

Restauration

Isabelle Bloch

<http://perso.telecom-paristech.fr/~bloch>

Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications - CNRS UMR 5141 LTCI
Paris - France



Restauration : définition

Correction des images dégradées

—

Reconstruction d'une image de bonne qualité
à partir d'une image de médiocre qualité

Formulation générale

$$g = \mathcal{D}(f)$$

- f : image originale (inconnue)
- g : image dégradée (observée)
- \mathcal{D} : opérateur caractérisant le défaut
 - linéaire
 - spatialement invariant

$$\Rightarrow g = d * f$$

\Rightarrow problème de déconvolution

d : réponse impulsionnelle du défaut, supposée connue

Approche analytique

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) d(x-t) dt$$

par transformée de Fourier :

$$G(u) = F(u)D(u)$$

estimation de la TF de f :

$$\hat{F}(u) = G(u)/D(u) = G(u)W_I(u)$$

estimation de f :

$$\hat{f}(x) = g(x) * w_I(x)$$

SI le filtre inverse W_I et la TF inverse existent...

Approche algébrique

En écrivant l'image sous la forme d'un vecteur, on a :

$$g_j = \sum_{j'} d_{j-j'} f_{j'}$$

ou encore :

$$\mathbf{g} = \Delta \mathbf{f}$$

avec $\Delta = \{\delta_{jk} = d_{j-k}\}$

Solution (si l'inversion est possible) :

$$\hat{\mathbf{f}} = \Delta^{-1} \mathbf{g}$$

Comparaison entre les deux approches

Δ est une **matrice Töplitz** :

$$\Delta = \begin{bmatrix} d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & \dots & & 0 \\ d_{-1} & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & \dots & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & d_1 \\ 0 & & & \dots & d_{-1} & & d_0 \end{bmatrix}$$

Proche d'une **matrice circulante** (les coins diffèrent) :

$$\Delta_c = \{d_{(j-k)_{\text{mod}N}}\}$$

(N = dimension de la matrice)

Comparaison entre les deux approches

Matrice circulante :

$$\Delta_c = \begin{bmatrix} d_0 & d_1 & d_2 & \dots & \dots & d_{-2} & d_{-1} \\ d_{-1} & d_0 & d_1 & d_2 & \dots & \dots & d_{-2} \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ d_2 & & & & & & d_1 \\ d_1 & d_2 & & \dots & d_{-1} & d_0 & \end{bmatrix}$$

Les vecteurs propres sont les racines de l'unité :

$$\Delta_c = P^t \Lambda P$$

avec

$$\mathbf{p}_k = \{e^{-2i\pi k/N} \quad e^{-2i\pi 2k/N} \quad \dots \quad e^{-2i\pi jk/N} \quad \dots\}$$

$$\lambda_k = \sum_j d_{jk} e^{-2i\pi jk/N}$$

Comparaison entre les deux approches

Δ et Δ_c sont asymptotiquement équivalentes, sous les conditions suivantes :

- dimension du système très grande ($N \rightarrow \infty$)
- défaut à support étroit

Remplaçons Δ par Δ_c dans la formulation algébrique :

$$\hat{\mathbf{f}} = \Delta_c^{-1} \mathbf{g} = [P^t \Lambda P]^{-1} \mathbf{g}$$

$$\hat{\mathbf{f}} = P^t \Lambda^{-1} P \mathbf{g}$$

⇒ formulation analytique :

- $P \mathbf{g}$ représente la TF discrète de \mathbf{g} , G
- $1/\lambda_k = 1/\sum_j d_{jk} e^{-2i\pi jk/N}$, c'est donc l'inverse de la fonction de transfert du défaut
- transformée de Fourier inverse, accomplie par le produit matriciel par P^t

Comparaison entre les deux approches

	complexité	domaine de validité
matrice quelconque	$\mathcal{O}(N^3)$	tous défauts linéaires
matrice Töplitz	$\mathcal{O}(N^2)$	défauts linéaires spatialement invariants
matrice circulante	$\mathcal{O}(N \log N)$	défauts linéaires spatialement invariants à réponse impulsionnelle étroite

Comparaison entre les deux approches



Dans une matrice Töplitz (à gauche), le signal est tronqué aux bords. Dans une matrice circulante (à droite), les effets de bord sont repliés : on considère que le signal est périodique au détriment d'une bonne lisibilité du signal (merci Fred).

Défauts singuliers

- Valeurs nulles dans D ou valeurs propres nulles de Δ
- Solution principale au sens de Bracewell :

$$W_B(u) \begin{cases} = 0 & \text{si } D(u) = 0 \\ = \frac{1}{D(u)} & \text{sinon} \end{cases}$$

- Pseudo-inverse :

$$\Delta^t \mathbf{g} = \Delta^t \Delta \mathbf{f}$$

$$\Delta^- = (\Delta^t \Delta)^{-1} \Delta^t$$

(solution aux moindres carrés)

rang = celui de la plus grande matrice carrée régulière issue de Δ

- La restauration consiste à inverser le plus grand système régulier issu de Δ , et d'annuler toutes les composantes de $\hat{\mathbf{f}}$ appartenant au noyau de Δ (ou de $\Delta^t \Delta$, qui est le même).

