Eléments de géométrie différentielle

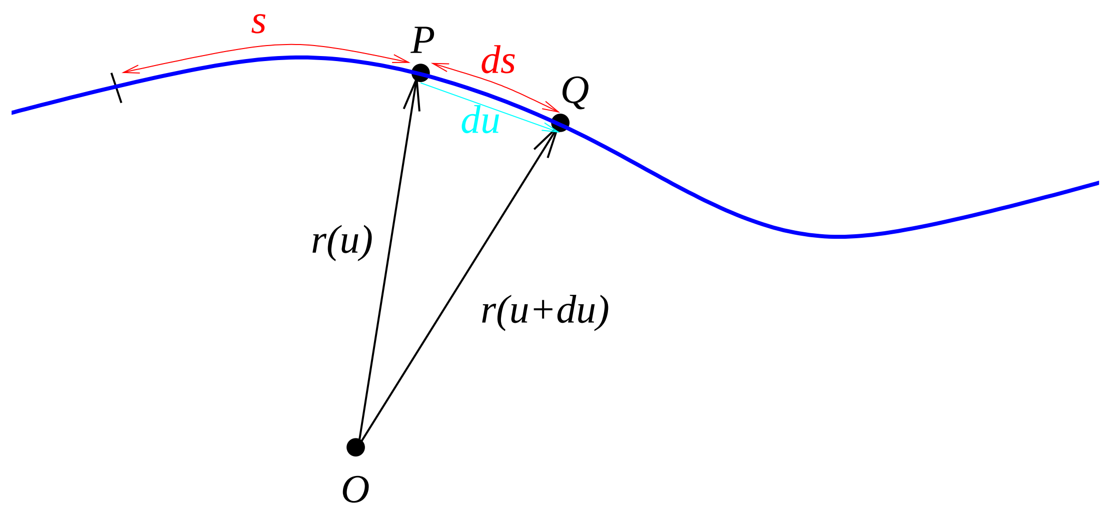
Isabelle Bloch

http://www.tsi.enst.fr/˜bloch

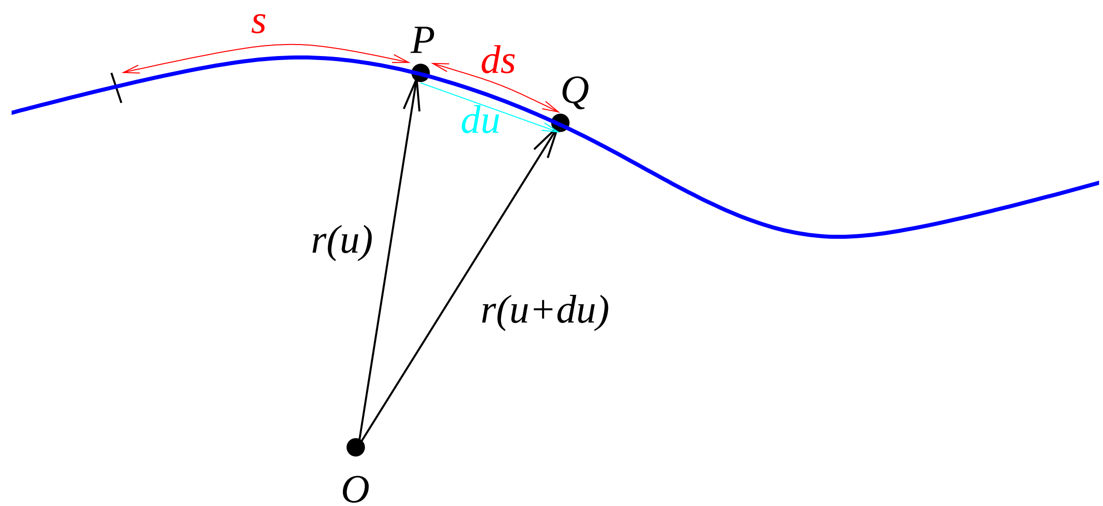
Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications - CNRS UMR 5141 LTCI

Paris - France

Courbes, repère de Frenet



Courbes, repère de Frenet



- Abscisse curviligne :

$$s(u) = \int_{u_0}^{u} \|r'(u)\| du$$

- Tangente à la courbe en P :

$$T = \frac{dr}{ds}$$

- Courbure et normale en P:

