

Introduction à la géométrie projective

Isabelle Bloch

<http://www.tsi.enst.fr/~bloch>

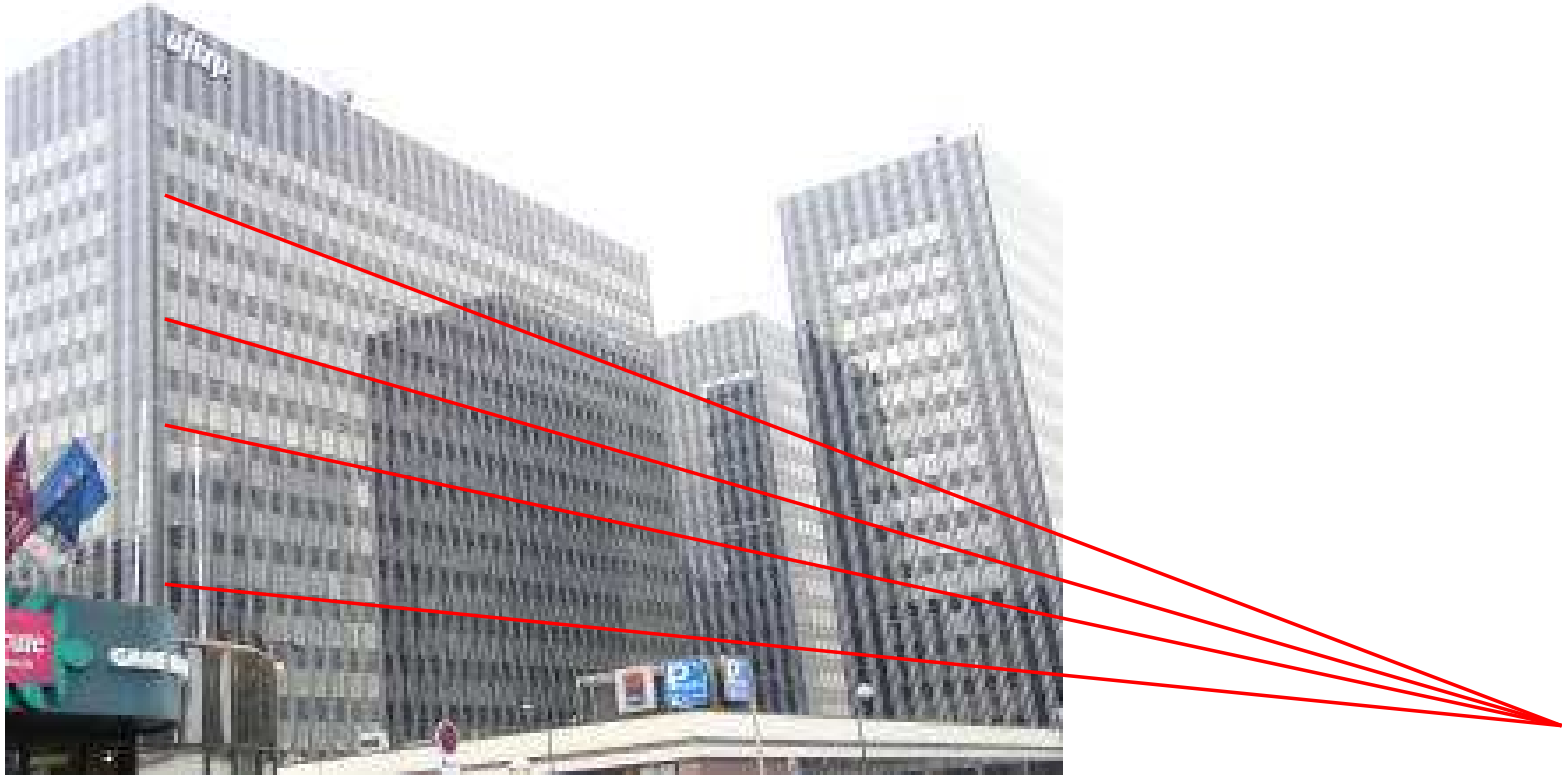
Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications - CNRS UMR 5141 LTCI

Paris - France



Géométrie et représentation de l'espace

- monde = 3D
- images = 2D (souvent)
- \Rightarrow transformations géométriques lors de la formation de l'image



Géométrie projective : intérêt

- principe de dualité : points et droites sont équivalents
- coordonnées homogènes
- algèbre linéaire
- géométrie euclidienne comme cas particulier
- compréhension de la structure d'ensembles de droites, de rotations...
- beaucoup de capteurs font une projection perspective du monde sur un plan
- applications en robotique, vision par ordinateur, synthèse d'image...