Mauvais conditionnement

- Valeurs propres très faibles (\Rightarrow problèmes numériques)
- \Rightarrow Régularisation
- Filtre de Wiener :

$$g(x) = f(x) * d(x) + b(x)$$

b : bruit additif de moyenne nulle, non corrélé au signal

Minimisation de :

$$\epsilon = \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - \hat{f}(x))^2 dx \right\rangle$$

Théorème de Parseval :

$$\epsilon = \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} |(F(u) - \hat{F}(u))|^2 du \right\rangle$$

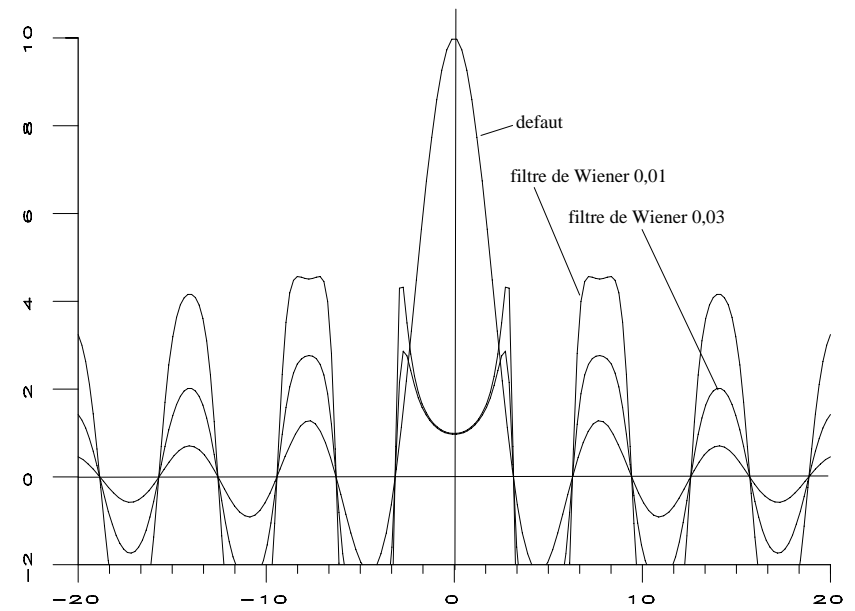
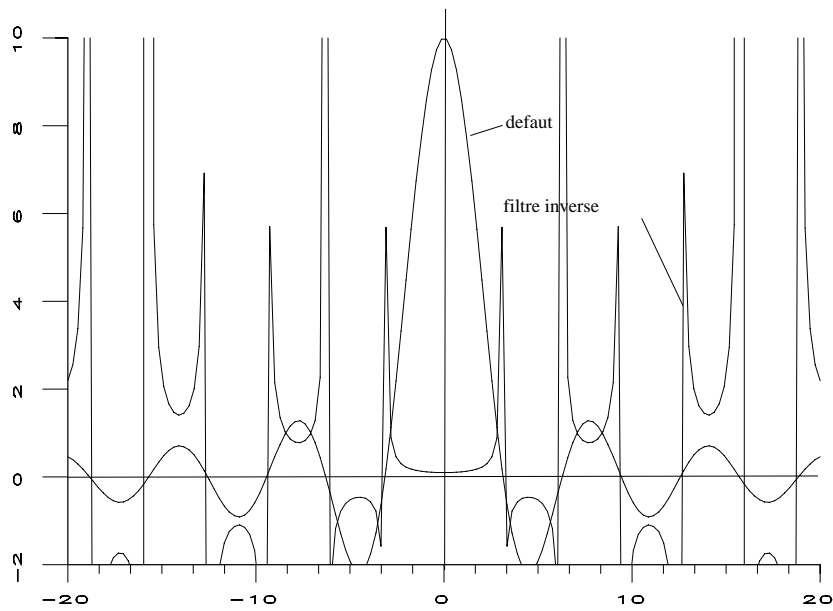
$$\frac{\partial \epsilon}{\partial W_W(u)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad W_W(u) = \frac{D^*}{DD^* + \Phi_b / \Phi_f}$$

où Φ_b et Φ_f sont les densités de puissance du bruit et du signal :

$$\Phi_b(u) = \langle B(u)B^*(u) \rangle$$

$$\Phi_f(u) = \langle F(u)F^*(u) \rangle$$

Mauvais conditionnement



A gauche : fonction de transfert ($\sin u/u$) d'un défaut de bougé à vitesse constante et le filtre inverse permettant de le corriger. A droite, deux filtres de Wiener de ce même défaut obtenus à partir de deux valeurs différentes du rapport Φ_b/Φ_f supposés constants.

Mauvais conditionnement

Equivalent algébrique :

$$\Delta^+ = (\Delta^t \Delta + \Phi)^{-1} \Delta^t$$

Φ : matrice diagonale de termes ϕ_j strictement positifs et majorés par 1

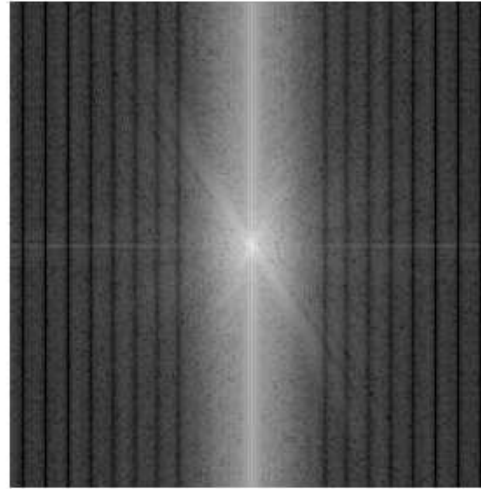
Filtre de Wiener matriciel :

$$\Delta^W = (\Delta^t \Delta + \Phi_f^{-1} \Phi_b I)^{-1} \Delta^t$$

Exemple : filtre inverse



image avec un flou de bougé horizontal (float)