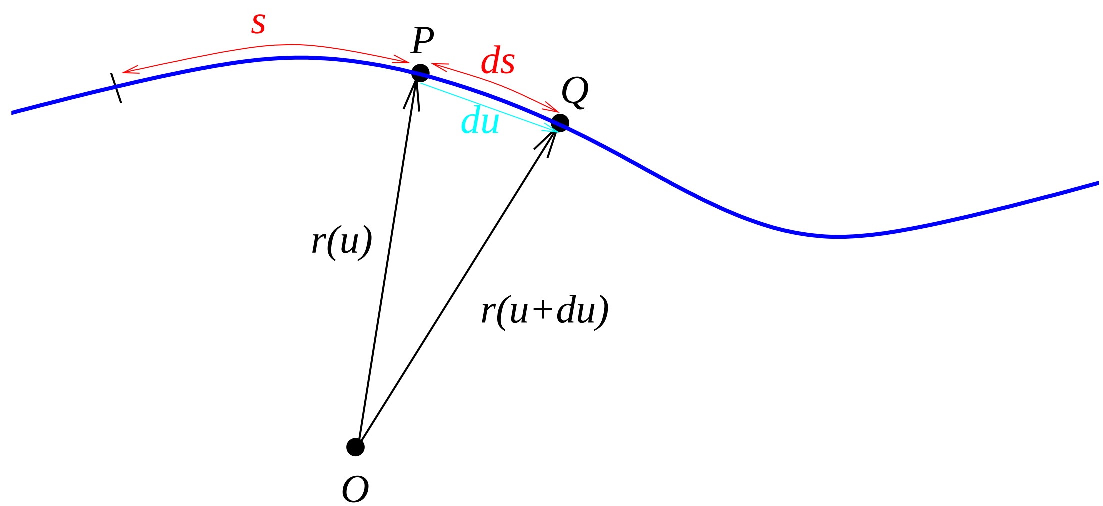
$$\frac{dT}{ds} = kN$$

- Bi-normale :

$$B = T \wedge N$$

- Repère de Frenet : (T, N, B)

Courbes, repère de Frenet



- Abscisse curviligne :

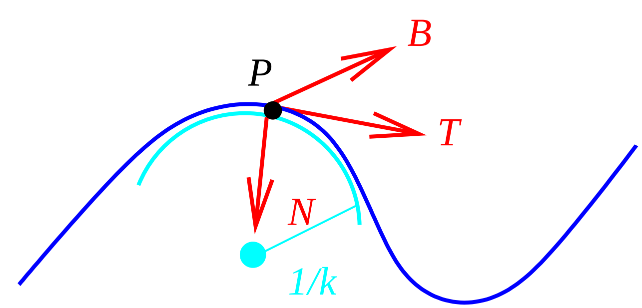
$$s(u) = \int_{u_0}^{u} \|r'(u)\| du$$

- Tangente à la courbe en P :

$$T = \frac{dr}{ds}$$

- Courbure et normale en P:

$$\frac{dT}{ds} = kN$$



- Bi-normale :

$$B = T \wedge N$$

- Repère de Frenet : (T, N, B)

Formules de Frenet-Serret

$$
\begin{aligned}
\frac{dr}{ds} &= T \\
\frac{dT}{ds} &= kN \\
\frac{dN}{ds} &= \tau B - kT \\
\frac{dB}{ds} &= -\tau N
\end{aligned}
$$

τ = torsion

Ecriture condensée :

$$
\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau \\ 0 \\ -k \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}
$$

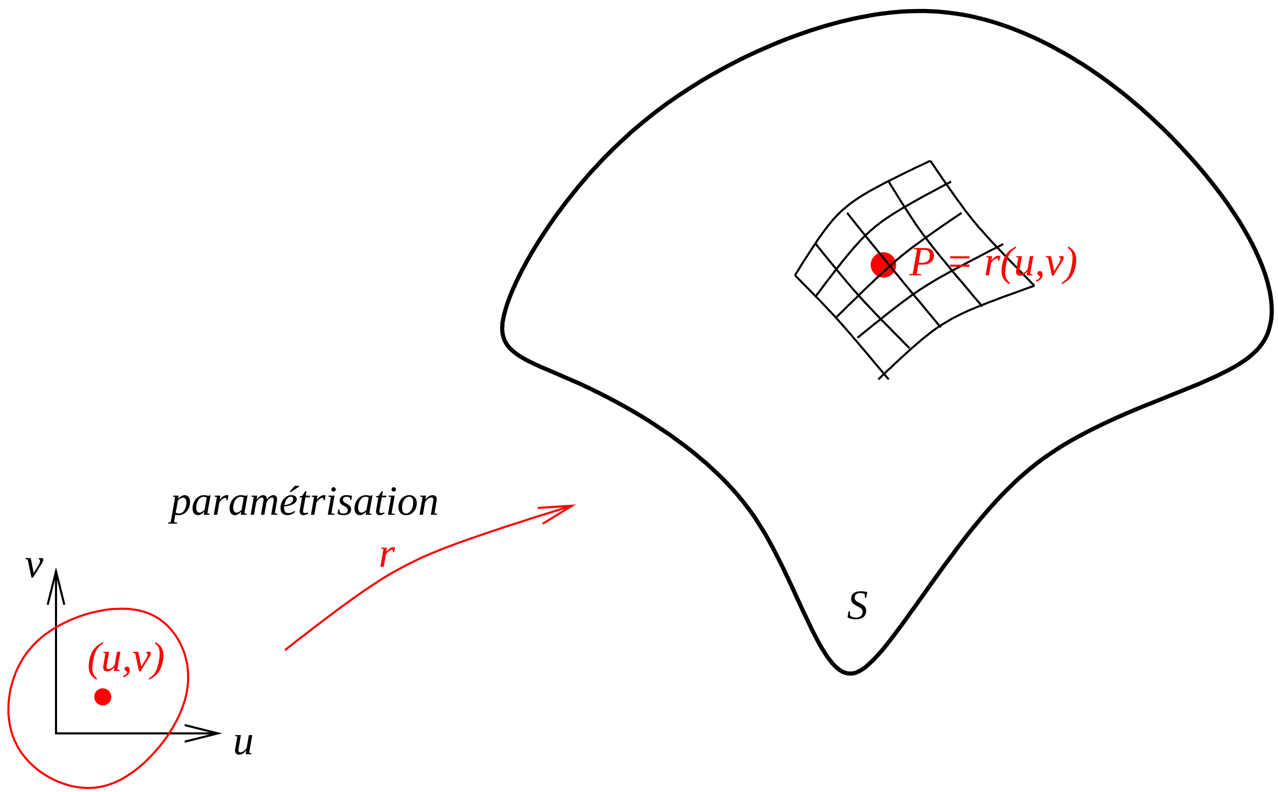
Formules de Frenet-Serret

En fonction d’un paramètre quelqueconque :