Espace projectif

Définitions :

- \mathcal{P}^n : espace projectif de dimension n
- point x représenté par un vecteur de $n + 1$ coordonnées : $x = (x_1, \dots, x_{n+1})^t$ avec au moins une coordonnée x_i non nulle (coordonnées homogènes)
- $(x_1, \dots, x_{n+1})^t$ et $(y_1, \dots, y_{n+1})^t$ représentent le même point
 $\Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0, \forall i, x_i = \lambda y_i$
- point pour lequel $x_{n+1} = 0$ = point à l'infini

Espace projectif = espace quotient :

- $\mathcal{P}^n = (E^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ avec E^{n+1} = espace vectoriel de dimension $n + 1$ et
 $x \sim x' \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0, x = \lambda x'$
- vecteur non nul = droite passant par l'origine de E^{n+1}
- deux vecteurs sont équivalents s'ils définissent la même droite
- point projectif (élément de \mathcal{P}^n) = classe d'équivalence de vecteurs

Projection canonique et bases

Projection canonique :

$$p : E^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{P}^n$$
$$\vec{x} \mapsto p(\vec{x}) = x$$

p n'est pas bijective !

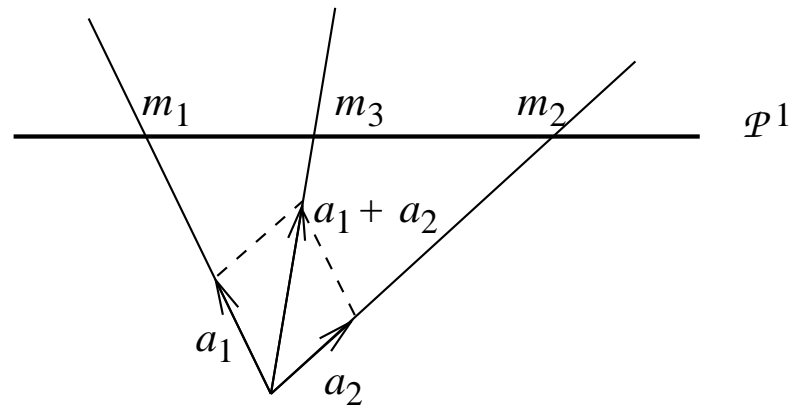
espace vectoriel de dimension n	n vecteurs de base
espace affine de dimension n	$n + 1$ points de base
espace projectif de dimension n	$n + 2$ points de base

Base projective :

- base $\vec{a}_i, i = 1 \dots n + 1$ de E^{n+1}
- points projectifs associés : $m_i = p(\vec{a}_i)$
- ne déterminent pas les coordonnées projectives d'un point x ($n + 1$ paramètres)
- \Rightarrow l'ajout d'un $(n + 2)$ -ème point dans la base $m_{n+2} = p(\sum \vec{a}_i)$ permet de n'avoir plus qu'un paramètre

Projection canonique et bases

Exemple : \mathcal{P}^1



Base canonique

$$e_i = (0 \dots 1 \dots 0)^t$$

pour $i = 1 \dots n + 1$, avec un 1 à la i -ème place

$$e_{n+2} = (1 \dots 1 \dots 1)^t$$

Coordonnées d'un point projectif dans la base :

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} x_i e_i$$

Compacité

Théorème : L'espace projectif \mathcal{P}^n est topologiquement équivalent à la sphère unité S^n de \mathbb{R}^{n+1} repliée, c'est-à-dire dans laquelle on identifie les points aux antipodes.