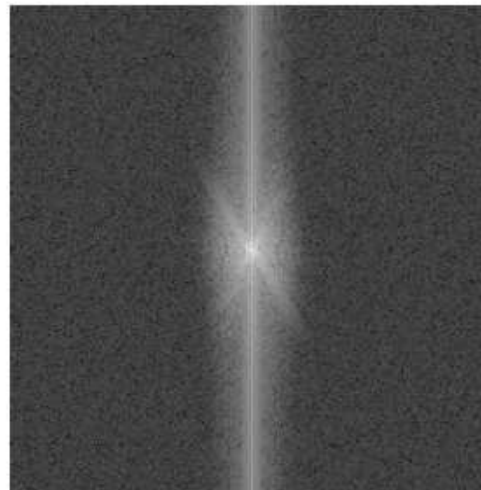
spectre de l'image flou : la distortion convolutive est visible



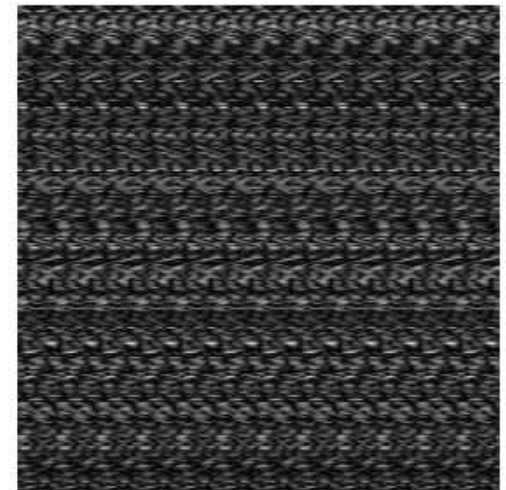
filtrage inverse



image avec un flou de bougé horizontal (byte)



spectre de l'image flou avec le bruit de quantification

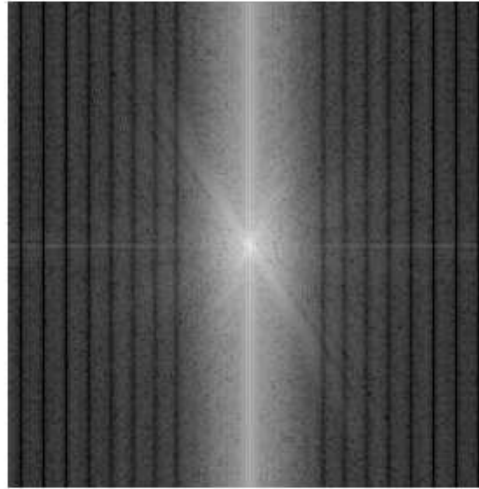


filtrage inverse

Exemple : filtre pseudo-inverse



image avec un flou de bougé horizontal (float)



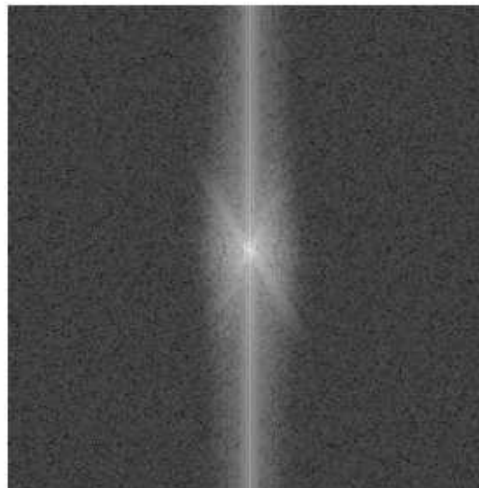
spectre de l'image flou : la distortion convolutive est visible



filtrage inverse



image avec un flou de bougé horizontal (byte)



spectre de l'image flou avec le bruit de quantification

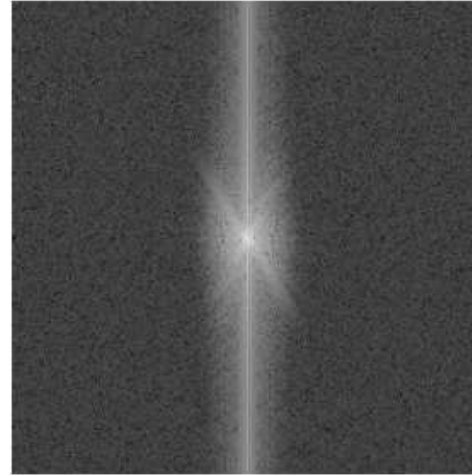


filtrage pseudo-inverse

Exemple : filtre de Wiener



image avec un flou de bougé horizontal (byte)