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{dr}{du} \\
T &= \frac{\dot{r}}{\dot{s}} \\
\dot{s} &= \frac{ds}{du} = |\dot{r}| \\
kB &= \frac{\dot{r} \wedge \ddot{r}}{\dot{s}^3} \\
N &= B \wedge T \\
\tau &= \frac{\dot{r}(\ddot{r} \wedge \dddot{r})}{\dot{s}^6 k^2}
\end{aligned}
$$

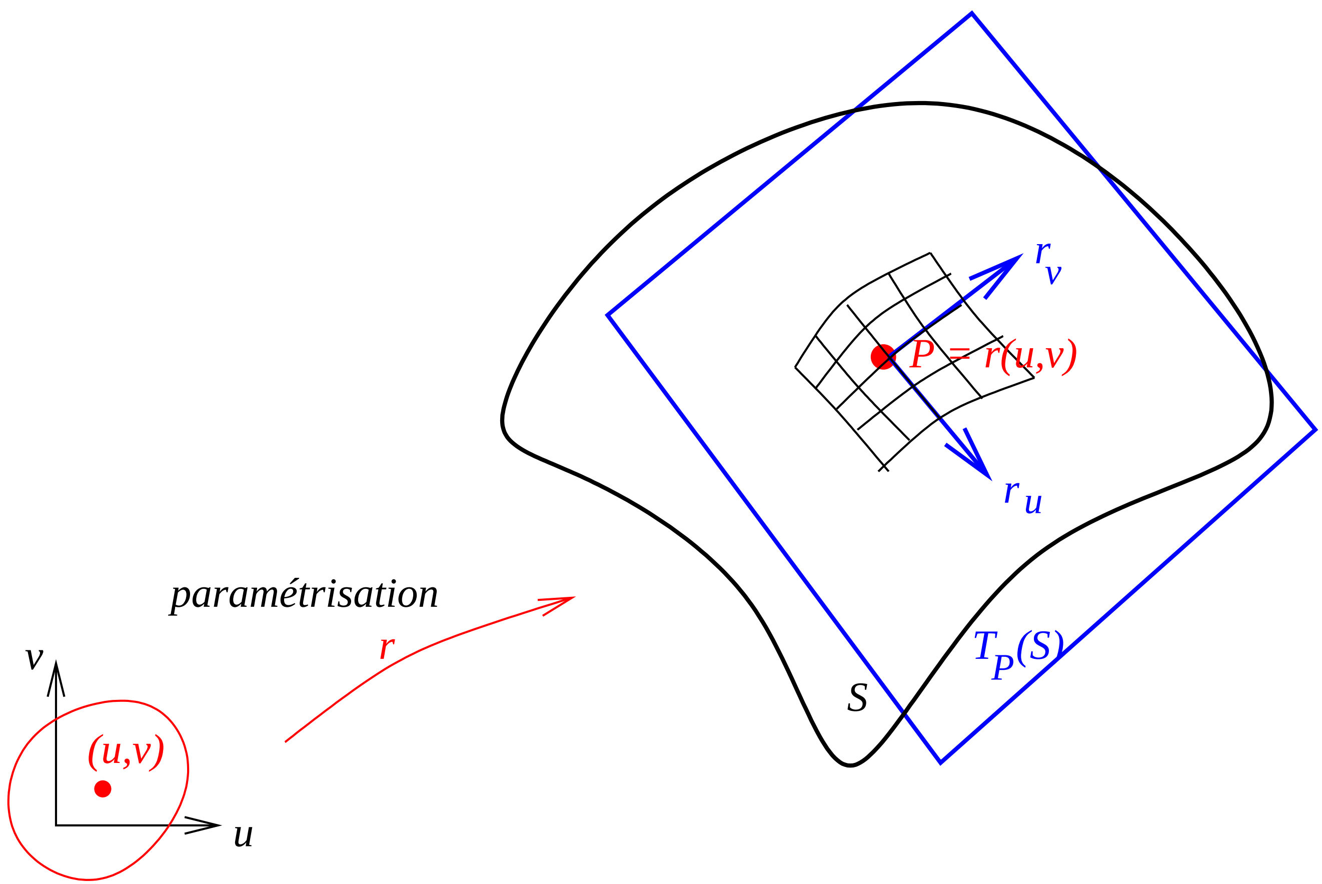
Surfaces

- Paramétrisation : $P = r(u, v)$
- Plan tangent en P : défini par $\frac{\partial r}{\partial u} = r_u$, $\frac{\partial r}{\partial v} = r_v$
- Normale à la surface en P : $n = \frac{r_u \wedge r_v}{|r_u \wedge r_v|}$



