

# Abduction dans les logiques de description : apport de l'analyse formelle de concepts et de la morphologie mathématique

Jamal Atif<sup>1</sup>, Céline Hudelot<sup>2</sup>, Isabelle Bloch<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Equipe TAO, Laboratoire de Recherche en Informatique,  
Batiment 490, Université Paris-Sud, 91405 - Orsay Cedex [jamal.atif@lri.fr](mailto:jamal.atif@lri.fr)

<sup>2</sup> Ecole Centrale de Paris - [celine.hudelot@ecp.fr](mailto:celine.hudelot@ecp.fr)

<sup>3</sup> Telecom ParisTech - CNRS LTCI, Paris -  
[isabelle.bloch@telecom-paristech.fr](mailto:isabelle.bloch@telecom-paristech.fr)

**Résumé** : L'objet de cet article est d'enrichir les logiques de description par des services de raisonnement abductif à des fins d'interprétation d'images. Dans un cadre algébrique, nous mettons en synergie des ingrédients provenant de la morphologie mathématique, des logiques de description et de l'analyse formelle de concepts. Plus précisément, nous proposons de calculer la « meilleure » explication d'une observation donnée à partir d'une succession d'érosions algébriques sur le treillis de concepts associé à la théorie du domaine. Nous montrons que les opérateurs ainsi définis satisfont les postulats de rationalité du raisonnement abductif. Comme illustration, nous considérons le domaine de l'interprétation d'images à partir de modèles, où des connaissances *a priori* structurées bénéficient de représentations ontologiques et des logiques de description. Nous formulons donc le problème d'interprétation à base de modèle comme un problème d'abduction : l'image représente l'observation et la tâche d'interprétation revient à fournir la « meilleure » explication en se fondant sur la connaissance terminologique du domaine exprimée dans une logique de description.

**Mots-clés** : Abduction, logiques de description, morphologie mathématique, analyse formelle de concepts, interprétation d'images.

## 1 Introduction

Les logiques de description (LD) sont désormais un paradigme classique de la représentation des connaissances (Baader (2003)), avec des champs d'application dans des domaines aussi divers que le web sémantique, la robotique cognitive, la vision par ordinateur, ainsi que l'interprétation sémantique d'images. L'interprétation d'images peut bénéficier d'une connaissance experte exprimée sous forme d'une ontologie et des outils de raisonnement offerts par les LD, comme illustré par nos travaux (Hudelot *et al.* (2008); Hudelot *et al.* (2010)). Nous avons proposé des outils de raisonnement capables de traiter de façon unifiée l'information quantitative provenant de l'image et la connaissance experte, qualitative, décrite par une ontologie. La tâche d'interprétation est réalisée de manière séquentielle, en maintenant la cohérence entre les informations extraites

de l'image et la connaissance experte. L'interprétation est ainsi exprimée comme un processus de satisfaisabilité de la situation courante (une configuration spatiale) encodée dans la ABox de la LD et sa TBox. Cependant, ce mode de raisonnement ne permet pas de gérer les situations où la connaissance experte n'est pas entièrement cohérente avec l'observation, ce qui est commun en interprétation d'images. En outre, une configuration spatiale donnée peut être cohérente avec différents éléments de la connaissance *a priori* (ou cohérente à un certain degré).

Nous proposons donc d'adapter les outils de raisonnement des LD à de telles situations, dans le cadre de raisonnements abductifs. Ce type de raisonnement permet le calcul de la « meilleure » explication des phénomènes observés, ce qui en fait un outil adapté aux situations où la connaissance n'est pas entièrement cohérente avec les observations. Formellement, étant données une théorie  $\mathcal{K}$ , représentant la connaissance experte, et une formule  $C$ , représentant une observation dans le domaine d'étude, l'abduction consiste à calculer la formule explicative  $D$  tel que  $D$  soit satisfaisable relativement à  $\mathcal{K}$ , ce qui peut s'écrire :  $\mathcal{K} \models D \rightarrow C$  (ou  $\mathcal{K} \cup D \models C$ ).

A titre d'illustration, nous reproduisons, dans une forme simplifiée, l'exemple d'interprétation de scènes (figure 1) introduit par Möller & Neumann (2008) à des fins de raisonnement abductif. La tâche d'interprétation consiste à étendre la base de connaissances avec de nouvelles assertions sur les structures présentes dans l'image, sur leurs relations, ainsi que sur le contexte global de la scène. A l'instar de Möller & Neumann (2008), nous fondons notre analyse sur une ontologie décrivant le domaine sportif et une série d'algorithmes de traitement et d'analyse d'images permettant d'extraire des objets initiaux de l'image. La tâche d'interprétation dans ce contexte consiste à expliquer la présence dans l'image d'objets tels qu'un être humain, une barre horizontale, un poteau, en tenant compte de la théorie sur le domaine sportif et des premiers objets reconnus dans l'image. Une réponse plausible à cette question est que l'image représente un saut à la perche accompli par un athlète. Le but de cet article est d'introduire des approches computationnelles permettant une telle inférence.



