

Morphologie mathématique - III

Isabelle Bloch

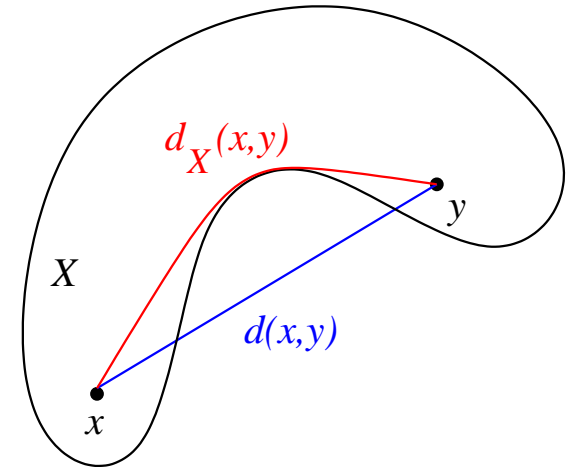
<http://perso.telecom-paristech.fr/~bloch>

Télécom ParisTech - CNRS LTCI

Paris - France



Opérateurs géodésiques



Distance géodésique, conditionnelle à X : d_X

- si X est fermé, il existe un arc géodésique pour toute paire de points de X
- unicité si X est simplement connexe
- X convexe $\Leftrightarrow d_X = d$

Boule géodésique : $B_X(x, r) = \{y \in X / d_X(x, y) \leq r\}$

Rq : $B_X(x, r) \subseteq B(x, r)$

Dilatation géodésique :

$$D_X(Y, B_r) = \{x \in \mathbb{R}^n / B_X(x, r) \cap Y \neq \emptyset\} = \{x \in \mathbb{R}^n / d_X(x, Y) \leq r\}$$

Erosion géodésique :

$$E_X(Y, B_r) = \{x \in \mathbb{R}^n / B_X(x, r) \subseteq Y\} = X \setminus D_X(X \setminus Y, B_r)$$

Ouverture et fermeture géodésiques : par composition

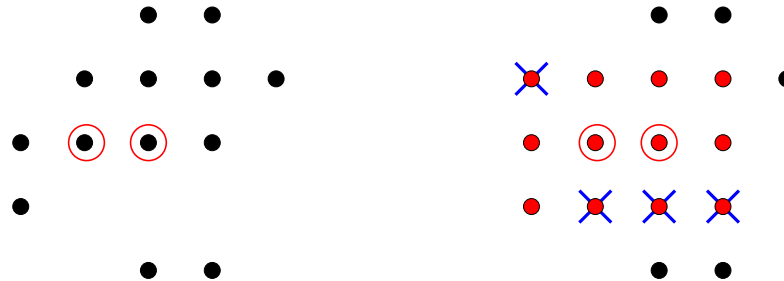
Propriétés et reconstruction

Propriétés :

- similaires à celles du cas euclidien
- $D_X(Y, B_r) \subseteq D(Y, B_r)$
- $D_X(Y, B_r) = \bigcap_{n=1}^{\infty} [(Y \oplus \frac{r}{n} B) \cap X]^n$

Cas discret :

$$D_X(Y, B_r) = [D(Y, B_1) \cap X]^r$$

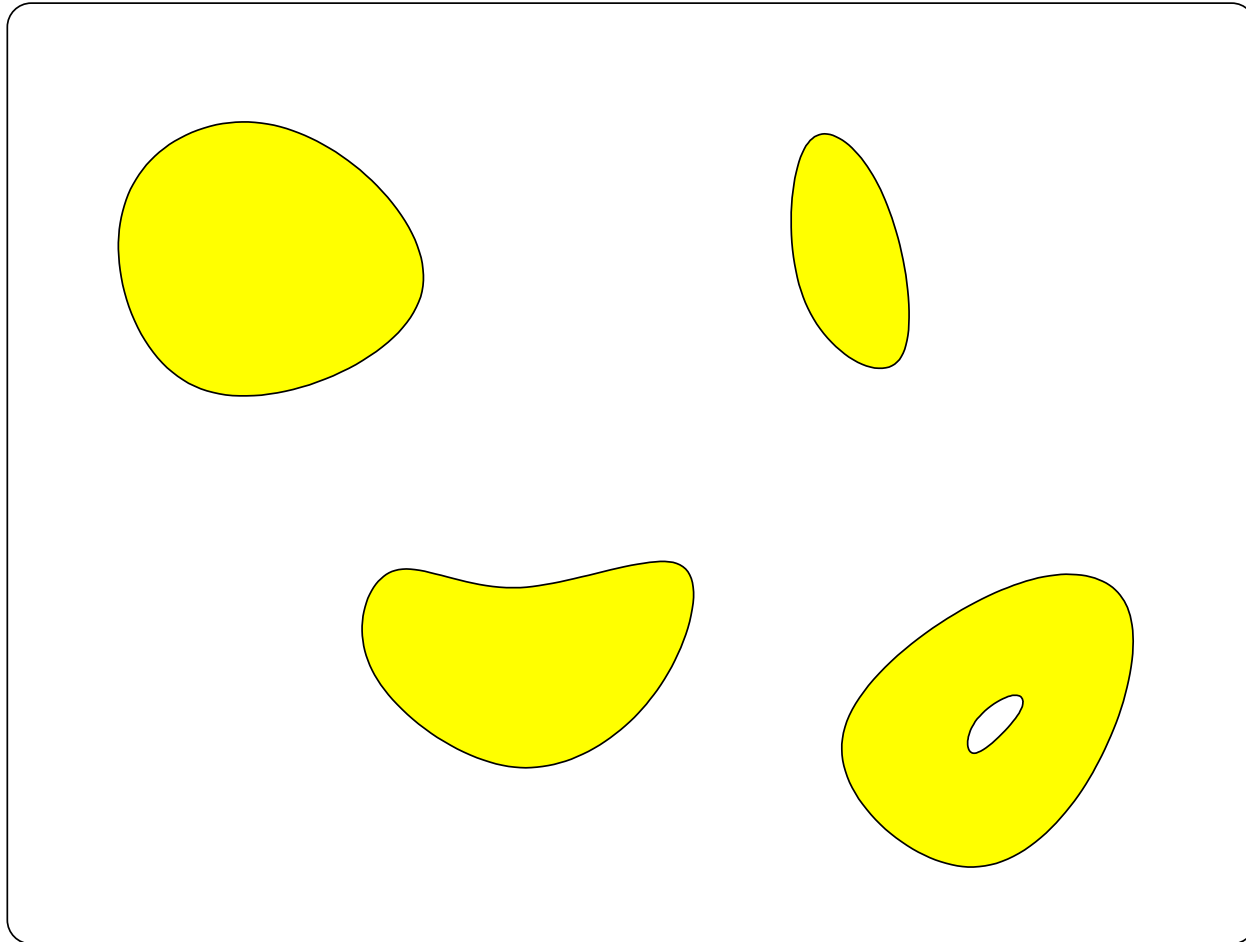


Reconstruction :