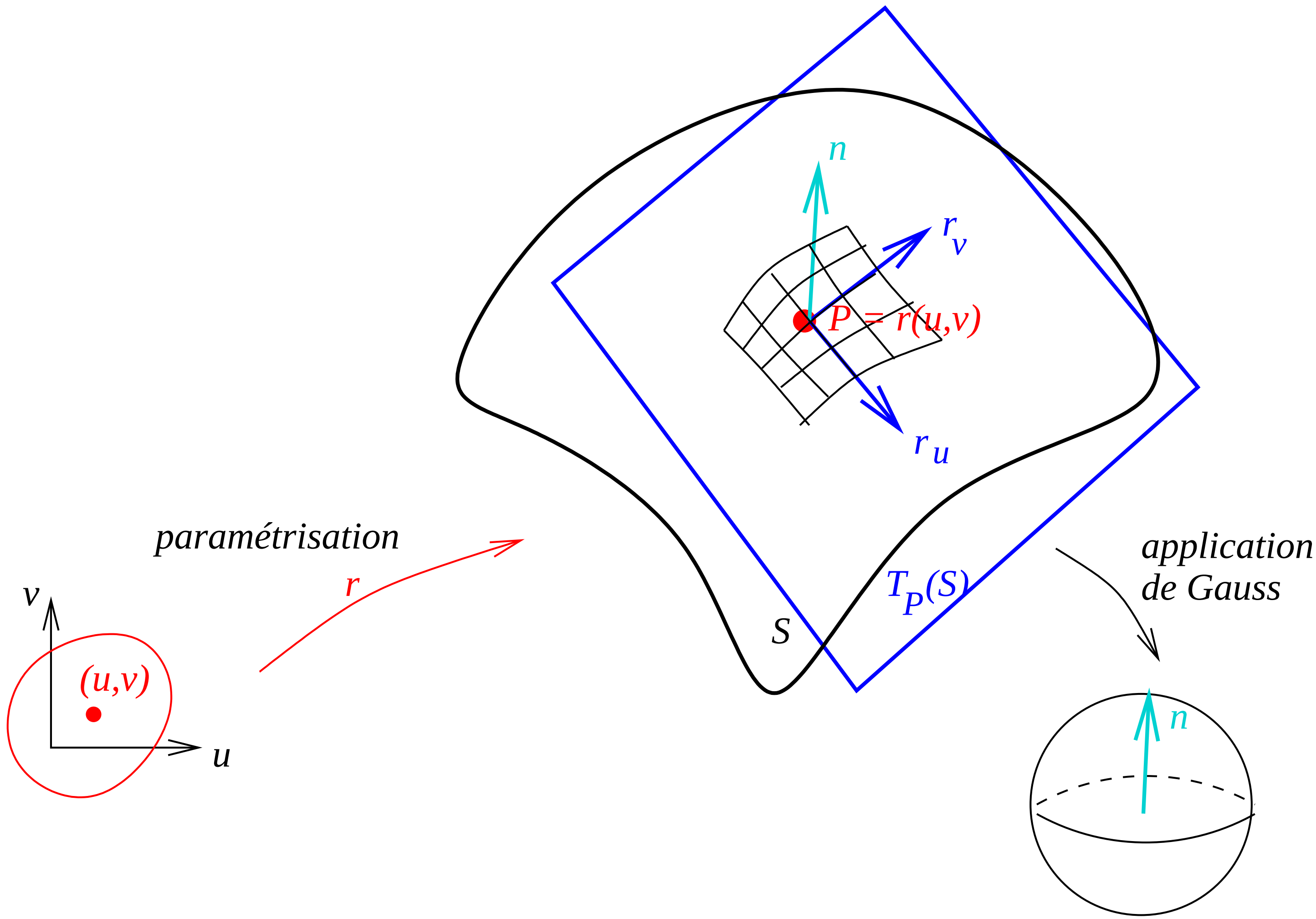
Surfaces

- Paramétrisation : $P = r(u, v)$
- Plan tangent en P : défini par $\frac{\partial r}{\partial u} = r_u$, $\frac{\partial r}{\partial v} = r_v$
- Normale à la surface en P : $n = \frac{r_u \wedge r_v}{|r_u \wedge r_v|}$



Surfaces

- Paramétrisation : $P = r(u, v)$
- Plan tangent en P : défini par $\frac{\partial r}{\partial u} = r_u$, $\frac{\partial r}{\partial v} = r_v$
- Normale à la surface en P : $n = \frac{r_u \wedge r_v}{|r_u \wedge r_v|}$



Courbe sur une surface : première forme fondamentale

Courbe paramétrée par t : $U = (u(t), v(t))^t$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial r}{\partial v}\frac{dv}{dt} = A\dot{U}$$

$$A = \left(\frac{\partial r}{\partial u} | \frac{\partial r}{\partial v}\right)$$

Longueur du vecteur tangent : $\dot{s}^2 = |\dot{r}|^2 = \dot{U}^t A^t A \dot{U} = \dot{U}^t G \dot{U}$

Première forme fondamentale :

$$G = A^t A = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial r}{\partial u} & \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial r}{\partial v} \\ \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \frac{\partial r}{\partial u} & \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \frac{\partial r}{\partial v} \end{pmatrix}$$

mesure le déplacement dr sur la surface au point de paramètres (u, v) pour des variations (du, dv) de ces paramètres