FIG. 1 – Un exemple d'interprétation d'image. La présence dans l'image d'objets tels qu'un être humain, une barre horizontale, un poteau peut être expliquée par un saut à la perche.

Nous proposons d'enrichir les logiques de description avec des outils de raisonnement abductif, dans un cadre algébrique, en associant de manière originale des concepts de morphologie mathématique, de logiques de description et d'analyse formelle de concepts (AFC). L'inférence de la meilleure explication d'une observation est calculé.

lée à partir du treillis de concepts en effectuant des érosions successives sur ce dernier. Nous montrons que ces opérateurs satisfont les postulats de rationalité du raisonnement abductif. Les éléments utiles pour la suite de ces différentes théories sont rappelés dans la section 2. Puis nous introduisons dans la section 3 des opérateurs morphologiques en AFC, et proposons des relations d’explication construites à partir de ces opérateurs.

## 2 Préliminaires

### 2.1 Logiques de description

Dans cette section, nous considérons la logique de description classique  $\mathcal{ALC}$ . Soient  $N_C$  et  $N_R$  deux ensembles dénombrables désignant les noms de concepts et les noms de rôles. Nous utilisons les lettres  $A$  et  $B$  pour les noms de concepts, la lettre  $R$  pour les noms de rôles, et les lettres  $C$  et  $D$  pour les concepts. Les symboles  $\top$  et  $\perp$  désignent les concepts universel et vide, respectivement. L’ensemble des  $\mathcal{ALC}$ -concepts est le plus petit ensemble tel que : (1) tout nom de concept est un concept ; (2) si  $C$  et  $D$  sont deux concepts et  $R$  un nom de rôle, les expressions suivantes désignent des concepts :  $\neg C$  (négation),  $C \sqcap D$  (conjonction),  $C \sqcup D$  (disjonction),  $\forall R.C$  (restriction de valeurs sur des noms de rôles), et  $\exists R.C$  (restriction existentielle sur des noms de rôles). Une interprétation  $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$  se compose d’un ensemble  $\Delta^{\mathcal{I}}$ , le domaine de  $\mathcal{I}$ , et d’une fonction  $\cdot^{\mathcal{I}}$  qui associe tout concept  $C$  à un sous-ensemble  $C^{\mathcal{I}}$  de  $\Delta^{\mathcal{I}}$  et tout rôle  $R$  à un sous-ensemble  $R^{\mathcal{I}}$  de  $\Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$  tel que, pour tous les concepts  $C, D$  et les rôles  $R$ , les propriétés suivantes sont satisfaites : (1)  $\top^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}}$  et  $\perp^{\mathcal{I}} = \emptyset$ ,  $(\neg C)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}}$ , (2)  $(C \sqcup D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}}$ ,  $(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}}$ , (3)  $(\exists R.C)^{\mathcal{I}} = \{x \mid \exists y \text{ s.t. } (x, y) \in R^{\mathcal{I}} \text{ et } y \in C^{\mathcal{I}}\}$ , et (4)  $(\forall R.C)^{\mathcal{I}} = \{x \mid \forall y, (x, y) \in R^{\mathcal{I}} \text{ implique } y \in C^{\mathcal{I}}\}$ .

Une base de connaissances  $\mathcal{K}$ , associée à une DL, comporte deux parties : une partie terminologique (TBox) et une partie assertionnelle (ABox). La TBox  $\mathcal{T}$  décrit la terminologie en listant les concepts, les rôles et leurs relations. C’est un ensemble d’axiomes ou schémas. La ABox contient des informations sur les individus. Une interprétation  $\mathcal{I}$  est un modèle d’un axiome d’une LD (TBox ou ABox) ssi elle satisfait cet axiome, et est un modèle de la base de connaissances  $\mathcal{K}$  ssi elle satisfait tous les axiomes de  $\mathcal{K}$ .

Le service de raisonnement fondamental en LD est le calcul de la relation de subsumption entre deux concepts. Etant donné deux concepts  $C$  et  $D$ , on dit que  $D$  subsume  $C$  (noté  $C \sqsubseteq D$ ) ssi  $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$  pour toute interprétation  $\mathcal{I}$ .

Dans l’exemple introduit en section 1, la théorie, ici la TBox  $\mathcal{T}$  décrivant le domaine sportif, est donnée dans la figure 2.