- $x = (x_1, \dots, x_{n+1})^t$ point de S^n si $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$
- x est aussi un point de \mathcal{P}^n
- $-x$: aux antipodes de x sur la sphère unité mais même point de \mathcal{P}^n

Conséquence : l'espace projectif \mathcal{P}^n est compact

Droite projective \mathcal{P}^1

- base : $e_1 = (1, 0)^t$, $e_2 = (0, 1)^t$, $e_3 = (1, 1)^t$
- point : $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ avec $x_1 \neq 0$ ou $x_2 \neq 0$
- ou $x = \alpha e_1 + e_2$ avec $\alpha = \frac{x_1}{x_2}$
- $e_1 =$ point à l'infini

Plan projectif \mathcal{P}^2

- point : $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ avec x_i non tous nuls
- droite d : définie par un triplet de nombres (d_1, d_2, d_3) non tous nuls
- x appartient à $d \Leftrightarrow d^t x = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 d_i x_i = 0$
- définit aussi l'ensemble des droites qui passent par x
- dualité entre point et droite
- droite passant par x et y : $z = \alpha x + \beta y$ donc $Det(z, x, y) = 0$, et $z^t(x \wedge y) = 0 \Rightarrow$ droite $d = x \wedge y$
- point d'intersection de deux droites d et d' : $d \wedge d'$
- deux droites s'intersectent toujours
- $x_3 = 0$: droite à l'infini
- correspondance affine / projectif : $(X_1, X_2)^t / (X_1, X_2, 1)^t$ ou $X_1e_1 + X_2e_2 + e_3$, avec $X_1 = \frac{x_1}{x_3}$, $X_2 = \frac{x_2}{x_3}$

Espace projectif \mathcal{P}^3

- point : $x = \sum_{i=1}^4 x_i e_i$ avec x_i non tous nuls
- plan π : défini par quatre nombres non tous nuls $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$
- équation du plan $\pi^t x = 0$
- dualité entre point et plan
- droite de \mathcal{P}^3 : définie soit à partir de deux points, soit comme intersection de deux plans
- plan à l'infini : obtenu pour $x_4 = 0$
- tout plan intersecte le plan à l'infini selon une droite à l'infini
- affine / projectif : $(X_1, X_2, X_3)^t / (X_1, X_2, X_3, 1)^t$ ou $X_1 e_1 + X_2 e_2 + X_3 e_3 + e_4$, avec $X_1 = \frac{x_1}{x_4}$, etc.

Expression linéaire de problèmes géométriques

Conique de \mathcal{P}^2 :

$$x^t C x = 0$$

C = matrice 3×3 définie à un facteur non nul près (5 coefficients indépendants)

Rang de $C \Rightarrow$ type de la conique (invariant projectif)

Intersection d'une droite et d'une conique :

- $x + \alpha y$ point de la droite définie par les deux points x et y
- ce point appartient à la conique si et seulement si : $(x + \alpha y)^t C (x + \alpha y) = 0$ soit $x^t C x + 2\alpha x^t C y + \alpha^2 y^t C y = 0$ (deux solutions en général)
- cas où le discriminant est nul : la droite est alors tangente à la conique $t = Cx$

Quadrique de \mathcal{P}^3 :

$$x^t Q x = 0$$

Intersection d'une droite et d'une quadrique :

- solution d'une équation du second degré
- plan tangent $\pi = Qx$

Applications linéaires : colinéations

$$H : \mathcal{P}^m \rightarrow \mathcal{P}^n$$

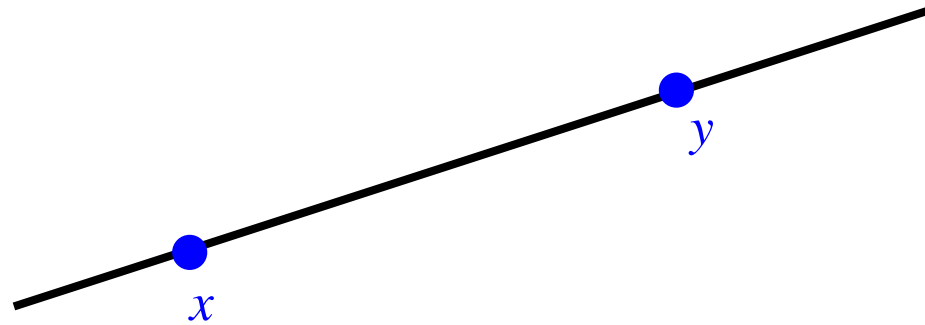
linéaire, définie par une matrice $(m + 1) \times (n + 1)$, de déterminant non nul, et définie à un facteur non nul près