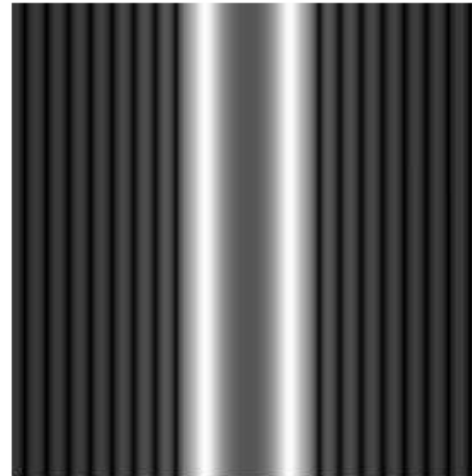
spectre de l'image flou avec bruit de quantification



filtrage pseudo-inverse



image avec un flou de bougé horizontal (byte)



spectre du filtre de Wiener



filtrage de Wiener

Pseudo-inverse régularisée

Moindres carrés sous contraintes, par exemple $\|f\|^2$ minimale :

$$\min \|\Delta f - g\|^2 + \lambda \|f\|^2$$

⇓

$$f = (\Delta^t \Delta + \lambda I)^{-1} \Delta^t g$$

Choix de λ : compromis entre précision et régularisation

Décomposition en valeurs singulières (SVD)

$\Delta\Delta^t$ et $\Delta^t\Delta$: définies positives, réelles, symétriques, mêmes valeurs propres

- Ω : matrice diagonale à valeurs réelles positives ordonnées par ordre décroissant

$$\Omega^2 = \Lambda$$

- V : matrice unitaire des vecteurs propres de $\Delta^t\Delta$

$$\Delta^t\Delta = V^t\Omega^2V$$

- U^t : matrice transposée (égale à la matrice inverse) de la matrice des vecteurs propres de $\Delta\Delta^t$

$$\Delta\Delta^t = U^t\Omega^2U$$

- Décomposition en valeurs singulières :

$$\Delta = U^t\Omega V$$

Décomposition en valeurs singulières (SVD)

Restauration = succession des opérations suivantes :

1. pour toutes les valeurs propres de Ω très supérieures au bruit affectant le signal et engendré par les calculs, inverser le système, c'est-à-dire, multiplier par l'inverse de la valeur singulière correspondante chaque composante du signal ;
2. pour toute valeur singulière nulle ou très inférieure au bruit, et en l'absence d'une information à priori sur le signal, annuler les composantes du signal ;
3. pour les valeurs singulières très proches du bruit, mettre en œuvre toute technique de régularisation qui apparaîtra appropriée, en tirant parti au mieux des connaissances existant sur le signal.

Mais grande complexité algorithmique.

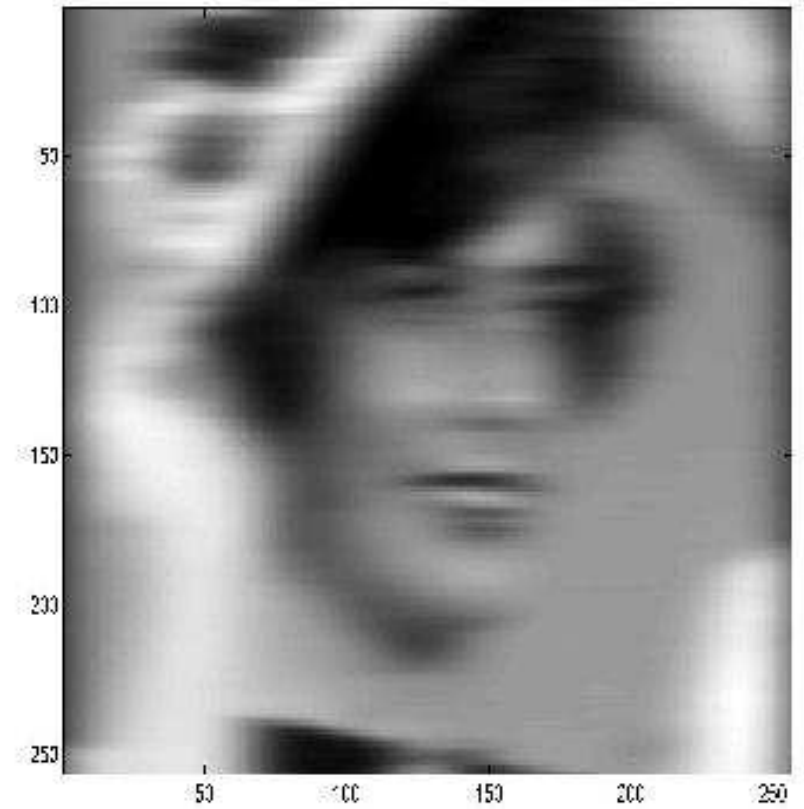
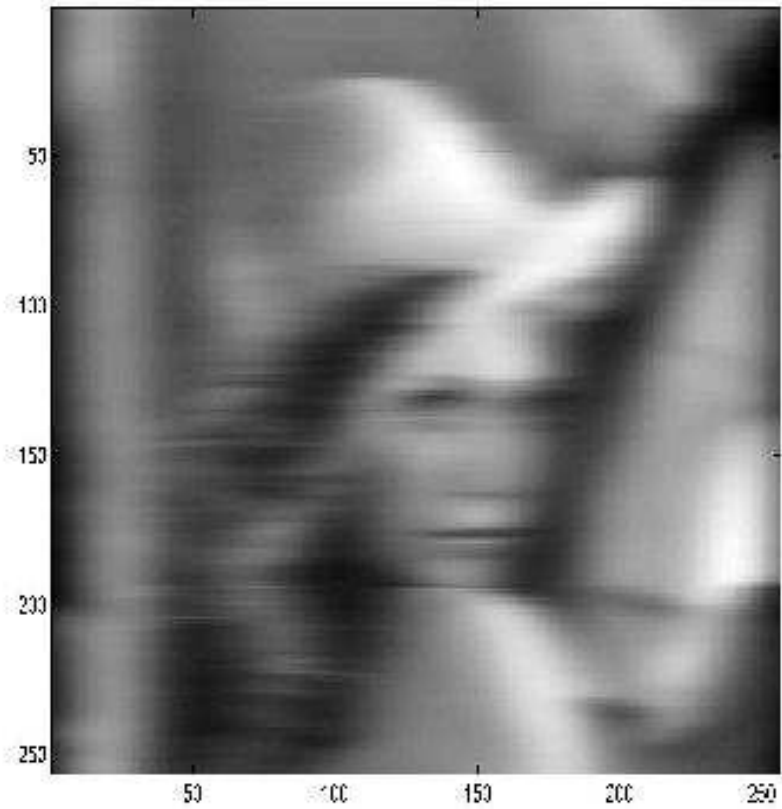
Décomposition en valeurs singulières (SVD) : *exemple*