$Man$	$\sqsubseteq$	$Human$			
$Woman$	$\sqsubseteq$	$Human$		$Jumping\_Event$	$\sqsubseteq$ $Event \sqcap$
$Athlete$	$\equiv$	$Human \sqcap$			$\exists hasPart.Jumper \sqcap$
		$\exists hasProfession.Sport$		$Pole\_Vault$	$\sqsubseteq$ $Jumping\_Event \sqcap$
$Jumper$	$\sqsubseteq$	$Athlete \sqcap$			$\exists hasPart.Pole \sqcap$
		$\exists use.SportEquipment$			$\exists hasPart.Horizontal\_Bar \sqcap$
$Foam\_Mat$	$\sqsubseteq$	$SportEquipment$			$\exists hasPart.Foam\_Mat$
$Pole$	$\sqsubseteq$	$SportEquipment$		$High\_Jump$	$\sqsubseteq$ $Jumping\_Event \sqcap$
$Javelin$	$\sqsubseteq$	$SportEquipment$			$\exists hasPart.Horizontal\_Bar \sqcap$
$Horizontal\_bar$	$\sqsubseteq$	$SportEquipment$			$\exists hasPart.Foam\_Mat$
					...

FIG. 2 – Ontologie du domaine athlétique.

Les assertions initiales construites à partir des outils d’analyse d’images sont en-

codées dans une ABox, appelée ici  $A_1$ , comme suit :  $\{pole_1 : Pole; human_1 : Human; bar_1 : Horizontal\_Bar; \dots\}$ .

## 2.2 Abduction et logiques de description

Dans le cadre des LD, l'abduction peut être considérée selon différents points de vue (Elsenbroich *et al.* (2006); Klarman *et al.* (2011)) : abduction de concepts, abduction de TBox, abduction de ABox et abduction de base de connaissances. Ici, bien que le cadre introduit soit général, nous considérons le cas de l'abduction de Abox.

### Définition 1 (Abduction de ABox)

Soit  $\mathcal{L}$  une LD quelconque,  $\mathcal{K}$  une base de connaissances et  $A$  un ensemble d'assertions dans la Abox tel que pour tout  $a \in A$  on a  $\mathcal{K} \not\models \neg a$ . Un Problème d'Abduction de Abox (PAA) noté  $\langle \mathcal{K}, A \rangle$  consiste à trouver l'ensemble d'assertions  $\gamma$  tel que  $\mathcal{K} \cup \gamma \models A$ .

L'ensemble  $\gamma$  (cohérent avec  $\mathcal{K}$ ) est appelé une explication de  $A$ . Le raisonnement explicatif consiste à sélectionner un sous-ensemble de cet ensemble d'explications. Il est donc nécessaire de disposer de critères de préférence pour effectuer cette sélection.

Revenons à notre exemple. L'interprétation vue comme un PAA  $\langle \mathcal{K}, A \rangle$  se formule ainsi :  $T \cup A_1 \cup \gamma \models A$ , où  $A$  désigne  $\{bar_1 : Horizontal\_Bar, fm_1 : Foam\_Mat, pole_1 : Pole, je_1 : Jumping\_Event\}$ . Intuitivement, un exemple d'assertions  $\gamma$  qui représente une solution du PAA serait  $\{pv_1 : Pole\_Vault\}$ .

## 2.3 Analyse formelle de concepts

L'AFC est une théorie d'analyse de données, de représentation des connaissances et de gestion de l'information qui a pour but d'identifier des structures conceptuelles à partir des données (Ganter *et al.* (1999)). Elle se fonde sur une formalisation dans la théorie des treillis des notions de concepts et de hiérarchie de concepts. Un concept est vu comme une unité de pensée composée de deux parties : l'ensemble de tous les objets appartenant au concept, appelé l'extension, et l'ensemble des attributs de ces objets, appelé l'intention. Un *contexte formel* est un triplet  $\mathbb{K} = (G, M, I)$ , où  $G$  désigne l'ensemble d'objets,  $M$  l'ensemble d'attributs et  $I \subseteq G \times M$  une relation entre les objets et les attributs. La paire  $(g, m) \in I$  signifie « l'objet  $g$  a comme attribut  $m$  ». Les *concepts formels* du contexte  $\mathbb{K}$  sont les paires  $(A, B)$  avec  $A \subseteq G$  et  $B \subseteq M$  telles que  $(A, B)$  soit maximale avec la propriété  $A \times B \subseteq I$ . L'ensemble  $A$  se dénomme l'extension et l'ensemble  $B$  l'intention du concept formel  $(A, B)$ . L'ensemble des concepts formels d'un contexte peut être ordonné par inclusion de leur extension :  $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) \Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2 (\Leftrightarrow B_2 \subseteq B_1)$ . Cet ordre, reflétant la relation sousconcept-superconcept, induit toujours un treillis complet appelé *treillis de concepts* du contexte  $(G, M, I)$ . Pour  $A \subseteq G$  et  $B \subseteq M$ , les opérateurs de dérivation  $\alpha$  et  $\beta$  sont définis par  $\alpha(A) = \{m \in M \mid \forall g \in A, (g, m) \in I\}$ , et  $\beta(B) = \{g \in G \mid \forall m \in B, (g, m) \in I\}$ . Pour  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq G$  (resp.  $B_1 \subseteq B_2 \subseteq M$ ), on a : (i)  $\alpha(A_2) \subseteq \alpha(A_1)$  (resp.  $\beta(B_2) \subseteq \beta(B_1)$ ), (ii)  $A_1 \subseteq \beta(\alpha(A_1))$  et  $\alpha(A_1) = \alpha(\beta(\alpha(A_1)))$  (resp.  $B_1 \subseteq \alpha(\beta(B_1))$  et  $\beta(B_1) = \beta(\alpha(\beta(B_1)))$ ). La paire  $(A, B)$  avec  $A \subseteq G$  et  $B \subseteq M$  est un concept formel ssi  $\alpha(A) = B$  et  $\beta(B) = A$ . Dans le treillis de concepts, l'infimum et le supremum sont calculés comme suit :