Changement de base : colinéation H inversible $(n + 1) \times (n + 1)$

Transformations linéaires

Espace	Degrés de liberté	Forme des transformations linéaires	Invariants
Projectif	15	$T_P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}$	bi-rapport
Affine	12	$T_A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	distances relatives le long de directions, parallélisme
Métrique	7	$T_M = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & t_x \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & t_y \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	distances relatives, angles
Euclidien	6	$T_E = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	distances absolues

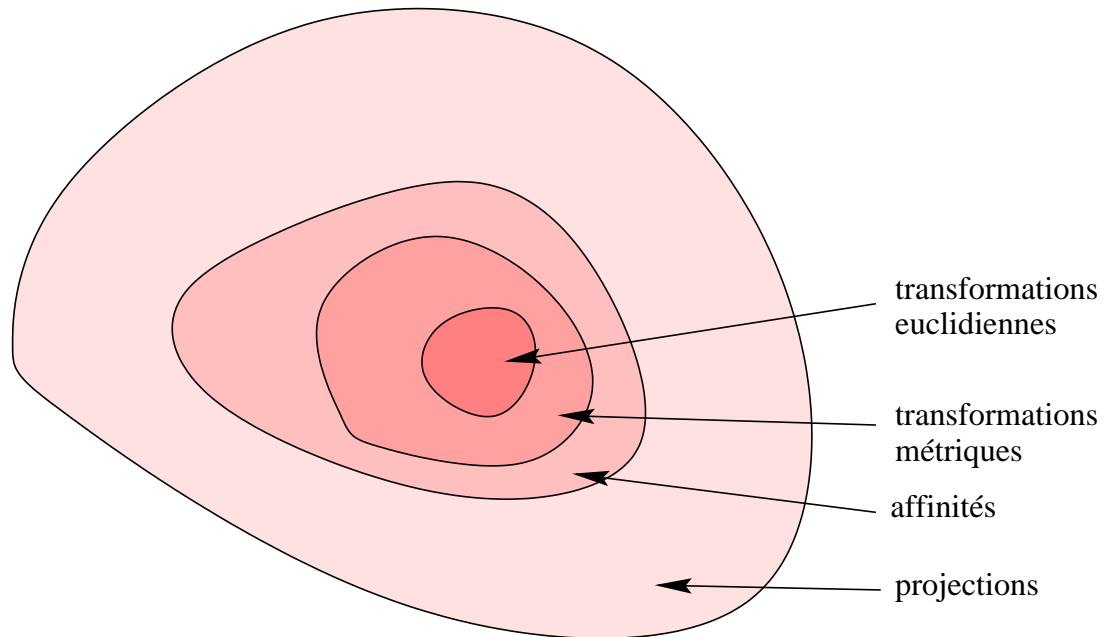
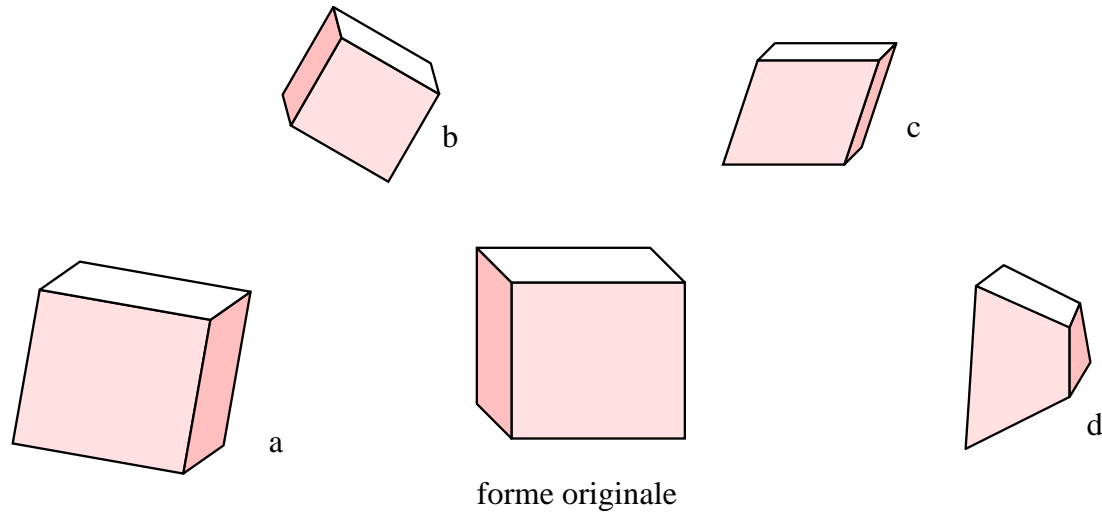
Bi-rapport