- Vecteur tangent à la courbe : $T = \frac{\dot{r}}{|\dot{r}|} = \frac{A\dot{U}}{(\dot{U}^t G \dot{U})^{1/2}}$
- Abscisse curviligne : $s = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{dt} dt = \int_{t_0}^{t} (\dot{U}^t G \dot{U})^{1/2} dt$

Deuxième forme fondamentale

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= \ddot{s}T + \dot{s}^2 kN \\ &= \frac{\partial^2 r}{\partial u^2}\dot{u}^2 + 2\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v}\dot{u}\dot{v} + \frac{\partial^2 r}{\partial v^2}\dot{v}^2 + \frac{\partial r}{\partial u}\ddot{u} + \frac{\partial r}{\partial v}\ddot{v}\end{aligned}$$

Le long de la normale à la surface :

$$\ddot{r} \cdot n = \dot{s}^2 kN \cdot n = \dot{U}^t D \dot{U}$$

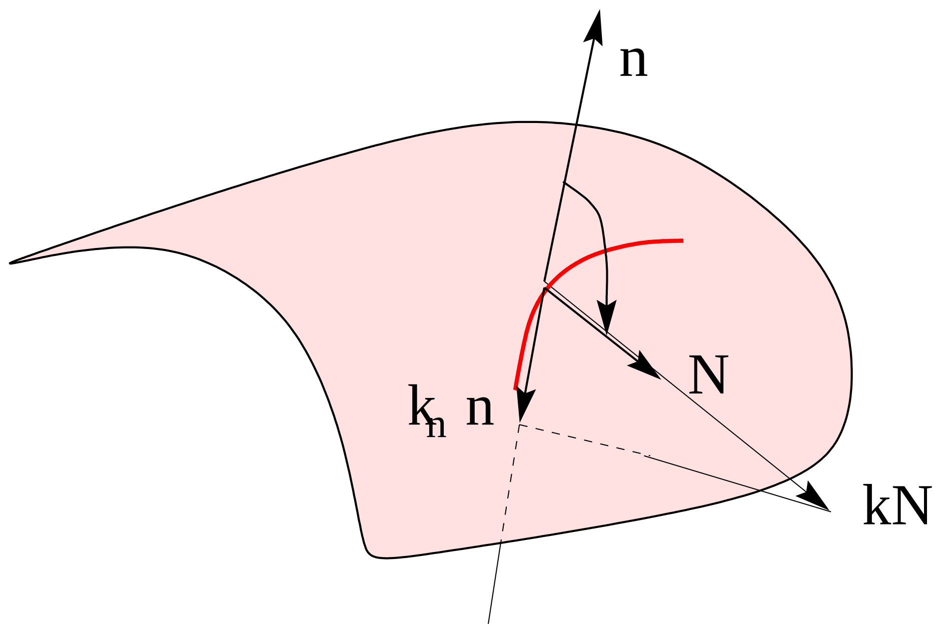
Deuxième forme fondamentale :

$$D = \begin{pmatrix} n \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial u^2} & n \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} \\ n \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial v \partial u} & n \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial v^2} \end{pmatrix}$$

Courbure normale

Intersection de la surface et du plan défini par $\dot{r} = A\dot{U}$ et n = courbe
Courbure normale dans la direction $A\dot{U}$ = courbure de cette courbe :

$$k_n = kN \cdot n$$



En fonction des formes fondamentales :

$$k_n = kN \cdot n = \frac{\ddot{r} \cdot n}{\dot{s}^2} = \frac{\dot{U}^t D \dot{U}}{\dot{U}^t G \dot{U}}$$

Courbures sur des surfaces

- Courbure normale dans une direction
- Courbures principales k_1 et k_2 : valeurs minimale et maximale de k_n (dans les directions principales)
- Courbure gaussienne :

$$K = k_1 k_2 = \frac{|D|}{|G|}$$

- Courbure moyenne :

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Notations usuelles

- Première forme fondamentale :

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

- Deuxième forme fondamentale :

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

- Courbures principales = valeurs propres de :

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

- Courbure gaussienne :

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

- Coubure moyenne :

$$H = \frac{LG + EN - 2FM}{2(EG - F^2)}$$

Changement de paramétrisation

Autre paramétrisation (u', v') :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix}$$

Les matrices A, G et D deviennent :

$$A' = AP \quad G' = P^t G P \quad D' = P^t D P$$

n, les directions et courbures principales, les courbures gaussienne et moyenne sont invariantes par changement de paramétrisation $\Downarrow$ Propriétés intrinsèques de la surface

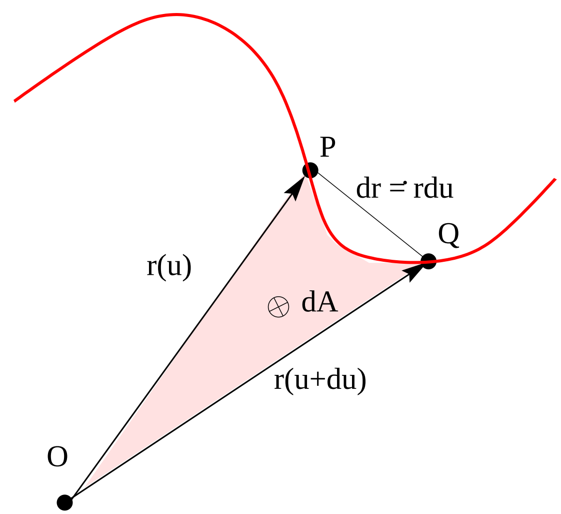
Interprétations géométriques

Longueur d'une courbe $r(u)$ entre les points de paramètres u_0 et u_1 :