Images initiales



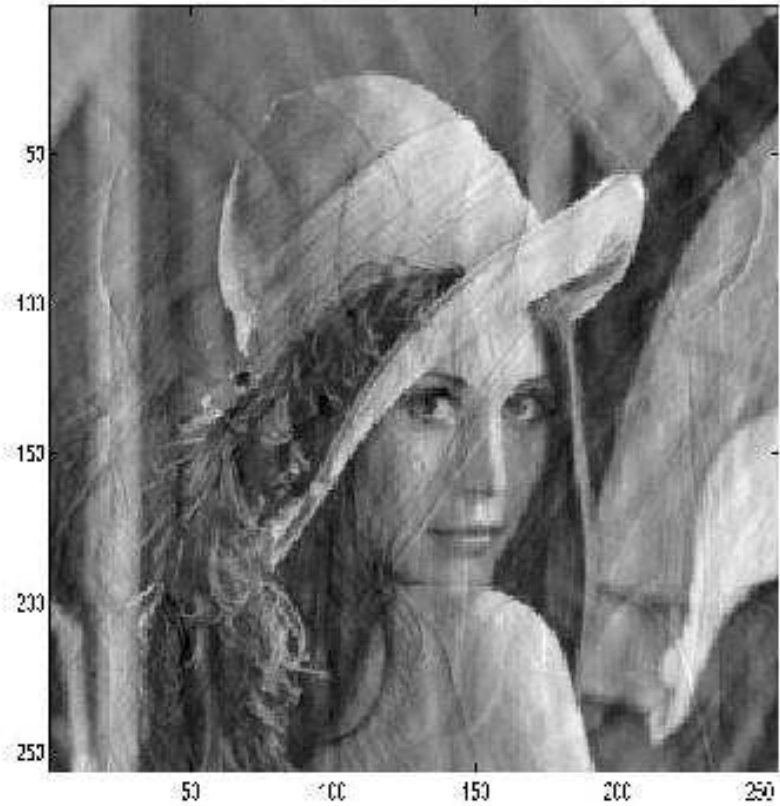
Décomposition en valeurs singulières (SVD) : *exemple*

Flou gaussien



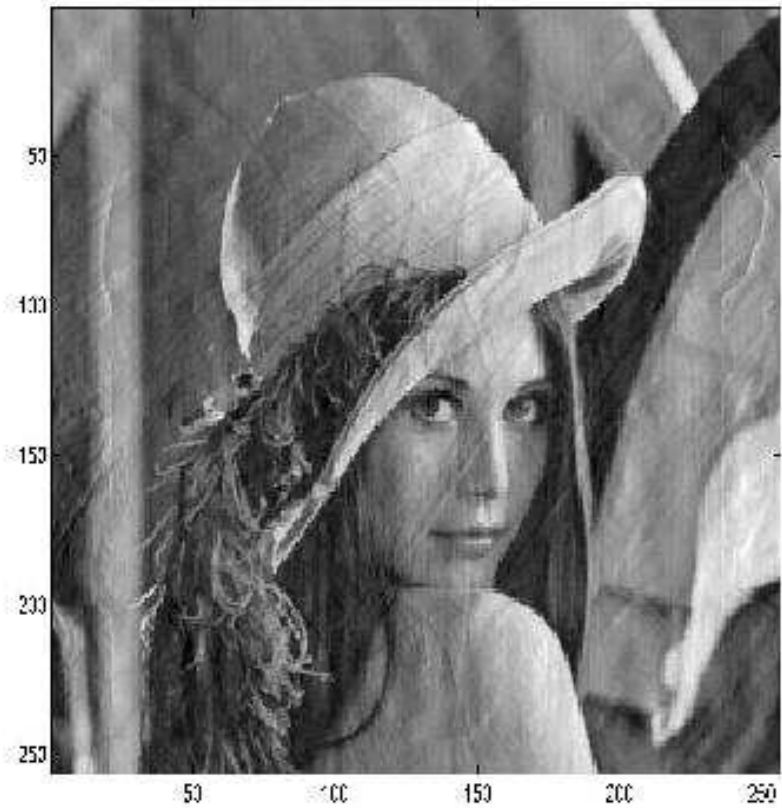
Décomposition en valeurs singulières (SVD) : *exemple*