$$\bigwedge_{t \in T} (A_t, B_t) = \left( \bigcap_{t \in T} A_t, \alpha(\beta(\bigcup_{t \in T} B_t)) \right), \quad \bigvee_{t \in T} (A_t, B_t) = \left( \beta(\alpha(\bigcup_{t \in T} A_t)), \bigcap_{t \in T} B_t \right)$$

où  $T$  désigne l'ensemble des concepts formels. Tout treillis de concepts est un treillis complet. Un treillis complet  $(L, \leq)$  est isomorphe au treillis de concepts  $\mathbb{C}(L, L, \leq)$ .

## 2.4 AFC et logiques de description

L'idée initiale d'exploiter l'AFC dans le cadre des LD était motivée par la définition d'outils efficaces de construction d'une hiérarchie de subsomption étendue d'un ensemble de concepts d'une LD, dans le but de mettre en exergue des dépendances hiérarchiques que les algorithmes classiques de classification ne pouvaient exhiber (Baader (1995)). A cette fin, la notion de *contexte sémantique* a été introduite. Les attributs de ce contexte formel sont les concepts de la LD, ses objets sont définis comme étant l'ensemble des contre-exemples de la relation de subsomption  $C \sqsubseteq_{\mathcal{T}} D$  (interprétations  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{T}$  et un élément du domaine d'interprétation  $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$  tel que  $d \in C^{\mathcal{I}} \setminus D^{\mathcal{I}}$ ).

### Définition 2 (Contexte sémantique (Baader (1995)))

Le contexte sémantique  $\mathbb{K}_{\mathcal{T}} := (G, M, I)$  est défini comme suit :

$$G := \{(\mathcal{I}, d) \mid \mathcal{I} \text{ est un modèle de } \mathcal{T} \text{ et } d \in \Delta^{\mathcal{I}}\} \quad (1)$$

$$M := \{m_1, \dots, m_n\} \quad (2)$$

$$I := \{((\mathcal{I}, d), m) \mid d \in m^{\mathcal{I}}\} \quad (3)$$

Dans ce qui précède,  $\mathcal{T}$  est une TBox et  $\{m_1, \dots, m_n\}$  sont les concepts définis dans  $\mathcal{T}$ . Un résultat important obtenu par Baader (1995) stipule que le treillis de concepts associé au contexte sémantique  $\mathbb{K}_{\mathcal{T}}$  est isomorphe à la hiérarchie de subsomption de toutes les conjonctions des sous-ensembles  $M$  par rapport à  $\mathcal{T}$ . L'algorithme d'exploration d'attributs est utilisé pour calculer la hiérarchie de subsomption des conjonctions des concepts d'une LD. Plus récemment, un nouveau contexte formel, appelé « contexte syntaxique », a été introduit par Baader *et al.* (2007), plus approprié au calcul du *plus petit subsumant commun* d'une conjonction de concepts et préservant la propriété d'isomorphisme.

Afin de définir nos opérateurs d'abduction sur le treillis de conjonctions et de disjonctions, nous considérons le contexte formel sémantique ; la construction du treillis associé repose sur l'algorithme *exploration distributive de concepts* de Stumme (1996, 1998).

*Dans notre exemple, les objets  $G$  du contexte sont alors des individus (interprétations) et l'ensemble des attributs  $M$  est l'ensemble des concepts (y compris des rôles) définis dans  $\mathcal{T}$  décrits dans la figure 2. Nous donnons un exemple de contexte dans le tableau 1, et un extrait du treillis de concepts associé dans la figure 3.*

## 3 Opérateurs d'abduction par morphologie mathématique sur des treillis complets

Soient  $(L, \preceq)$  et  $(L', \preceq')$  deux treillis complets (qui ne sont pas nécessairement égaux). Tous les résultats et définitions suivants dérivent du cadre algébrique de la morphologie mathématique (MM) (Bloch *et al.* (2007); Heijmans (1994); Heijmans & Ronse (1990); Ronse & Heijmans (1991); Serra (Ed.) (1988)).

TAB. 1 – Contexte formel  $\mathbb{K}_{athletic}$  correspondant à la TBox de la figure 2.