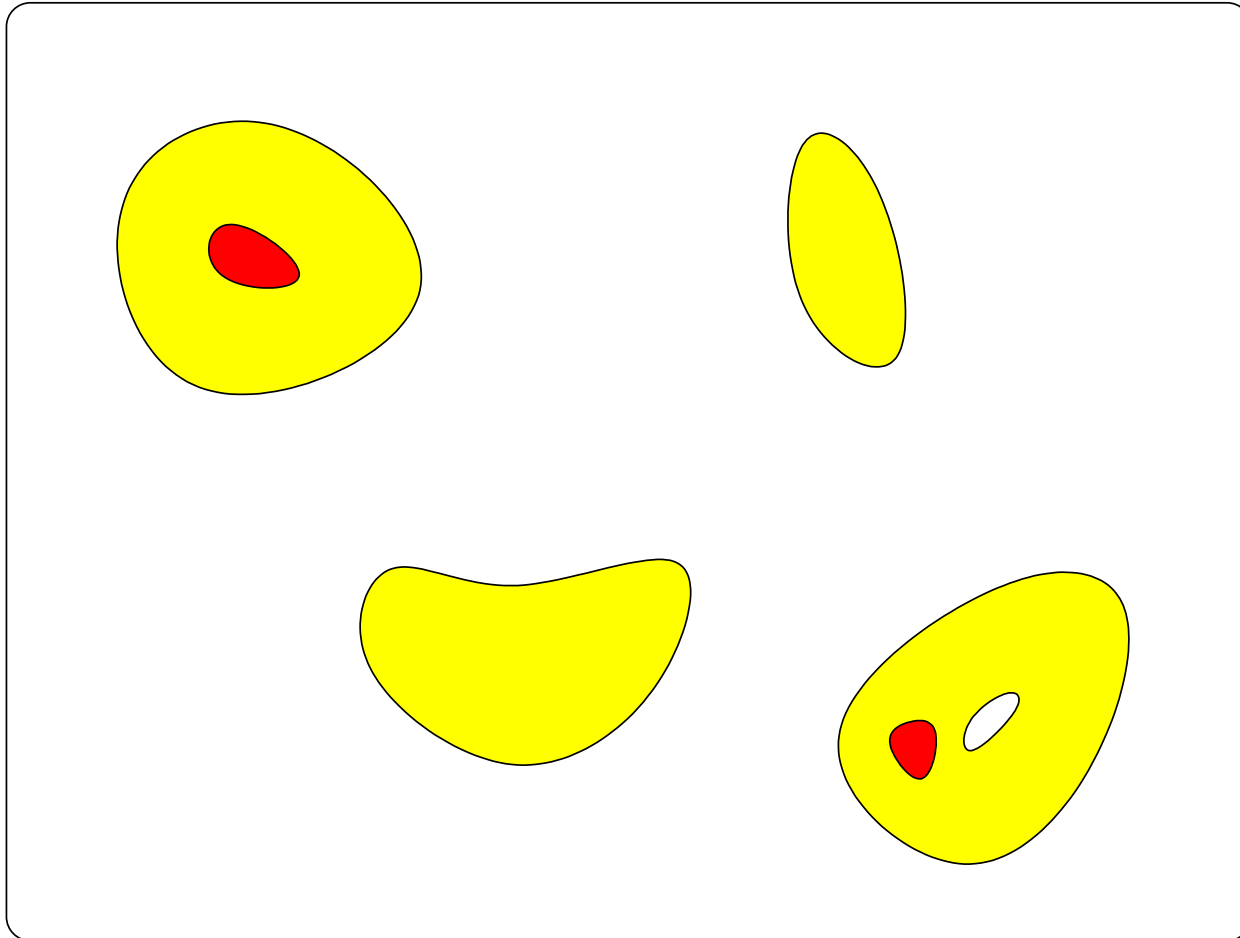
$$[D(Y, B_1) \cap X]^\infty = D_X^\infty(Y)$$