150 valeurs singulières



Décomposition en valeurs singulières (SVD) : *exemple*

200 valeurs singulières



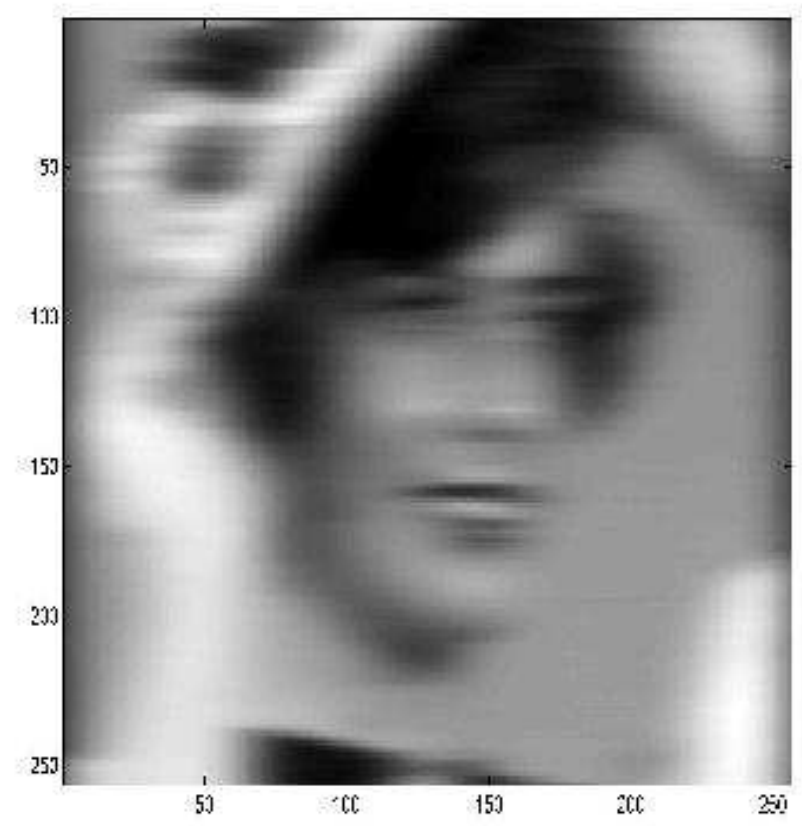
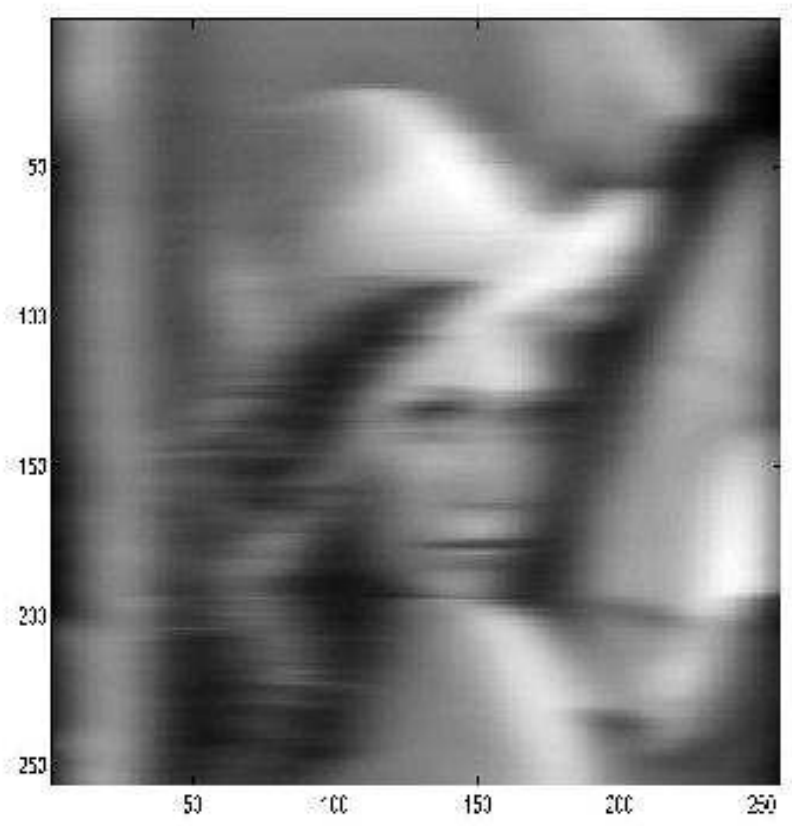
Décomposition en valeurs singulières (SVD) : *exemple*