$\mathbb{K}_{athletic}$	Human	Man	Woman	Athlete	Jumper	SportEquipment	Foam_Mat	Pole	Javelin	Horizontal_bar	Event	Jumping_Event	Pole_Vault	High_Jump
m_1	X	X												
jumper_1	X	X		X	X	X								
pole_1						X		X						
bar_1						X				X				
fm_1						X	X							
je_1					X	X					X	X		
jav_1						X			X					
pv_1					X	X	X	X		X	X	X	X	
hj_1					X	X	X			X	X	X		X

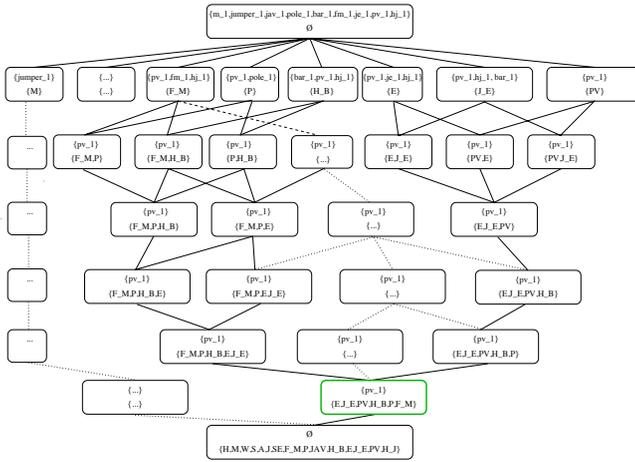


FIG. 3 – Extrait du treillis de concepts induit par le contexte formel  $\mathbb{K}_{athletic}$ .

**Définition 3**

Un opérateur  $\delta : L \rightarrow L'$  est une dilatation s'il commute avec le supremum :  $\forall (x_i) \in L, \delta(\bigvee_i x_i) = \bigvee'_i \delta(x_i)$ , où  $\bigvee$  désigne le supremum associé à  $\preceq$  et  $\bigvee'$  celui associé à  $\preceq'$ . Un opérateur  $\varepsilon : L' \rightarrow L$  est une érosion s'il commute avec l'infimum :  $\forall (x_i) \in L', \varepsilon(\bigwedge'_i x_i) = \bigwedge_i \varepsilon(x_i)$ , où  $\bigwedge$  et  $\bigwedge'$  désignent l'infimums associés à  $\preceq$  et  $\preceq'$ , respectivement.

Toutes les propriétés classiques de la morphologie mathématique sont vérifiées ici (Bloch et al. (2007); Heijmans (1994); Heijmans & Ronse (1990)), et ne sont donc pas rappelés.

**3.1 MM sur des treillis de concepts**

Dans le but de résoudre un PAA, il est opportun de raisonner sur les sous-ensembles de  $G$ . Ainsi, nous considérons le treillis complet  $(\mathcal{P}(G), \subseteq)$  et définissons des opérateurs de  $\mathcal{P}(G)$  vers  $\mathcal{P}(G)$ , où  $\mathcal{P}(G)$  est l'ensemble des sous-ensembles de  $G$  (i.e les

interprétations). Puisque l'ordre (l'inclusion) défini sur  $G$  est équivalent (voir section 2.3) à celui dans  $M$ , raisonner dans  $G$  donne directement des résultats dans  $M$ .

Afin de définir des opérations dans  $\mathcal{P}(G)$ , nous introduisons des érosions et des dilations particulières, dites morphologiques (Serra (1982)), qui reposent sur la notion d'élément structurant (une relation binaire  $b$  entre des éléments de  $G$ ). Pour  $g \in G$ , nous notons par  $b(g)$  l'ensemble des éléments de  $G$  en relation avec  $g$ .

#### Définition 4

La dilatation morphologique d'un sous-ensemble  $A$  de  $G$  par rapport à  $b$  s'écrit :

$$\delta_b(A) = \{g \in G \mid b(g) \cap A \neq \emptyset\}. \quad (4)$$

L'érosion morphologique de  $A$  s'écrit :

$$\varepsilon_b(A) = \{g \in G \mid b(g) \subseteq A\}. \quad (5)$$

La relation  $b$  peut représenter un système de voisinage des interprétations ou une relation de distance. Dans le cas d'une distance  $d$  entre les éléments de  $G$ , les éléments structurants peuvent être définis comme des boules de cette distance. Cet exemple est particulièrement intéressant pour le raisonnement abductif où la partie « la plus centrale » d'un modèle correspond intuitivement à l'explication préférée. L'érosion s'exprime alors par :

$$\varepsilon^n(A) = \{g \in G \mid d(g, G \setminus A) > n\}. \quad (6)$$

On note  $\varepsilon(A) = \varepsilon^1(A)$ , et on a  $\varepsilon^0(A) = A$ . Ici  $G$  est un espace discret fini, et par conséquent seules les valeurs entières de  $n$  sont considérées. La distance peut généralement être induite à partir du treillis.