= composantes connexes de X qui intersectent Y

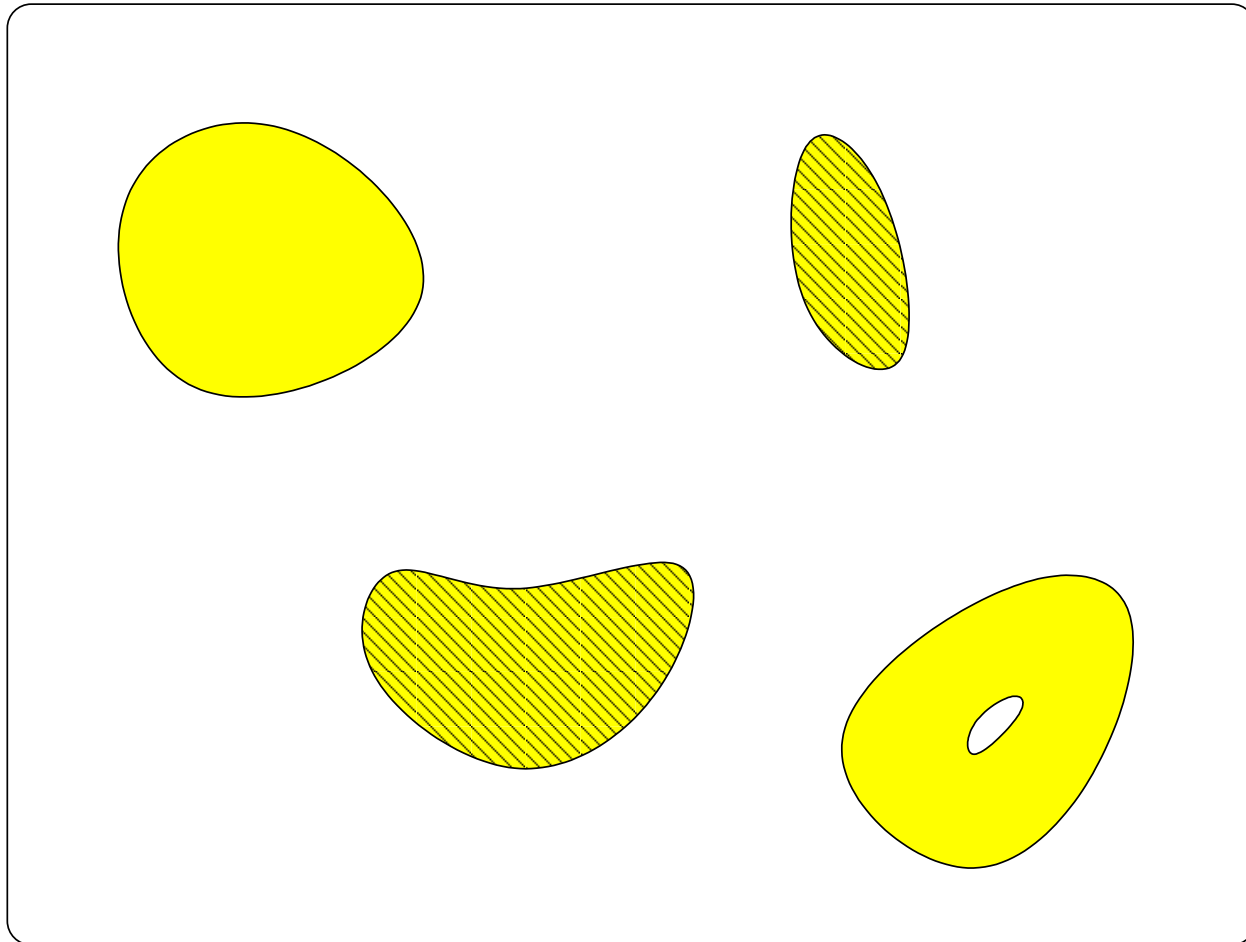
Reconstruction binaire : exemple



Reconstruction binaire : exemple



Reconstruction binaire : exemple

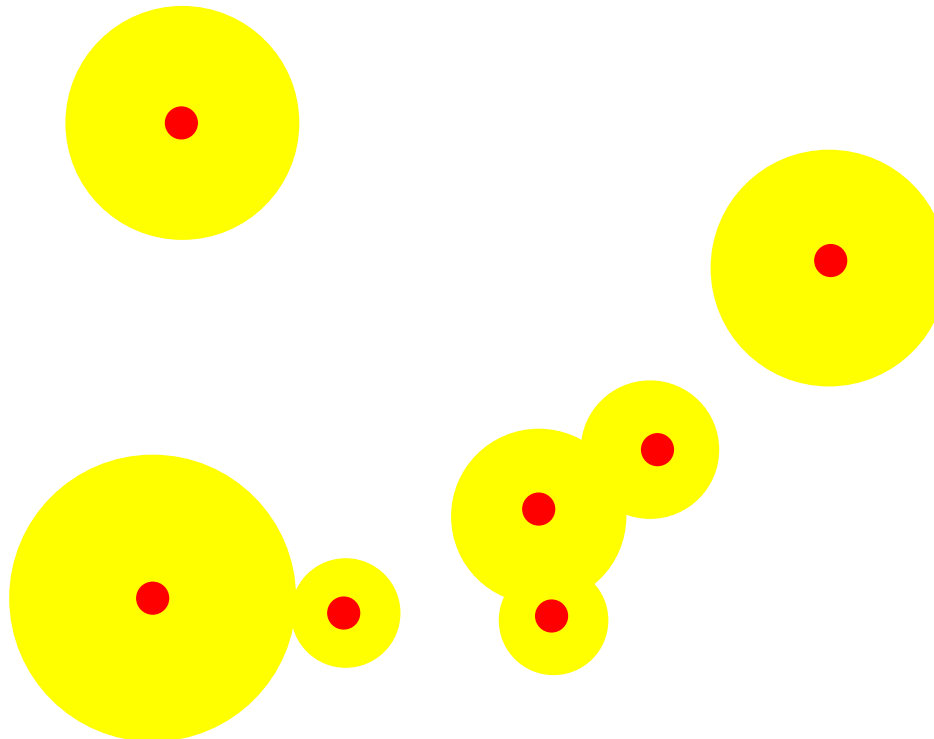


Erodés ultimes

$$EU(X) = \cup_n \{E(X, B_n) \setminus R[E(X, B_{n+1}); E(X, B_n)]\}$$

- $E(X, B_n)$: l'érodé de X de taille n
- $R[Y; Z]$: composantes connexes de Z qui ont une intersection non vide avec Y

= ensemble des maxima régionaux de la fonction distance $d(x, X^C)$.

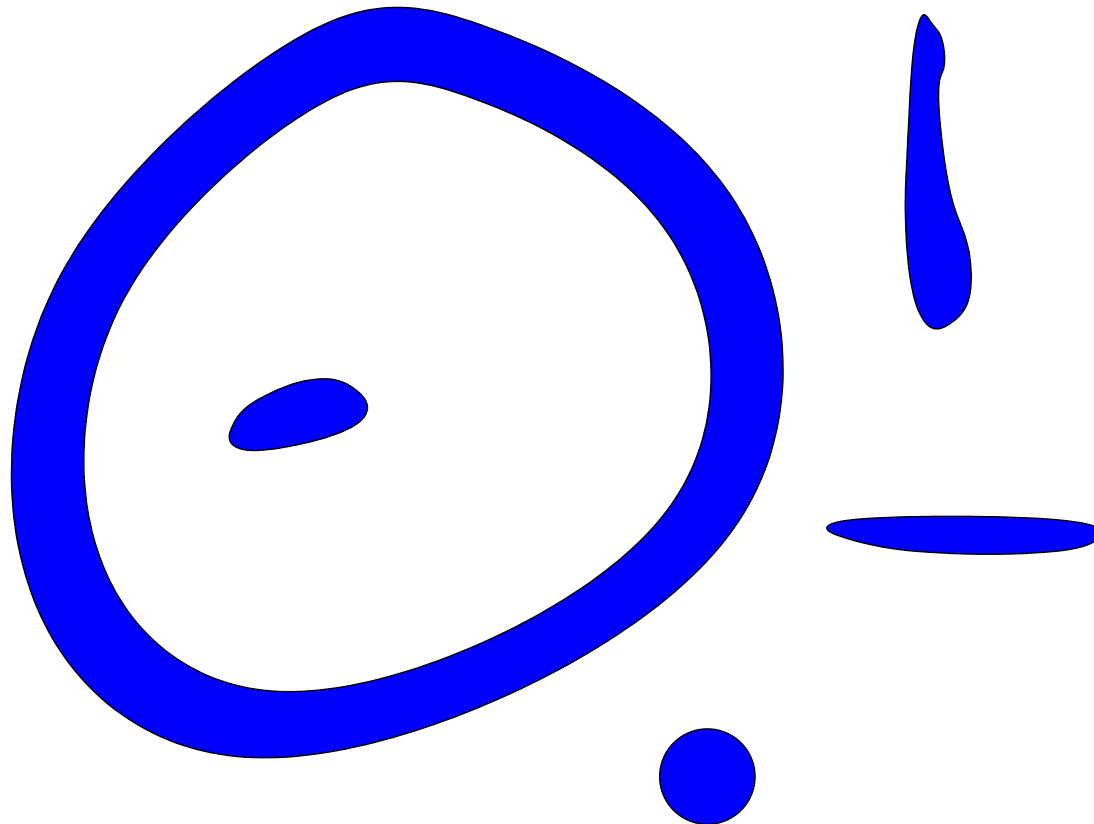


Ouverture surfacique

$$\gamma_\lambda(f) = \bigvee_i \{\gamma_{B_i}(f), B_i \text{ connexe et } S(B_i) = \lambda\}$$

