEROFF I.,ROSENBLATT Joan R. et DANNEMILLER Mary C. - 1962
  Variability of Spectral Tristimulus Values
  J. Opt. Soc. Am., vol. 52, pp. 685-691

- NIMEROFF J. et YUROW J.A. - 1965
  Degree of metamerism
  J. Opt. Soc. Amer, VOl. 55, n° 2, pp. 185-190

- OHTA N. et WYSZECKI G. - 1975a
  Theoretical Chromaticity mismatch limits of metamers viewed under different illuminants
  J. Opt. Soc. Amer, vol. 65, n° 3, pp. 327-333

- OHTA Nóboru et WYSZECKI Gunter - 1975b
  Extreme errors of numerical integrations in colorimetric calculations
  J. Opt. Soc. Amer, vol. 65 n° 7, pp. 834-838

- OHTA N. et WYSZECKI G. - 1975c
  Theoretical chromaticity mismatch limits of metamers due to a change from CIE Illuminant D_{65} to C.
  J. Opt. Soc. Amer, vol. 65 n° 10, pp. 1152-1153

- OHTA Noboru et WYSZECKI Günter - 1976a
  Color changes caused by specified changes in the illuminant
  Color Research and Application
  Vol.1 n° 1, pp. 17-21

- OHTA Noboru et WYSZECKI Günter - 1976b
  Designing illuminants that render given objects in prescribed colors
  J. Opt. Soc. Amer, vol. 66, n° 3, pp. 269-275

- OUWELTJES J.L. - 1973
  The General colour rendering index, its meaning and its uses
  Color 73, réf./18/ pp. 362-364

- PARRA F. - 1969
  Seuils différentiels de couleur
  Color 69 réf./17/, pp. 727-733

- PEYRET B.G. - 1964
  Eléments de calcul des probabilités
  Eyrolles - PARIS

- RICHTER Manfred - 1958
  "Remissionskurven bedingt-gleicher Farben"
  Farbe, vol. 7 n° 4, pp. 163-165

- ROSCH S. - 1929
  "Darstellung der Farbenlehre für die Zwecke des Mineralogen"
  Fortschr. Mineral, Krist., Petrogr. Vol 13, p. 143

- SCHRÖDINGER Erwin - 1920
  Theorie der Pigmente von grösster Leuchtkraft"
  Ann. Physik, vol. 62 n° 4, pp. 603-622

- SPERANSKAYA N.I. - 1959
  Determination of spectrum coordinates for twenty seven normal observers
  Optics and Spectroscopy, vol. 7, p. 429

- STILES W.S. et BURCH J.M. - 1959
  NPL Colour Matching investigation : final report 1958
  Optica Acta, vol. 6 n° 1

- STILES W.S. et WYSZECKI G.W. - 1962
  Counting Metameric object colors
  J. Opt. Soc. Amer., vol. 52 n° 3, pp. 313-328

- STILES W.S., WYSZECKI G.W. et OHTAN - 1977
  Counting metameric object-color stimuli using frequency-limited spectral reflectance functions
  J. Opt. Soc. Amer. Vol. 67 n° 6, pp. 779-784

- STROCKA Dietrich et BROCKES Andreas - 1969
  "Comparison of the CIE (1931) 2° and the CIE (1964) 10° Colorimetric Standard Observer with individual observers in the assessment of metameric matches"
  Color 69 réf./17/ pp. 785-793

- STROCKA Dietrich - 1973
  Are intervals of 20 nm sufficient for indsutrial colour measurement ?
  Color 73, réf./18/ pp. 453-456

- STROCKA Dietrich - 1977
  Possibilities for specifying an index of observer meramerism
  Color 77, réf./19/ pp. 432-436

- TAKAHAMA K. et NAYATANI Y. - 1972
  "New Method for Generating Metameric Stimuli of Object Colors"
  J. Opt. Soc. Amer. vol. 62 n° 12, pp. 1516-1520

- VIENOT Françoise - 1975
  Etude et mesure des fonctions colorimétriques de l'observateur réel
  Thèse de 3e cycle, Université de PARIS VI, 3/12/75

- VIENOT Françoise - 1977
  Statistical study of the color-matching functions
  Color 77, réf./19/, pp. 273-276

- WRIGHT W.D. - 1928- 29
  A re-determination of the trichromatic coefficients of the spectral colours
  Trans. Opt. Soc., vol. 30, p. 141

- WYSZECKI Günter - 1953
  "Valenzmetrische Untersuchung des Zusammenhanges zwischen normaler und anomaler Trichromasie"
  Farbe, vol. 2, pp. 39-52

- WYSZECKI Günter - 1958
  "Evaluation of Metameric Colors"
  J. Opt. Soc. Amer. vol. 48 n° 7, pp. 451-454

- WYSZECKI Günter - 1959
  A Measure for the total difference of two sets of color-mixture functions.
  J. Opt. Soc. Amer., vol. 49 n° 8, pp. 811-814

- WYSZECKI Günter - 1962
  Metameric object colors
  Acta Chromatica, vol. 1 n° 1, pp. 1-6

- WYSZECKI Günter - 1970
  Developpement of New CIE Standart Sources for Colorimetry
  Die Farbe , vol. 19 n° 6, pp. 43-76

- WYSZECKI Günter et FIELDER G.H. - 1971
  New Color-matching ellipses
  J. Opt. Soc. Amer., Vol. 66 n° 9, pp. 1135-1151

  Color-difference matches
  J. Opt. Soc. Amer., vol. 66 n° 11, pp. 1501-1513

- WYSZECKI Günter - 1972
  "Recent developments on color-difference evaluations"
  "Color Metrics", pp. 339-379
  J.J. Vos, L.F.C. Friele, PL Walraven
  AIC/Hollande, C/O Institut de Perception, Soesterberg

PUBLICATIONS DE L'AUTEUR SUR LE SUJET :

- SCHMITT F.J.M. - 1976

  "A Method for the Treatment of Metamerism in Colorimetry"

  J. Opt. Soc. Amer., vol. 66 n° 6, pp. 601-608

- SCHMITT F.J.M. - 1977

  "A Statistical Generation of Metamers"

  3° Congrès de l'A.I.C. :"Color 77", Troy Juillet 77

  Réf. /9/, pp. 436-438.