**Propriétés.** Comme dit précédemment, toutes les propriétés classiques de la MM sont vraies dans ce contexte. Nous en donnons les plus importantes :

- L'érosion commute avec l'infimum :  $\forall (A, A') \in \mathcal{P}(G)^2, \varepsilon(A \cap A') = \varepsilon(A) \cap \varepsilon(A')$ .
- Pour le supremum on a seulement une inclusion :  $\forall (A, A') \in \mathcal{P}(G)^2, \varepsilon(A) \cup \varepsilon(A') \subseteq \varepsilon(A \cup A')$ .
- Si  $g \in b(g)$ , alors l'érosion est anti-extensive :  $\forall A \in \mathcal{P}(G), \varepsilon_b(A) \subseteq A$ . Cette propriété est en particulier vérifiée pour l'équation 6.
- Itérativité :  $\varepsilon^n(\varepsilon^m(A)) = \varepsilon^{n+m}(A)$ . Appliquer des érosions successives donne des résultats de plus en plus petits, équivalents à une application directe d'une érosion plus grande. Cette propriété sera exploitée pour définir des explications comme le résultat le plus petit possible d'une succession d'érosions.
- Une notion importante est celle d'adjonction : une paire d'opérateurs  $(\varepsilon, \delta)$  forme une adjonction si  $\forall x \in L, \forall y \in L', \delta(x) \preceq' y \Leftrightarrow x \preceq \varepsilon(y)$ . Si  $(\varepsilon, \delta)$  est une adjonction, alors  $\varepsilon$  est une érosion et  $\delta$  une dilatation. En particulier,  $(\varepsilon_b, \delta_b)$  est une adjonction. Cette notion est équivalente à celle de connexion de Galois, en inversant l'ordre sur le second treillis  $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$  : pour un contexte formel  $(A, B)$ ,  $A \subseteq \beta(B) \Leftrightarrow B \subseteq \alpha(A)$ . Ainsi les opérateurs de dérivation en AFC peuvent être interprétés en termes de morphologie mathématique (Bloch *et al.* (2007)).

### 3.2 Dernière érosion non vide

Comme montré par Bloch *et al.* (2001) dans le cadre de la logique propositionnelle, les érosions peuvent être utilisées pour trouver des explications. L'idée est de sélectionner la *partie la plus centrale* d'une formule comme étant la meilleure explication. Il

a été démontré que cette approche a de bonnes propriétés et satisfait les postulats de rationalité du raisonnement abductif (Pino-Pérez & Uzcátegui (1999)).

Ici nous suivons le même cheminement, mais adapté au contexte des treillis de concepts, en utilisant la définition des érosions introduite dans l'équation 6. Pour tout  $A \subseteq G$ , nous définissons son dernier érodé non vide par :

$$\varepsilon_\ell(A) = \varepsilon^n(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon^n(A) \neq \emptyset, \\ \text{et } \forall m > n, \varepsilon^m(A) = \emptyset. \end{cases} \quad (7)$$

Cette dernière érosion non vide définit le sous-ensemble de modèles et d'interprétations dans  $G$  qui sont les plus éloignés du complémentaire de  $A$  (en considérant la distance  $d$ ), donc les plus centraux dans  $A$ .

### Définition 5

Une explication préférée  $\gamma$  de  $A$  est définie à partir de la dernière érosion non vide par :

$$A \triangleright^{\ell ne} \gamma \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \gamma \subseteq \varepsilon_\ell(A). \quad (8)$$

Lorsque l'on ajoute une contrainte définie par une théorie  $\mathcal{K}$ , alors cette définition est modifiée selon :

$$A \triangleright^{\ell ne} \gamma \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \gamma \subseteq \varepsilon_\ell(\mathcal{K} \cap A). \quad (9)$$

Notons que cela définit un ensemble de meilleures explications possibles, qui n'est pas forcément un singleton. Cet ensemble est robuste dans le sens où il peut être modifié tout en restant dans  $A$ . Par exemple, dilater  $\gamma$  par une boule de  $d$  de taille plus petite que  $n$  conduit toujours à un sous-ensemble de  $A$ . La partie centrale peut être interprétée comme étant le sous-ensemble de modèles qui peut être le plus modifié tout en restant dans  $A$ . Dans le treillis de concepts, cette définition s'interprète de la manière suivante : partant d'un sous-ensemble à expliquer, les érosions successives reviennent à « descendre » dans le treillis autant que possible jusqu'à atteindre un ensemble non vide d'interprétations.