230 valeurs singulières



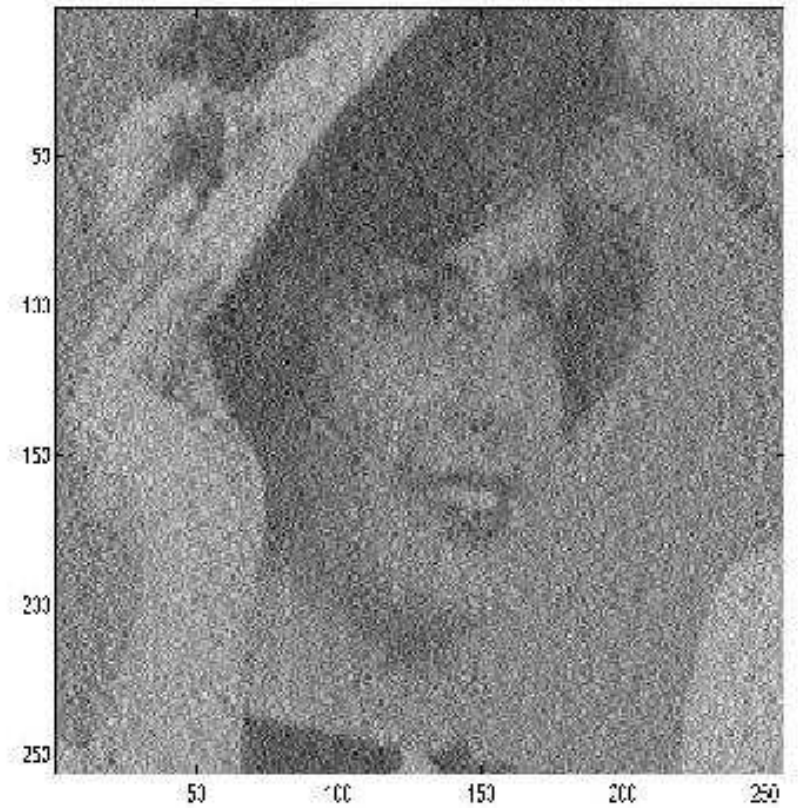
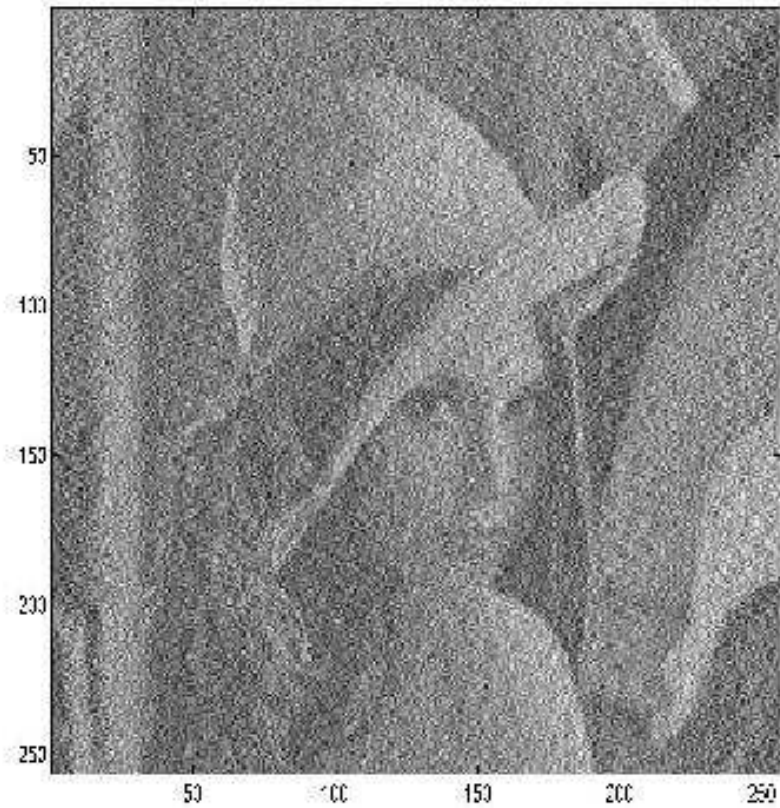
Décomposition en valeurs singulières (SVD) : *exemple*

Flou gaussien + bruit blanc uniforme



Décomposition en valeurs singulières (SVD) : *exemple*

225 valeurs singulières



Restauration itérative

Décomposition de d :

$$d = d_1 - d_2 \quad \text{ou} \quad \Delta = \Delta_1 - \Delta_2$$

On résout :

$$d_1 * f = d_2 * f + g \quad \text{ou} \quad \Delta_1 \mathbf{f} = \Delta_2 \mathbf{f} + \mathbf{g}$$

en approchant f par la série f^k :

$$d_1 * f^{k+1} = d_2 * f^k + g \quad \text{ou} \quad \Delta_1 \mathbf{f}^{k+1} = \Delta_2 \mathbf{f}^k + \mathbf{g}$$

d_1 et Δ_1 choisis aisément inversibles d'où :

$$\mathbf{f}^{k+1} = \Delta_1^{-1} \Delta_2 \mathbf{f}^k + \Delta_1^{-1} \mathbf{g}$$

solution initiale \mathbf{f}^0 : soit identiquement nulle, soit aléatoire, soit enfin, le plus souvent, égale à l'image défectueuse \mathbf{g}

Restauration itérative

□ Méthode de Jacobi : d_1 égal à l'unité

$$f^{k+1} = f^k + g - d * f^k$$

Par TF : $F^{k+1} = F^k + G - DF^k$

Si l'on choisit $F^0 = G$, par récurrence on a : $F^{k+1} = \sum_{i=0}^k G(1 - D)^i$, qui converge vers :

$$\hat{F} = \frac{G}{D}$$

si et seulement si $0 \leq |D| \leq 1$

Approche algébrique : $\Delta_1 = I, \Delta_2 = I - \Delta$

$$f^{k+1} = f^k + (g - \Delta g^k) = g + (I - \Delta)f^k = \sum_{i=0}^k (I - \Delta)^i g + (I - \Delta)^{k+1} f^0$$

Si $f^0 = g$: $f^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} (I - \Delta)^i g = (I - (I - \Delta)^{k+1})(I - (I - \Delta))^{-1} g$
converge vers $\Delta^{-1} g$ ssi $|\Delta| < 1$.