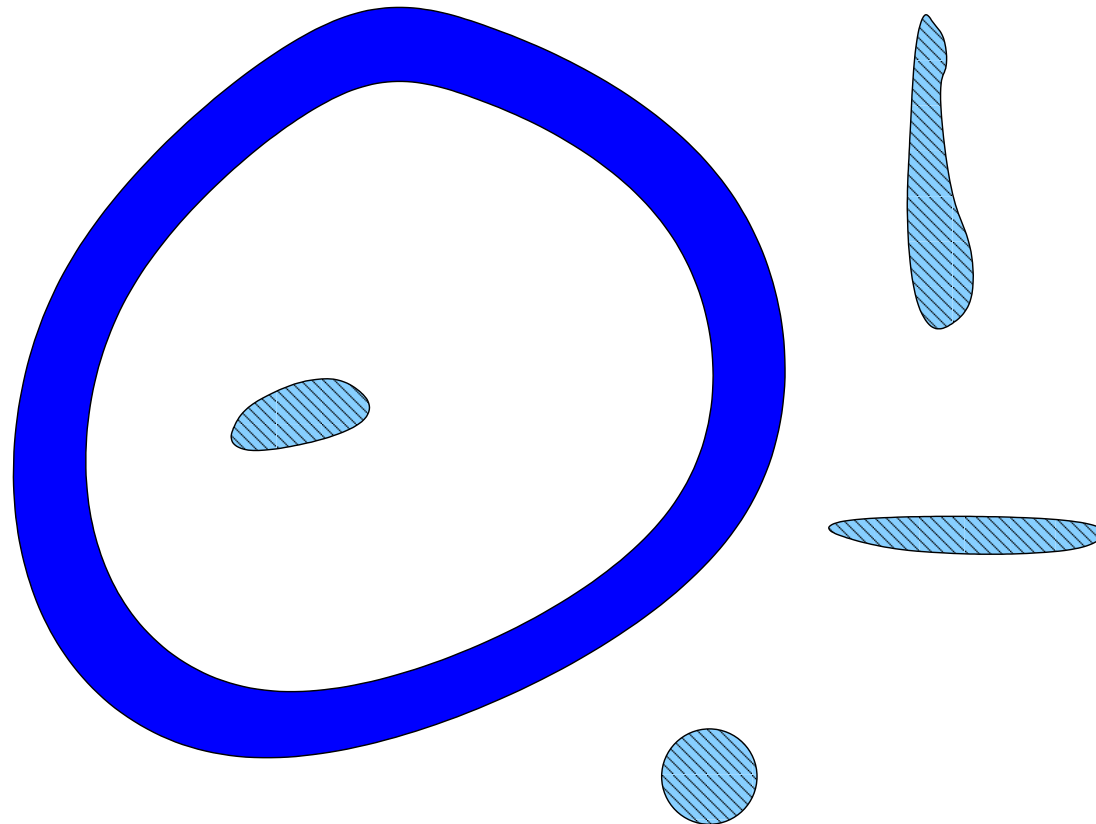
Ouverture surfacique

$$\gamma_\lambda(f) = \bigvee_i \{\gamma_{B_i}(f), B_i \text{ connexe et } S(B_i) = \lambda\}$$



Ouverture surfacique

$$\gamma_\lambda(f) = \bigvee_i \{\gamma_{B_i}(f), B_i \text{ connexe et } S(B_i) = \lambda\}$$



Opérateurs géodésiques fonctionnels

$$X_1 \subseteq X_2 \text{ et } Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow D_{X_1}(Y_1, B_r) \subseteq D_{X_2}(Y_1, B_r) \subseteq D_{X_2}(Y_2, B_r)$$

⇒ Extension aux fonctions, pour $f \leq g$, coupe par coupe :

$$[D_g(f, B_r)]_\lambda = D_{g_\lambda}(f_\lambda, B_r)$$

(avec $f_\lambda = \{x, f(x) \geq \lambda\}$)

Cas discret :

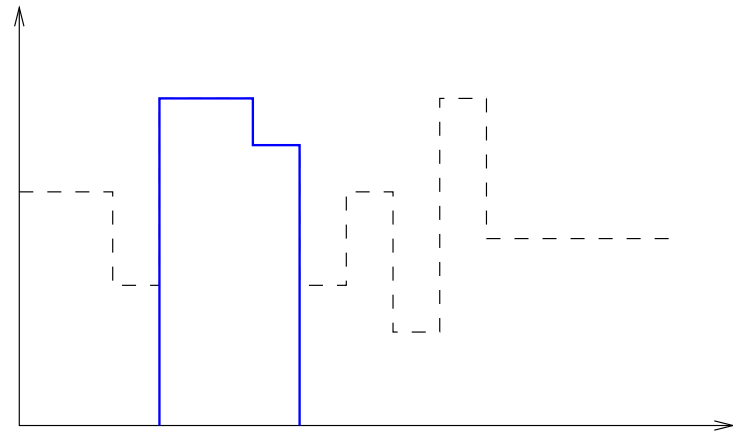
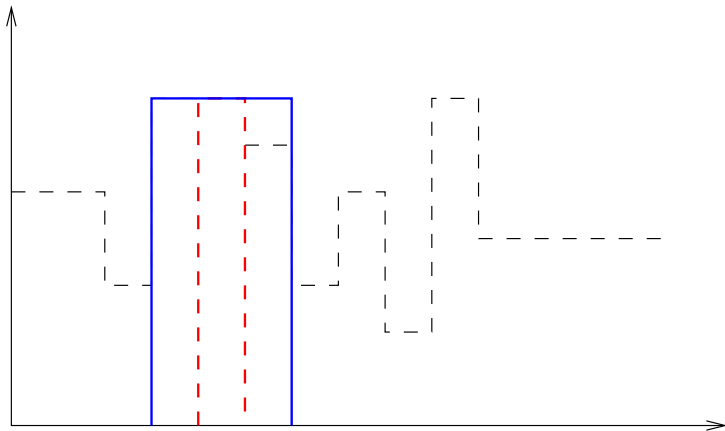
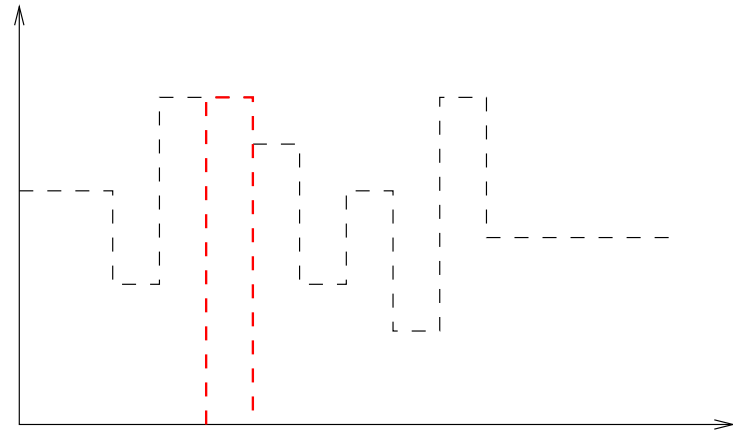
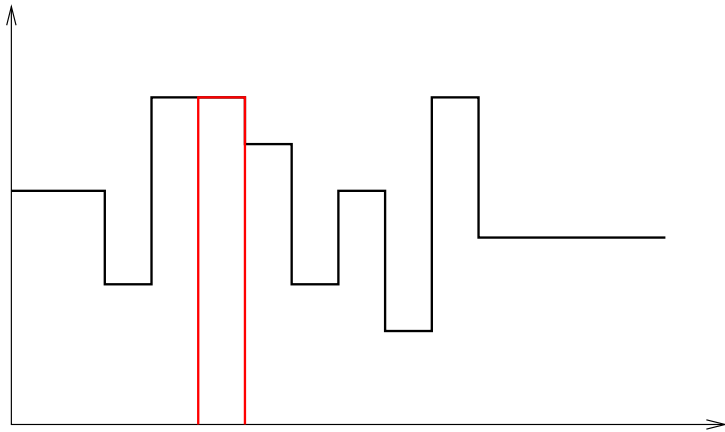
$$D_g(f, B_r) = [D(f, B_1) \wedge g]^r$$