Dans l'exemple où  $A = \{\text{bar}_1 : \text{Horizontal\_Bar}, \text{fm}_1 : \text{Foam\_Mat}, \text{pole}_1 : \text{Pole}, \text{je}_1 : \text{Jumping\_Event}\}$ , la partie du treillis de concepts correspondant à ce sous-ensemble (en rouge dans la table 1) est donnée figure 3. La dernière érosion non vide de ce sous-ensemble correspond à l'avant-dernière ligne, et  $\gamma = \{\text{pv}_1\}$  (en vert sur la figure 3). Ce résultat correspond à l'intuition, et le saut à la perche est effectivement une explication raisonnable de la description donnée par  $A$ . Dans un contexte d'interprétation d'images, ce processus permet de déduire des descriptions de haut niveau à partir d'informations de plus bas niveau extraites des images.

### 3.3 Dernière érosion cohérente

Une autre façon d'introduire la contrainte liée à la théorie est d'éroder celle-ci jusqu'à ce qu'elle devienne cohérente avec  $A$ . Cela conduit à la définition d'une nouvelle relation d'explication.

### Définition 6

Une explication préférée  $\gamma$  de  $A$  est définie à partir de la dernière érosion cohérente comme suit :

$$A \triangleright^{\ell c} \gamma \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \gamma \subseteq \varepsilon_{\ell c}(\mathcal{K}, A) \cap A,$$

où  $\varepsilon_{lc}$  désigne la dernière érosion cohérente :

$$\varepsilon_{lc}(\mathcal{K}, A) = \varepsilon^n(\mathcal{K}) \text{ où } n = \max\{k \mid \varepsilon^k(\mathcal{K}) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Cette définition a une interprétation différente : nous considérons cette fois l'érosion de  $\mathcal{K}$ , ce qui signifie que l'on cherche les modèles qui sont dans  $A$  et qui sont les plus centraux dans la théorie.

### 3.4 Propriétés et interprétations

Une première propriété intéressante est que raisonner sur  $G$  revient à raisonner sur l'ensemble de concepts formels. Ici, les explications résultant d'un raisonnement sur l'ABox, conduisent à des érosions des sous-ensembles de  $G$  (modèles et interprétations). Soit  $(A, B)$  un concept formel, avec  $A \subseteq G$ . Les définitions des explications dans  $A$  induisent les concepts correspondants pour  $B$  en utilisant les opérateurs de dérivation  $\alpha(\gamma) = \{m \in M \mid \forall g \in \gamma, (g, m) \in I\}$ .

Dans notre exemple,  $B = \alpha(A) = \{SE\}$  et  $\alpha(\gamma) = \{Foam\_Mat, Pole, Horizontal\_Bar, Event, Jumping\_Event, Pole\_Vault\}$  est une explication de  $B$ .

Notons que éroder  $A$  revient à dilater  $B$ , ce qui est conforme à la correspondance entre la propriété de connexion de Galois entre les opérateurs de dérivation et les propriétés d'adjonction de la dilatation et l'érosion (section 3.1).

Considérons à présent les postulats de rationalité introduits par Pino-Pérez & Uzcátegui (1999) pour les relations d'explication. Il a été prouvé que la plupart d'entre eux sont satisfaits pour les opérateurs d'explication (dernière érosion non vide et dernière érosion cohérente) (Bloch *et al.* (2001)). Dans le cadre proposé ici, ces résultats sont également vérifiés et sont directement déduits des propriétés algébriques de l'érosion (section 3.1) :

- $\triangleright^{\ell ne}$  et  $\triangleright^{\ell c}$  sont indépendants de la syntaxe (puisqu'ils sont calculés dans l'espace des interprétations).
- Puisque les explications sont définies comme un sous-ensemble d'un résultat d'érosion, tout sous-ensemble non-vide d'une explication est une explication.
- Les définitions sont cohérentes dans le sens où  $G \setminus A \not\subseteq \mathcal{K}$  ssi  $\exists \gamma, A \triangleright \gamma$ .
- La propriété de reflexivité est vraie pour les deux définitions : si  $A \triangleright \gamma$ , alors  $\gamma \triangleright \gamma$ .
- Disjonction d'explications : si  $A \triangleright \gamma$  et  $A \triangleright \delta$ , alors  $A \triangleright (\gamma \cup \delta)$ , pour les deux définitions. Cela montre que s'il existe différentes explications possibles, leur disjonction est une explication.
- Disjonction à gauche : si  $A \triangleright^{\ell c} \gamma$  et  $A' \triangleright^{\ell c} \gamma$ , alors  $(A \cup A') \triangleright^{\ell c} \gamma$  (puisque l'érosion est appliquée sur  $\mathcal{K}$ ). En revanche cette propriété n'est pas vraie pour  $\triangleright^{\ell ne}$  puisque l'érosion ne commute pas avec le supremum.
- Pour les mêmes raisons, nous avons la propriété suivante pour  $\triangleright^{\ell c}$  : si  $A \triangleright^{\ell c} \gamma$  et  $A' \triangleright^{\ell c} \delta$ , alors  $(A \cup A') \triangleright^{\ell c} \gamma$  ou  $(A \cup A') \triangleright^{\ell c} \delta$ , mais cela n'est pas vrai pour  $\triangleright^{\ell ne}$ .
- Pour les conjonctions, une propriété de monotonie est vérifiée pour  $\triangleright^{\ell c}$  : si  $A \triangleright^{\ell c} \gamma$  et  $\gamma \subseteq A'$ , alors  $(A \cap A') \triangleright^{\ell c} \gamma$ . Pour  $\triangleright^{\ell ne}$ , seule une forme faible est vérifiée : si  $A \triangleright^{\ell ne} \gamma$  et  $A' \triangleright^{\ell ne} \gamma$ , alors  $(A \cap A') \triangleright^{\ell ne} \gamma$ . Notons néanmoins que cette forme faible est naturelle et intéressante.