- droite définie par x et y
- 4 points de la droite $x + \lambda_i y$
- bi-rapport :

$$\frac{\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_4}}{\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_4}}$$

Stratification des transformations linéaires



Exemples de transformations en coordonnées homogènes

Translation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemples de transformations en coordonnées homogènes

Rotation autour de x :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemples de transformations en coordonnées homogènes

Homothétie :

$$\begin{pmatrix} \lambda_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemples de transformations en coordonnées homogènes

Projection perspective depuis le point $(0, 0, -f, 1)^t$ sur le plan $z = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix}$$

Application linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}^3 & \rightarrow & \mathcal{P}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{z}{f} \end{pmatrix} \end{array}$$

Coordonnées affines :

$$X_1 = \frac{xf}{z} \quad X_2 = \frac{yf}{z}$$

(non linéaire)

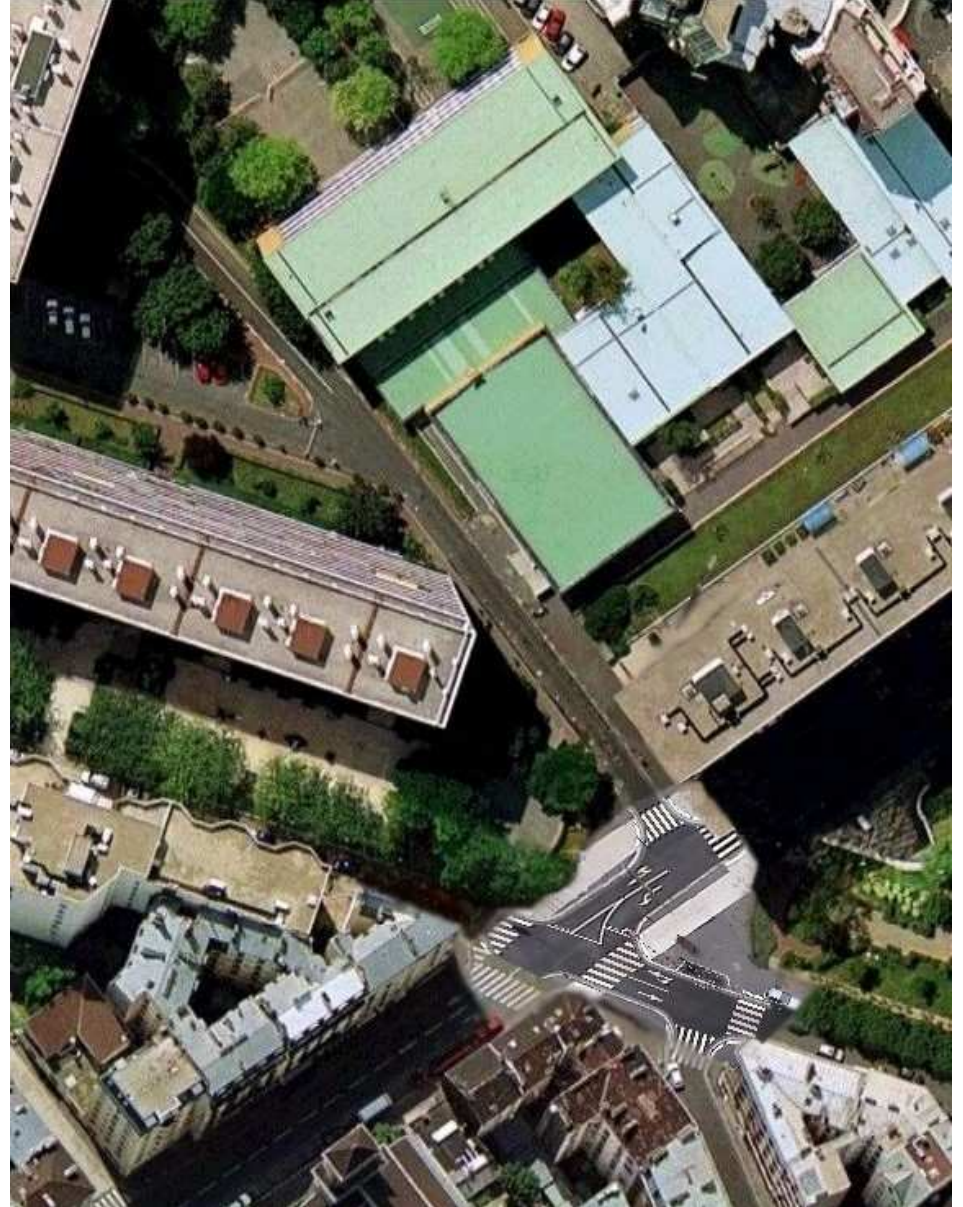
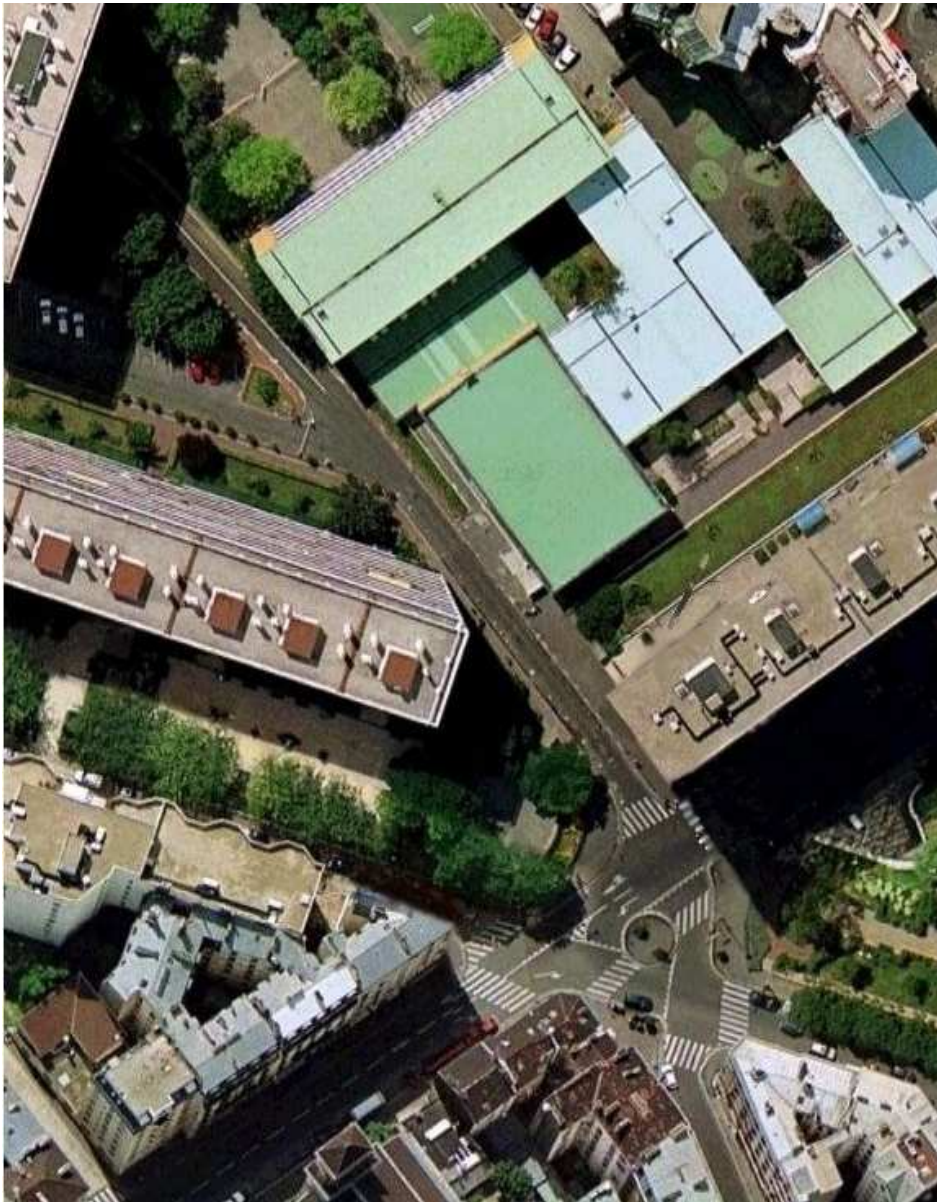
Exemple : projet Infomagic