$$E_g(f, B_r) = [E(f, B_1) \vee g]^r$$

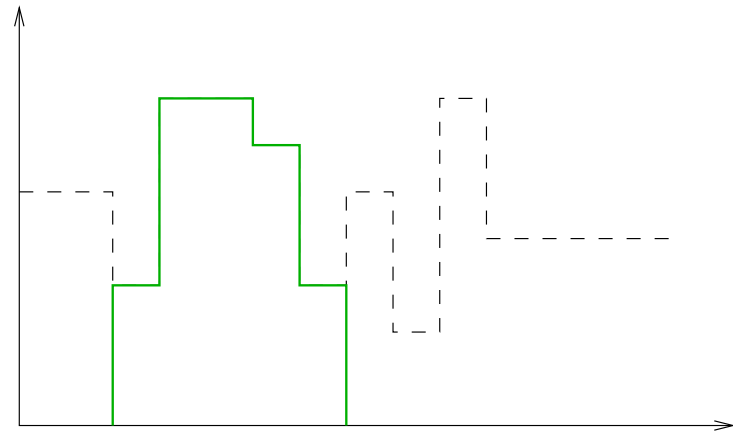
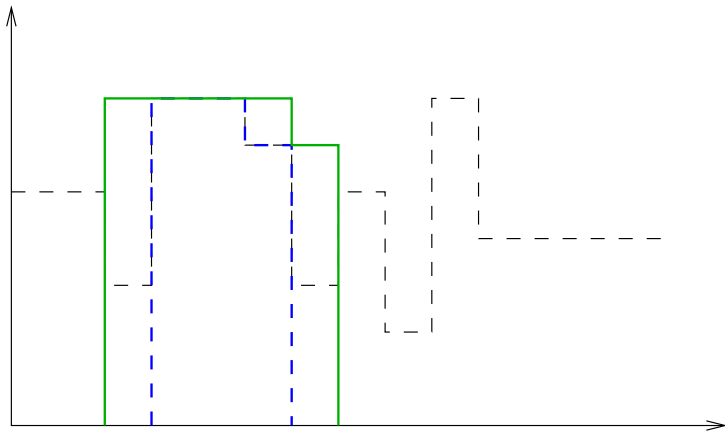
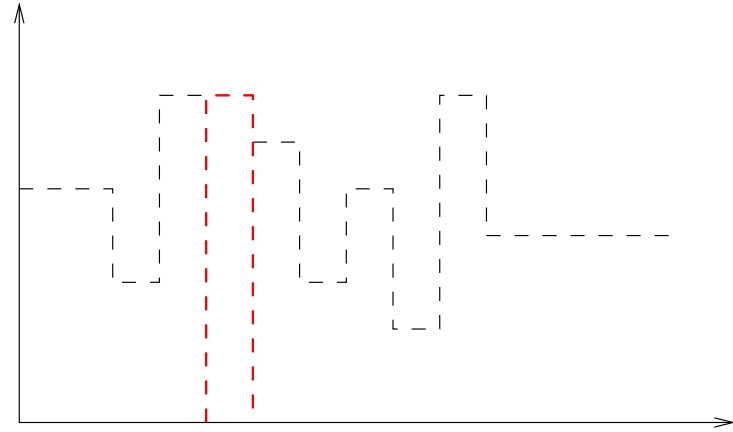
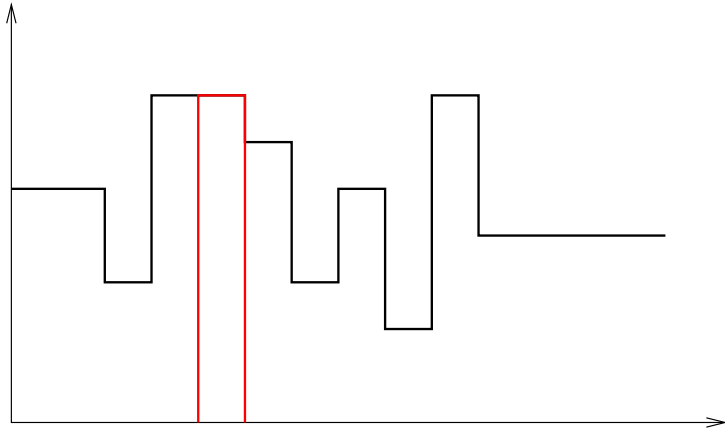
Reconstruction numérique de f (fonction de marquage) dans g :

- par dilatation $D_g(f, B_\infty) = D_g^\infty(f)$: ouverture
- par érosion $E_g(f, B_\infty)$: fermeture
- ouverture par reconstruction : $D_f^\infty(f_B)$ (zones plates dont les contours sont certains contours de l'image originale ⇒ compression)

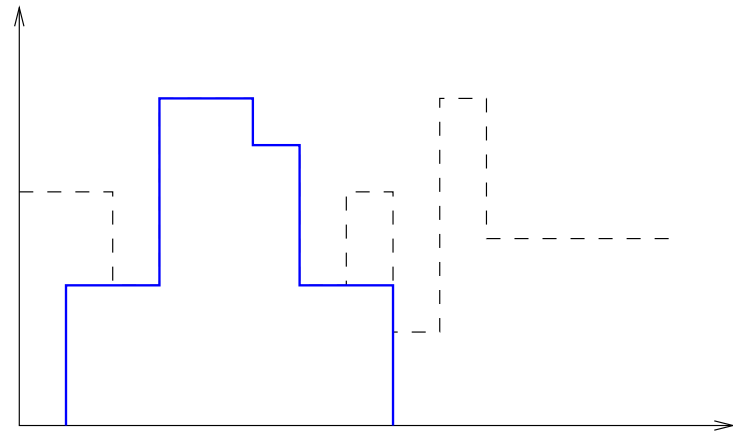
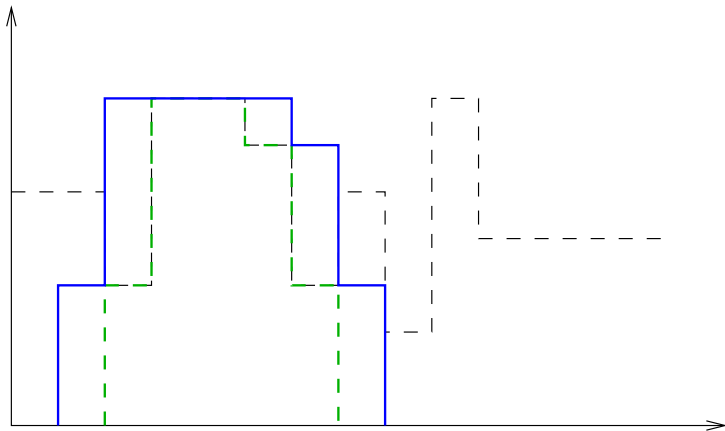
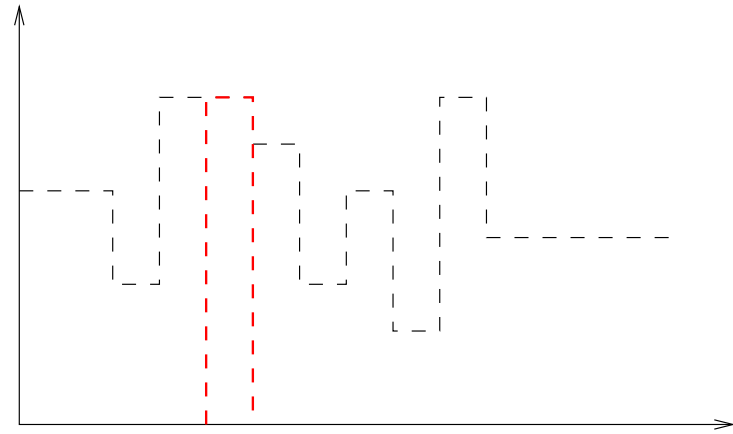
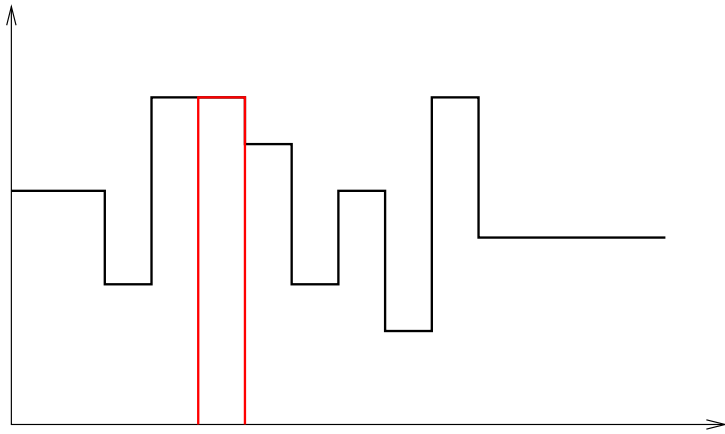
Reconstruction numérique : exemple