Des propriétés équivalentes dans le formalisme des LD en sont directement héritées, grâce à la construction et aux liens entre les différentes théories décrits dans la section 2.

## 4 Conclusion

A des fins d'interprétation d'images, nous avons proposé des outils calculatoires pour considérer le raisonnement abductif dans le cadre des logiques de description. Cela a été possible grâce aux outils venant de l'analyse formelle de concepts, la morphologie mathématique, et le cadre général de la théorie des ensembles et des treillis. Les propriétés et interprétations des opérateurs d'explication ont été analysées, et les postulats de rationalité ont été prouvés. Un exemple d'application a accompagné le développement de ces méthodes pour montrer leur utilité en pratique. Il convient cependant d'étendre l'étude de cet exemple, en prenant en compte les aspects de complexité qui n'ont pas été abordés dans cet article.

## Références

- BAADER F. (1995). Computing a minimal representation of the subsumption lattice of all conjunctions of concepts defined in a terminology. In *Knowledge Retrieval, Use and Storage for Efficiency : 1st International KRUSE Symposium*, p. 168–178.
- BAADER F. (2003). *The description logic handbook : theory, implementation, and applications*. Cambridge University Press.
- BAADER F., SERTKAYA B. & TURHAN A. (2007). Computing the least common subsumer wrt a background terminology. *Journal of Applied Logic*, **5**(3), 392–420.
- BLOCH I., HEIJMANS H. & RONSE C. (2007). Mathematical Morphology. In M. AIELLO, I. PRATT-HARTMAN & J. VAN BENTHEM, Eds., *Handbook of Spatial Logics*, chapter 13, p. 857–947. Springer.
- BLOCH I., PINO-PÉREZ R. & UZCÁTEGUI C. (2001). Explanatory Relations based on Mathematical Morphology. In *ECSQARU 2001*, p. 736–747, Toulouse, France.
- ELSENBRICH C., KUTZ O. & SATTLER U. (2006). A case for abductive reasoning over ontologies. In *OWL : Experiences and Directions*, Athens, Georgia, USA.
- GANTER B., WILLE R. & WILLE R. (1999). *Formal concept analysis*. Springer Berlin.
- HEIJMANS H. J. A. M. (1994). *Morphological Image Operators*. Academic Press, Boston.
- HEIJMANS H. J. A. M. & RONSE C. (1990). The Algebraic Basis of Mathematical Morphology – Part I : Dilations and Erosions. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, **50**, 245–295.
- HUDELLOT C., ATIF J. & BLOCH I. (2008). Fuzzy spatial relation ontology for image interpretation. *Fuzzy Sets and Systems*, **159**(15), 1929–1951.
- HUDELLOT C., ATIF J. & BLOCH I. (2010). Integrating bipolar fuzzy mathematical morphology in description logics for spatial reasoning. In *European Conference on Artificial Intelligence ECAI 2010*, p. 497–502, Lisbon, Portugal.
- KLARMAN S., ENDRISS U. & SCHLOBACH S. (2011). ABox Abduction in the Description Logic. *Journal of Automated Reasoning*, **46**(1), 43–80.
- MÖLLER R. & NEUMANN B. (2008). Ontology-based reasoning techniques for multimedia interpretation and retrieval. *Semantic Multimedia and Ontologies*, p. 55–98.
- PINO-PÉREZ R. & UZCÁTEGUI C. (1999). Jumping to Explanations versus jumping to Conclusions. *Artificial Intelligence*, **111**, 131–169.
- RONSE C. & HEIJMANS H. J. A. M. (1991). The Algebraic Basis of Mathematical Morphology – Part II : Openings and Closings. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, **54**, 74–97.
- SERRA J. (1982). *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, New-York.
- SERRA (ED.) J. (1988.). *Image Analysis and Mathematical Morphology, Part II : Theoretical Advances*. Academic Press, London.
- STUMME G. (1996). The concept classification of a terminology extended by conjunction and disjunction. In *PRICAI'96 : Topics in Artificial Intelligence*, volume LNCS 1114, p. 121–131.
- STUMME G. (1998). Distributive concept exploration—a knowledge acquisition tool in formal concept analysis. In *KI-98 : Advances in Artificial Intelligence*, p. 117–128 : Springer.