$$L = \int_{u_0}^{u_1} \dot{s} du = \int_{u_0}^{u_1} |\dot{r}(u)| du$$

Aire définie par une courbe plane entre deux points de paramètres u_o et u_1 et les segments joignant ces points à O :

$$A = \frac{1}{2} \int_{u_0}^{u_1} r(u) \wedge \dot{r}(u) du$$



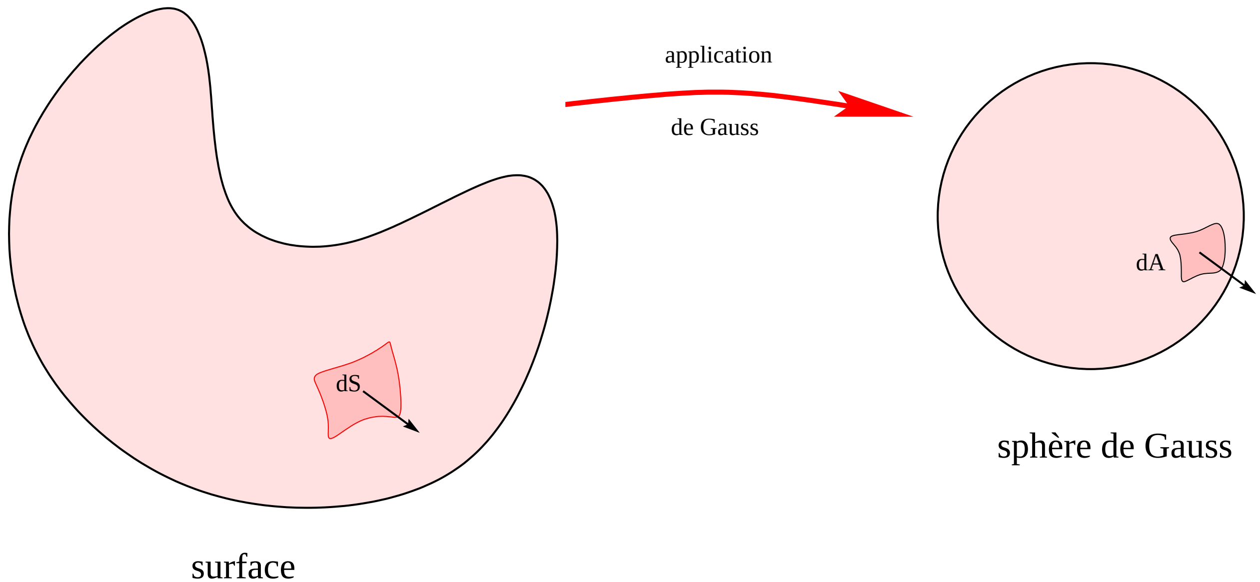
Interprétations géométriques

Morceau de surface défini par $A(u,v)$, $B(u+du,v)$, $C(u,v+dv)$ et $D(u+du,v+dv)$

- Surface :
$$|\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}|dudv = |G|^{1/2}dudv$$
- Surface totale de S :
$$\int\int_{u,v} |G|^{1/2}dudv$$
- Volume sous-tendu :
$$\frac{1}{3} r \cdot (\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v})dudv$$
- Volume total défini par O et S :
$$\frac{1}{3}\int\int_{R} r \cdot (\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v})dudv$$

Interprétations géométriques

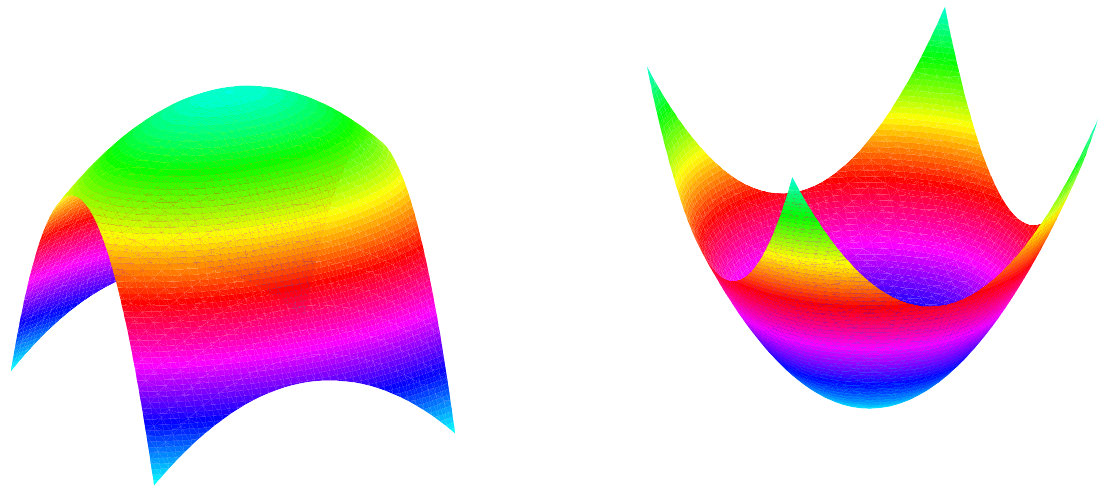
Interprétation de la courbure gaussienne sur la sphère de Gauss :