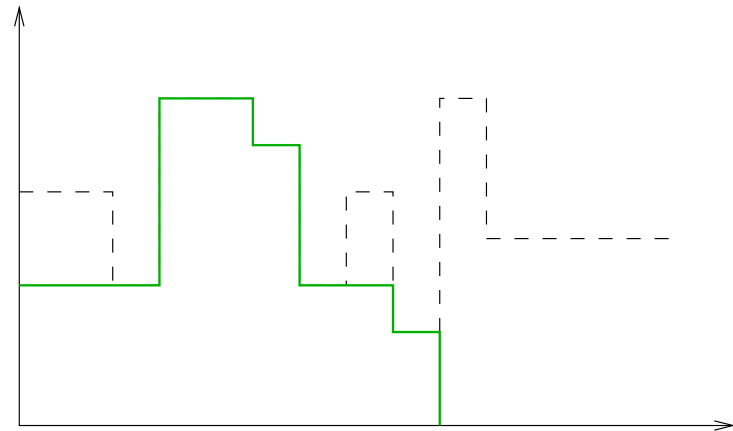
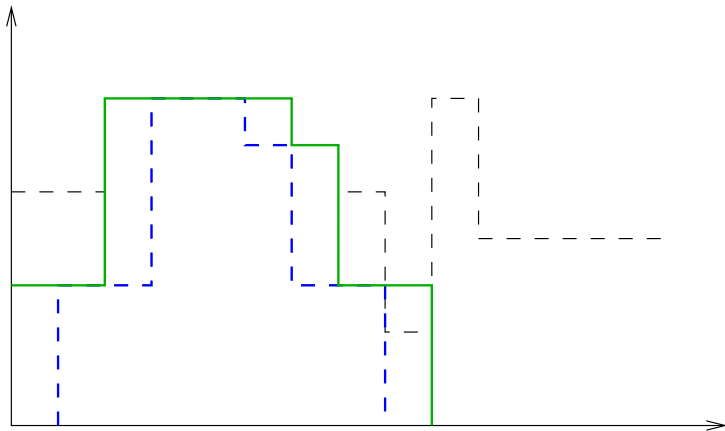
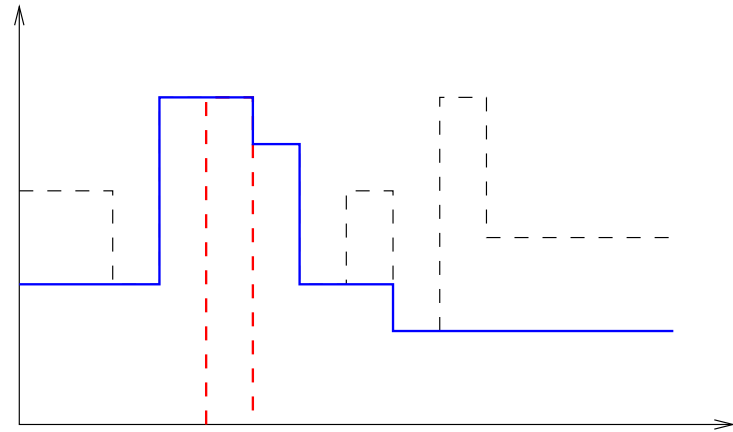
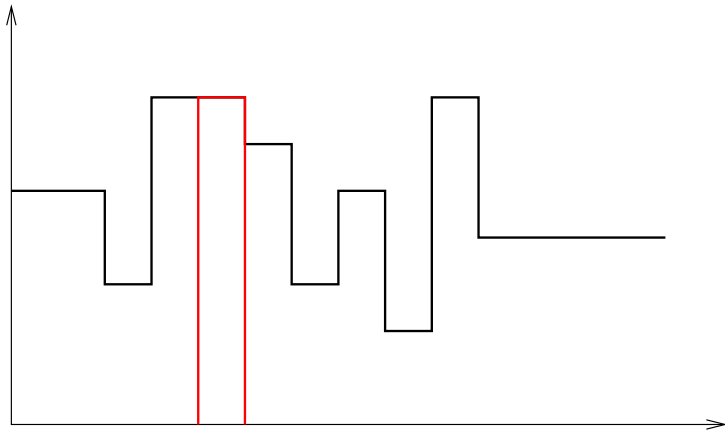
Reconstruction numérique : exemple