Restauration itérative

□ Méthode de Gauss-Seidel : Δ_1 égale à l'unité

$$f^{k+1} = g + \Delta'_2 f^k + \Delta''_2 f^{k+1}$$

où Δ'_2 et Δ''_2 sont triangulaires inférieure et supérieure

□ Méthode de la plus grande pente :

$$f^{k+1} = f^k + \frac{|r^k|^2}{[r^k]^t \Delta r^k} r^k$$

avec $r^k = g - d * f^k$

Restauration itérative

□ Méthode du gradient conjugué : minimisation de

$$\Lambda = f^t \Delta f - 2f^t g$$

dans l'hypothèse où Δ est une matrice définie non-négative par la récurrence :

$$\begin{aligned} f^{k+1} &= f^k + a^k \rho^k \\ a^k &= \frac{\rho^k r^k}{\rho^k \Delta \rho^k} \\ r^{k+1} &= r^k - a^k \Delta \rho^k \\ \rho^{k+1} &= r^{k+1} - \frac{r^k \Delta \rho^k}{\rho^k \Delta \rho^k} \rho^k \end{aligned}$$

Restauration itérative : exemples

Image floue



Restauration itérative : exemples

Jacobi - 30 itérations



Restauration itérative : exemples

Jacobi - 60 itérations



Restauration itérative : exemples

Jacobi - 200 itérations



Restauration itérative : exemples

Jacobi adaptatif - 10 itérations



Restauration itérative : exemples

Jacobi adaptatif - 30 itérations



Restauration itérative : exemples

Jacobi adaptatif - 60 itérations



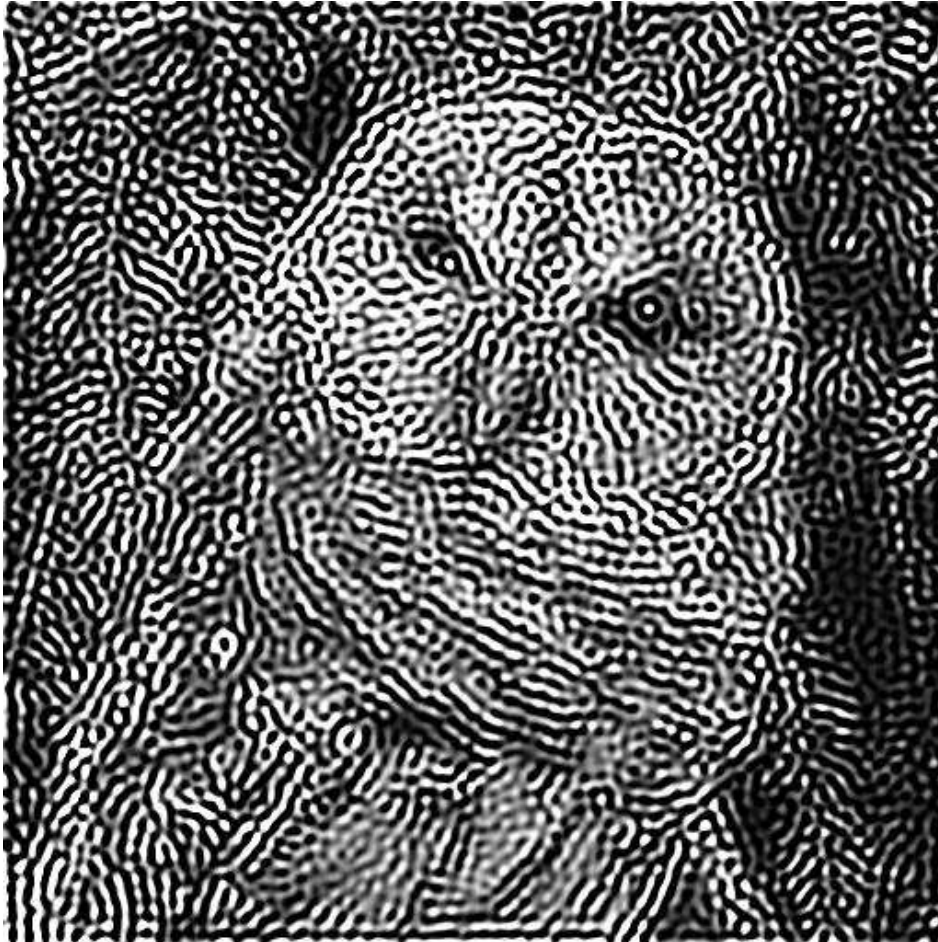
Restauration itérative : exemples

Image floue



Restauration itérative : exemples

Gradient et gradient adaptatif - 30 itérations



Restauration itérative : exemples

Gradient et gradient adaptatif - 200 itérations



Restauration itérative : exemples

Gradient et gradient adaptatif - 1000 itérations



Restauration itérative : exemples

Gradient conjugué - 10 itérations



Restauration itérative : exemples

Gradient conjugué - 50 itérations



Restauration itérative : exemples

Gradient conjugué - 100 itérations