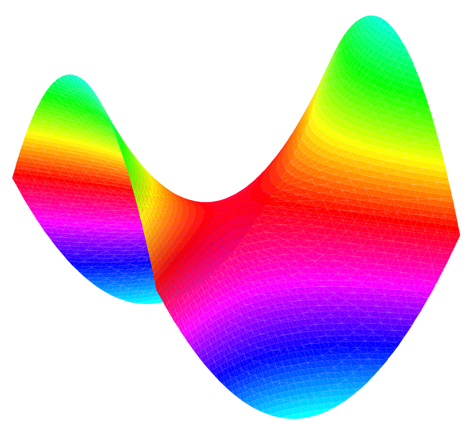
$$K = \frac{dA}{dS}$$

Classification des surfaces

- Surfaces elliptiques : $K > 0$ (pas de changement de sens sur la sphère de Gauss)

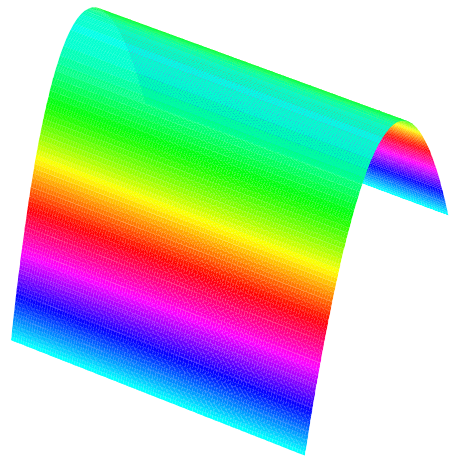


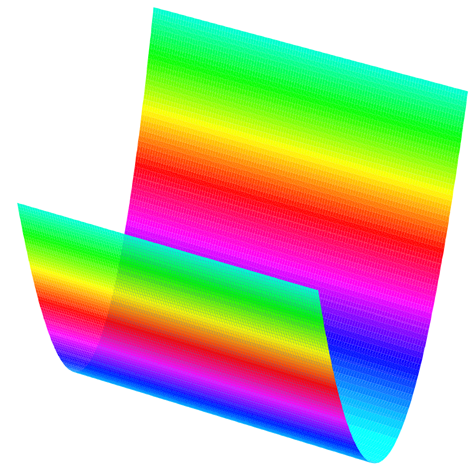
- Surfaces hyperbolique : $K < 0$ (inversion de sens)



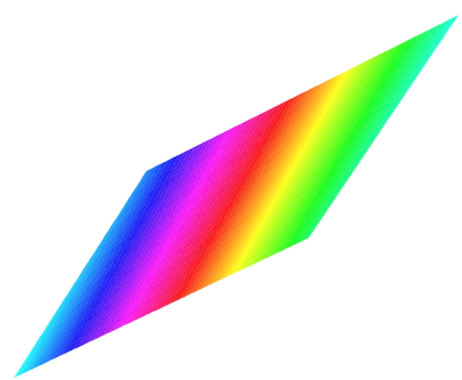
Classification des surfaces

- Surfaces paraboliques : $K = 0$ et $H \neq 0$





- Surfaces planes : $K = H = 0$



Méthodes de calcul des courbures

- Méthodes analytiques : après approximation locale par une surface paramétrique
- Méthodes discrètes : calcul direct à partir des points échantillonnés de la surface
  - méthode par dérivation numérique
  - méthode de dérivation de la normale : P et Q deux points proches sur la surface, n_P et n_Q les normales

$$K = \sigma \frac{|n_P - n_Q|}{|PQ|}$$

    avec $\sigma = 1$ si $|PQ| < |(P + n_P) - (Q + n_Q)|$, et $\sigma = -1$ sinon
  - calcul par déficit angulaire : triangles formés de P et de deux voisins P_i et P_{i+1} de P, angle θ_i en P et surface S_i

$$K = \frac{2\pi - \sum_i \theta_i}{\frac{1}{3} \sum_i S_i}$$

Géométrie différentielle dans des volumes numériques

- Image volumique $I(x, y, z)$
- Isosurface $I(x, y, z) = I_0$
- $\Rightarrow \; x = u, \; y = v, \; z = \Phi(u, v), \; r(u, v) = (u, v, \Phi(u, v))$
- Théorème des fonctions implicites :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = -\frac{I'_x}{I'_z}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = -\frac{I'_y}{I'_z}$$

- $\frac{\partial r}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v} \end{pmatrix}$

Géométrie différentielle dans des volumes numériques

$$E = \| \frac{\partial r}{\partial u} \|^2 = 1 + (\frac{\partial \Phi}{\partial u})^2 = \frac{{I'_x}^2 + {I'_z}^2}{{I'_z}^2}$$

$$F = \frac{I'_x I'_y}{{I'_z}^2}$$

$$G = \frac{{I'_y}^2 + {I'_z}^2}{{I'_z}^2}$$

$$L = \frac{2 I'_x I'_z I''_{xz} - {I'_x}^2 I''_{zz} - {I'_z}^2 I'_{xx}}{H {I'_z}^3}$$

$$H^2 = \frac{{I'_x}^2 + {I'_y}^2 + {I'_z}^2}{{I'_z}^2}$$

$$M = \ldots \quad N = \ldots$$

Géométrie différentielle dans des volumes numériques

Discrétisation :

$$I'_x = \frac{\partial I}{\partial x}(x, y, z) = \frac{I(x+1, y, z) - I(x-1, y, z)}{2}$$

etc.