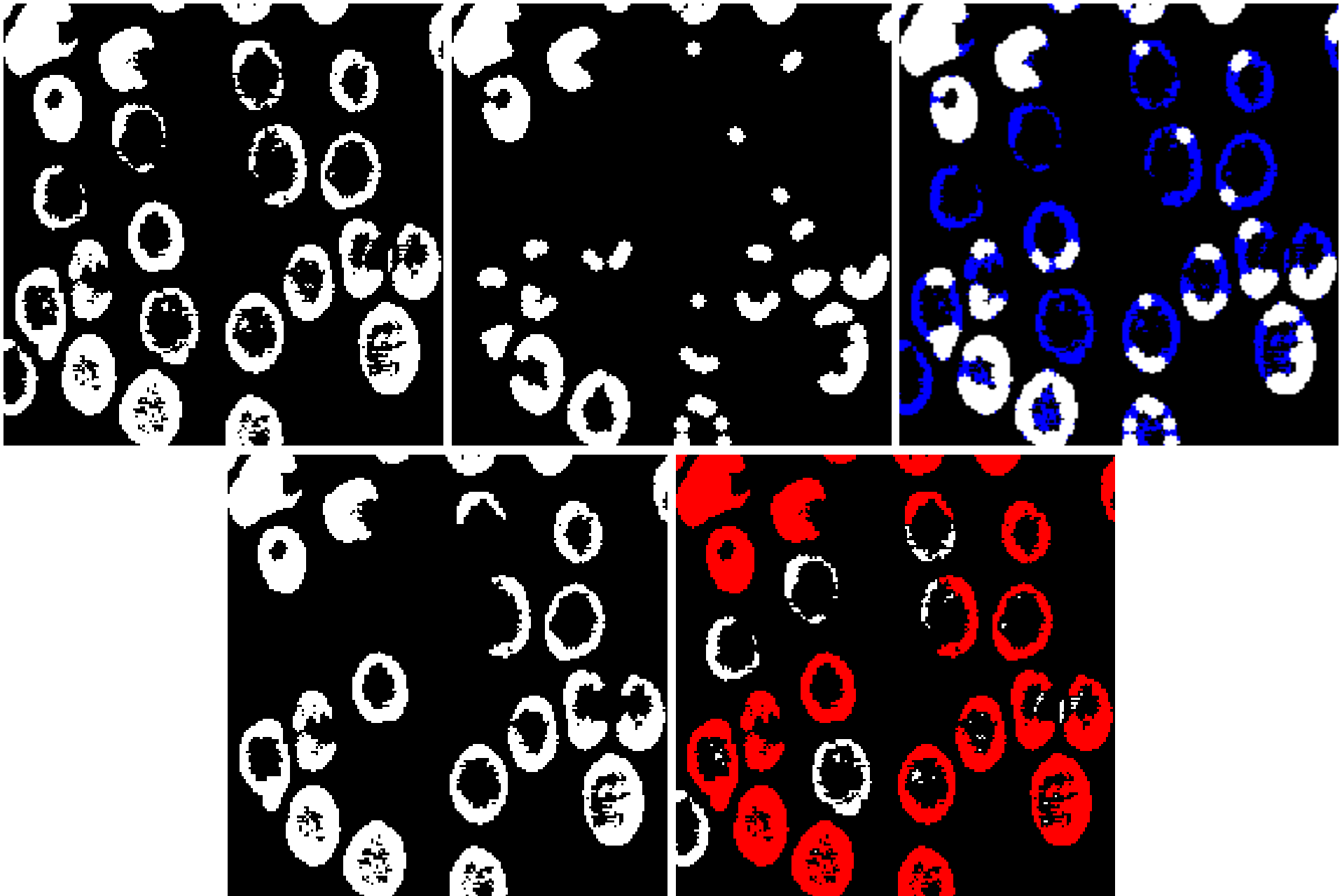
Reconstruction numérique : exemple



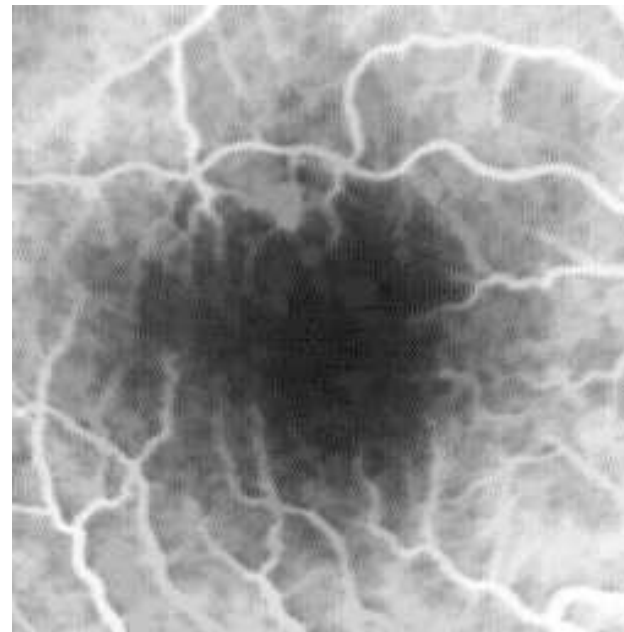
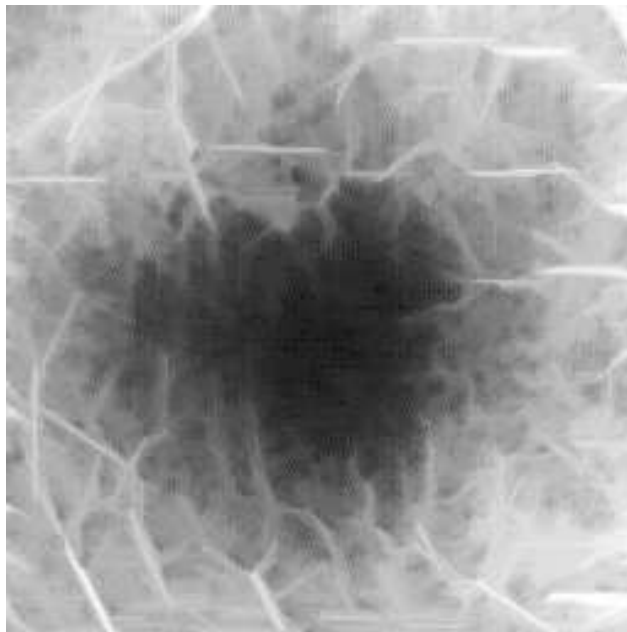
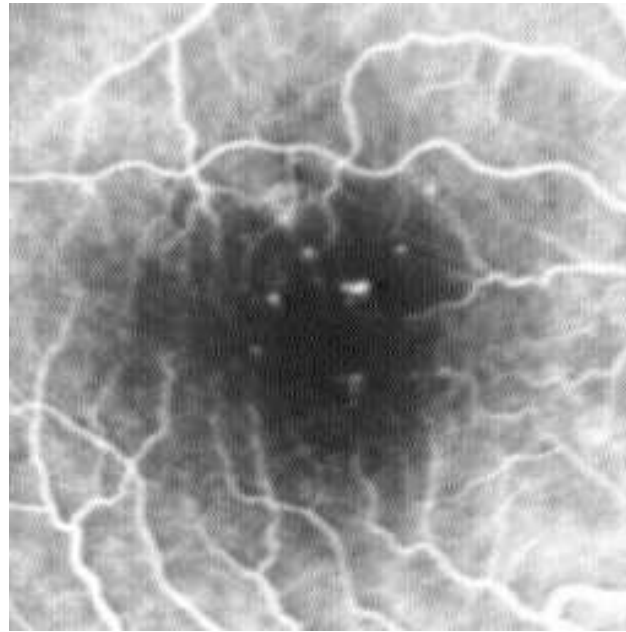
Reconstruction numérique : exemple