Plan image - Ortho-image : retrouver les trajectoires



Exemple : projet Infomagic

Ortho-image de référence et mise à jour (rond-point) à partir des informations d'une caméra



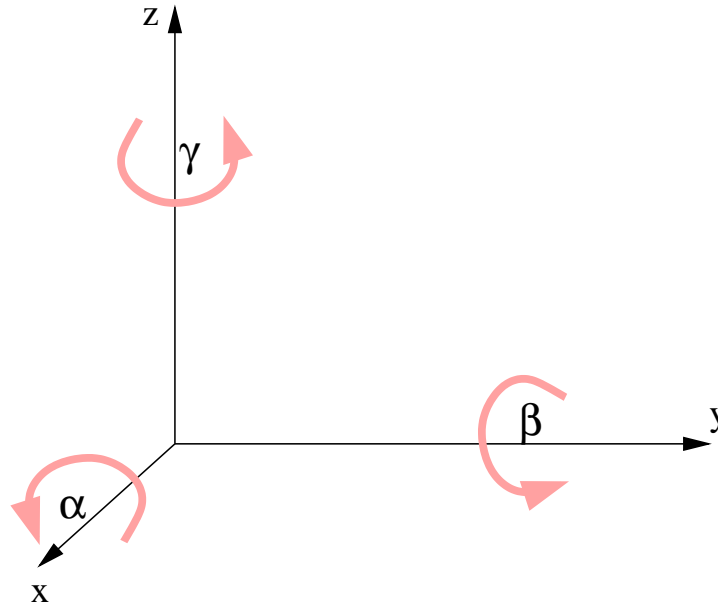
Exemple : projet Infomagic

Applications :

- extraction d'informations 3D
- calibrage automatique
- détection et suivi d'objets (voitures, piétons...)
- reconnaissance de véhicules
- requêtes 3D
- ...

Représentations des rotations de \mathbb{R}^3

Angles d'Euler :



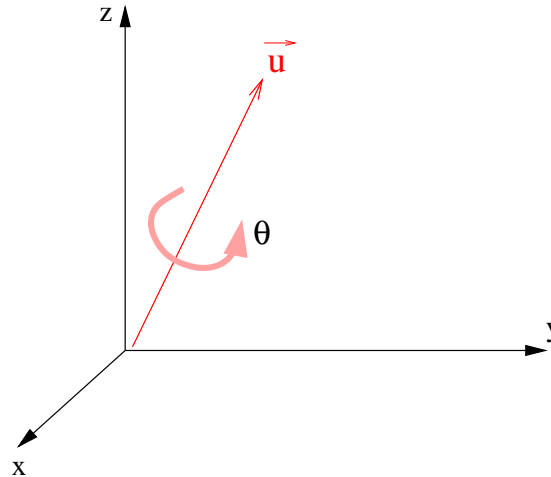
$$R = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \beta & -\cos \gamma \sin \beta \sin \alpha - \sin \gamma \cos \alpha & -\cos \gamma \sin \beta \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \\ \sin \gamma \cos \beta & -\sin \gamma \sin \beta \sin \alpha + \cos \gamma \cos \alpha & -\sin \gamma \sin \beta \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \sin \alpha & \cos \beta \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Inversement, soit $u = \sqrt{R_{11}^2 + R_{21}^2}$

- si $u \neq 0$ alors : $\cos \alpha = R_{33}/u$, $\cos \beta = u$ et $\cos \gamma = R_{11}/u$,
- si $u = 0$ alors $\beta = \pm\pi/2 \Rightarrow$ seulement $\alpha + \gamma$.