Lissage :

- Convolution avec un filtre de paramètre σ (gaussien, Deriche, etc.)
- $\Rightarrow$ calcul des dérivées par convolution avec les dérivées du filtre

Application : lignes extrémales = passages par 0 des fonctions

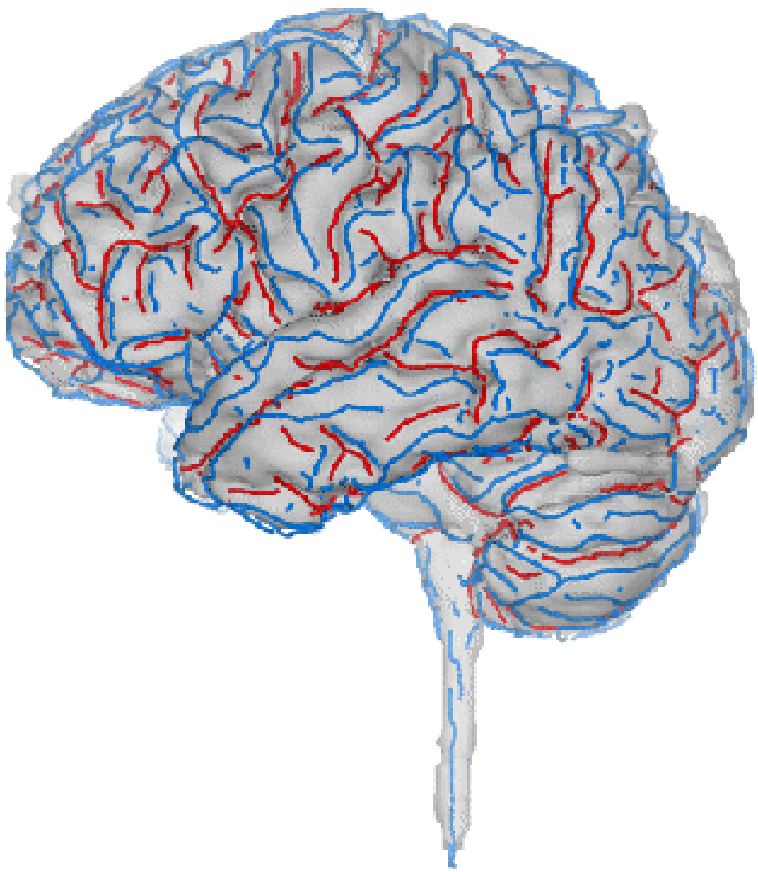
$$e_1 = \vec{\nabla} k_1 \cdot \vec{t_1}$$

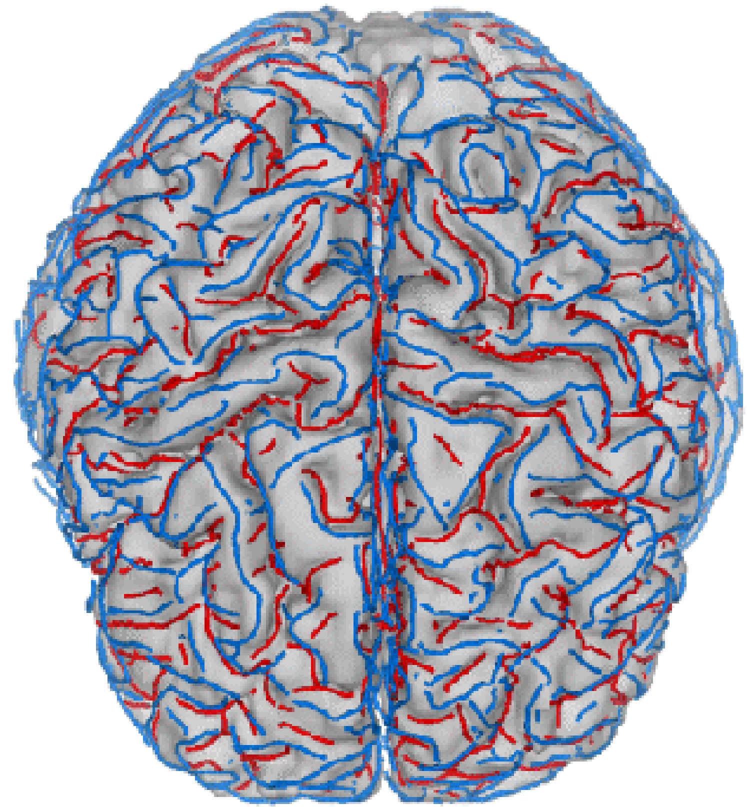
$$e_2 = \vec{\nabla} k_2 \cdot \vec{t_2}$$

(dérivée de la courbure extrémale dans la direction de la direction principale correspondante)

Exemple : sillons du cerveau (INRIA)

(par calcul dans le volume 3D)





Exemple : lignes de crêtes sur des maillages (Max-Planck Institut)

(par approximation polynomiale locale)

Exemple : étude de la croissance (Brown university)