Représentations des rotations de \mathbb{R}^3

Représentation canonique :



$$H = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \quad e^H = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^n}{n!}.$$

e^H = matrice de rotation d'axe $\vec{u} = (a, b, c)^t$ et d'angle $\theta = \|\vec{u}\| [2\pi]$.

Théorème de Rodrigues :

$$R = e^H = I + \frac{\sin \theta}{\theta} H + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} H^2$$

Représentations des rotations de \mathbb{R}^3

Représentation canonique :

$$H^2 = \begin{pmatrix} -c^2 - b^2 & ab & ac \\ ab & -c^2 - a^2 & bc \\ ac & bc & -a^2 - b^2 \end{pmatrix}$$

$$H^3 = -(a^2 + b^2 + c^2) \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = -\theta^2 H$$

$$H^4 = -\theta^2 H^2$$

$$H^5 = \theta^4 H$$

$$H^{2n} = (-1)^{n-1} \theta^{2n-2} H^2 \quad \text{pour } n \geq 1$$

$$H^{2n+1} = (-1)^n \theta^{2n} H \quad \text{pour } n \geq 0$$

$$\sin \theta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{n!} \quad \cos \theta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{n!}$$

Représentations des rotations de \mathbb{R}^3

Quaternions :

$$q = (q_1, q_2, q_3, q_4)^t = (s, v)$$

- s = partie réelle, v = partie imaginaire
- Produit : $q \times q' = (ss' - v \cdot v', sv' + s'v + v \wedge v')$
- Conjugué : $\bar{q} = (s, -v)$
- Norme : $|q|^2 = \bar{q} \times q = q \times \bar{q} = (s^2 + \|v\|^2, 0) = (\|q\|^2, 0)$
- $|q \times q'| = |q||q'|$

Représentation d'une rotation d'axe \vec{u} et d'angle θ : (s, v) et $(-s, -v)$ avec :

$$s = \cos \frac{\theta}{2} \quad v = \sin \frac{\theta}{2} \vec{u}$$

Relation d'équivalence : $\mathcal{R}(q, q') \Leftrightarrow q = -q'$

\mathcal{Q}_1 = ensemble des quaternions de norme 1

\mathcal{R}^3 est isomorphe à $\mathcal{Q}_1/\mathcal{R}$
 \mathcal{R}^3 est isomorphe à \mathcal{P}^3

Représentations des rotations de \mathbb{R}^3

Quaternions :

$$Rx = q \times x \times \bar{q}$$

Soit $q = (s, v)$, avec $v = (l, m, n)^t$ et $l^2 + m^2 + n^2 + s^2 = 1$.

$$\begin{aligned} q \times x \times \bar{q} &= (s, v) \times (0, x) \times (s, -v) = (-v \cdot x, sx + v \wedge x) \times (s, -v) \\ &= (-sv \cdot x + v \cdot (sx + v \wedge x) + (sx + v \wedge x) \wedge (-v)) \\ &= (0, 2(v \cdot x)v + (s^2 - v^2)x + 2sv \wedge x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= 2A + (s^2 - v^2)I + 2sV \\ &= \begin{pmatrix} s^2 + l^2 - m^2 - n^2 & 2(lm - sn) & 2(ln + sm) \\ 2(lm + sn) & s^2 - l^2 + m^2 - n^2 & 2(mn - sl) \\ 2(ln - sm) & 2(mn + sl) & s^2 - l^2 - m^2 + n^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec :

$$V = \begin{pmatrix} 0 & -n & m \\ n & 0 & -l \\ -m & l & 0 \end{pmatrix} \quad A = (lv, mv, nv)$$

Application des quaternions au recalage rigide

Minimisation de $E = \sum_{i=1}^n \|x_i - (r(y_i) + t)\|^2$

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^n |x_i - q \times y_i \times \bar{q}|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i - q \times y_i \times \bar{q}|^2 |q|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i \times q - q \times y_i \times \bar{q} \times q|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i \times q - q \times y_i|^2 = \sum_{i=1}^n q^t A_i^t A_i q \end{aligned}$$

La rotation optimale s'obtient en calculant les valeurs propres de la matrice A :

$$A = \sum_{i=1}^n A_i^t A_i.$$

Solution du problème de minimisation aux moindres carrés = **quaternion qui est le vecteur propre de norme 1 correspondant à la plus petite valeur propre de A**