Ouverture par reconstruction : exemples

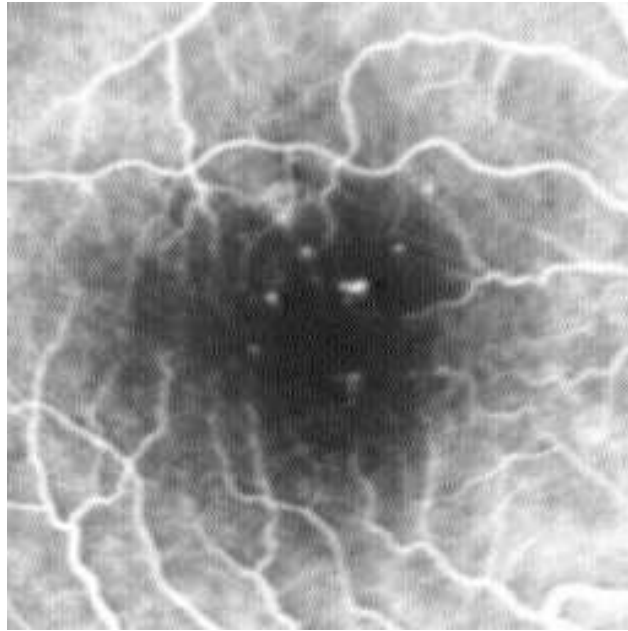


Ouverture par reconstruction : exemples

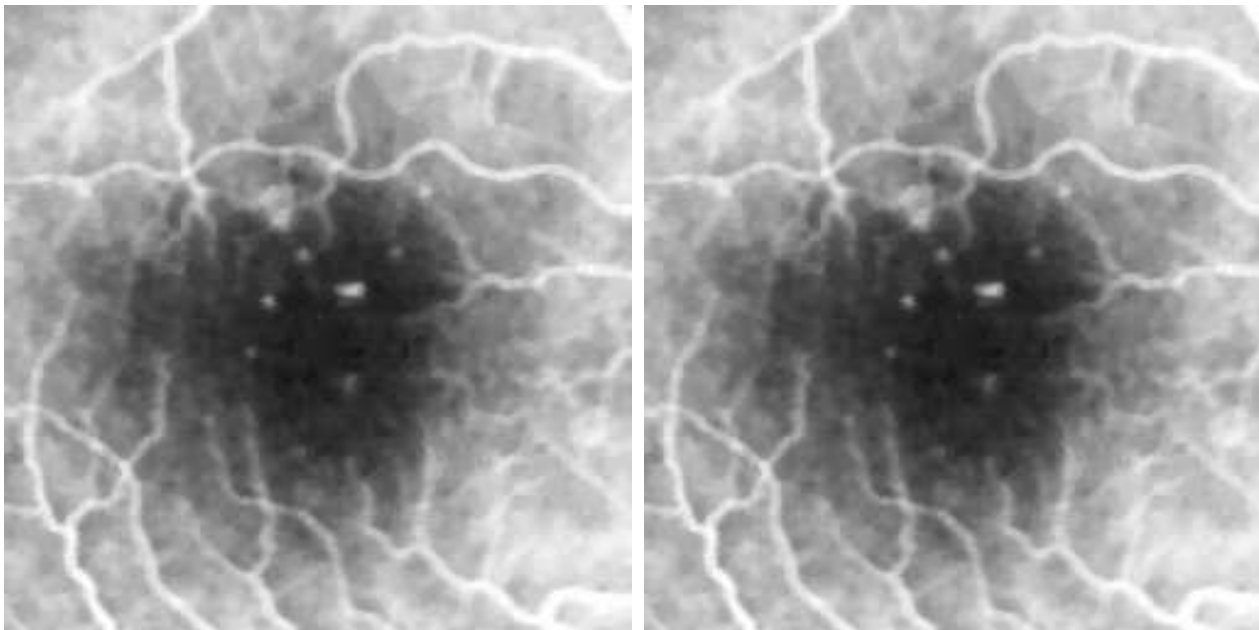
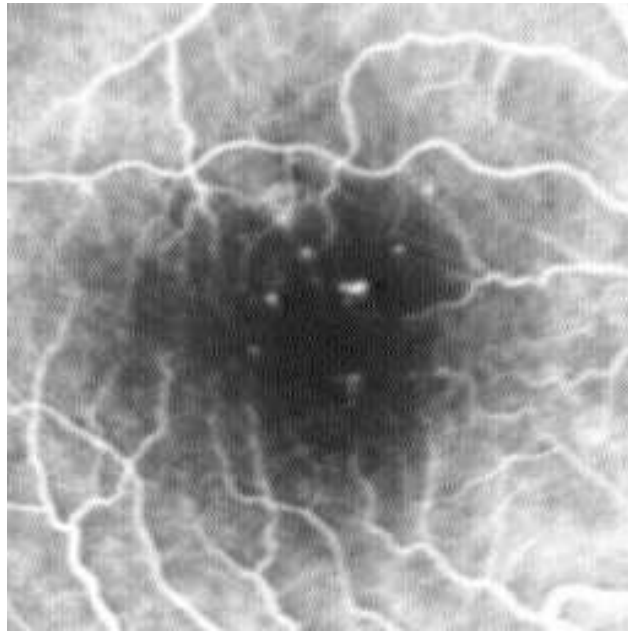


Réunion d'ouvertures par des segments de longueur 20 et reconstruction

Application au filtrage alterné séquentiel

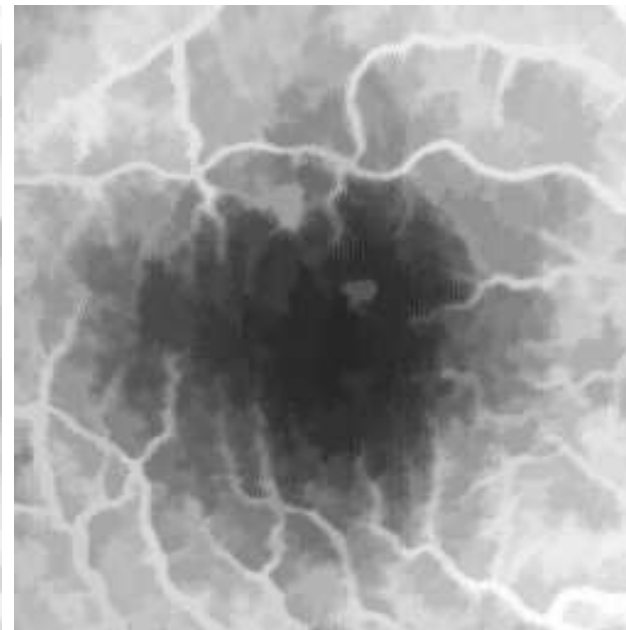
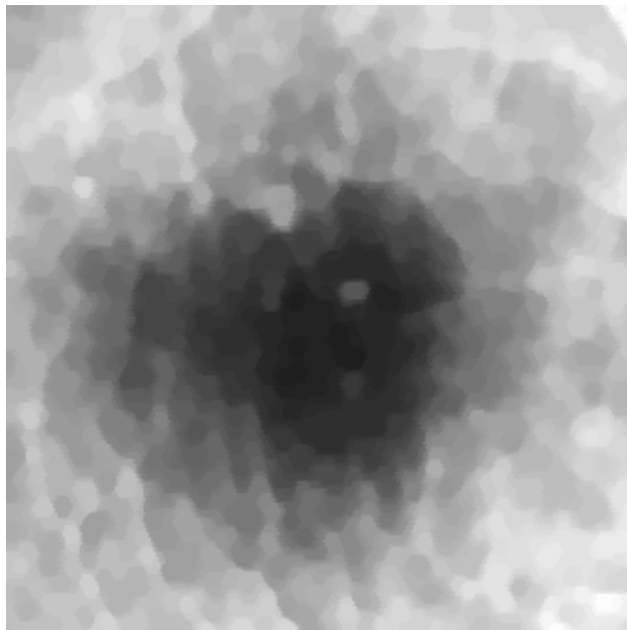
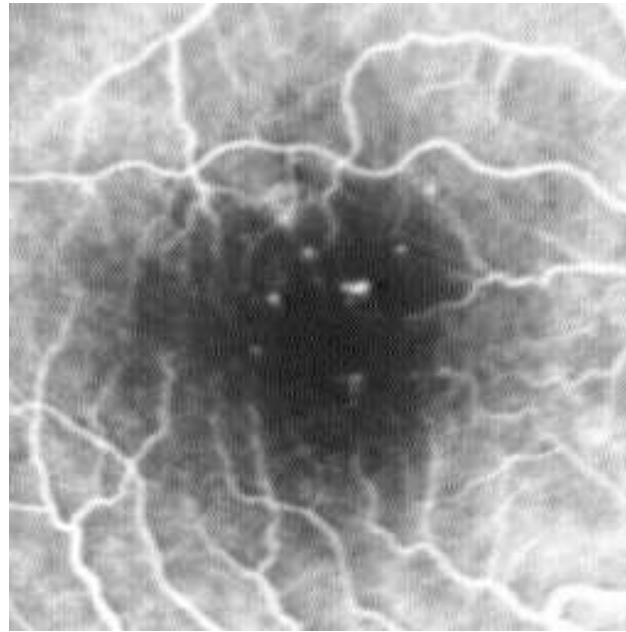


Application au filtrage alterné séquentiel



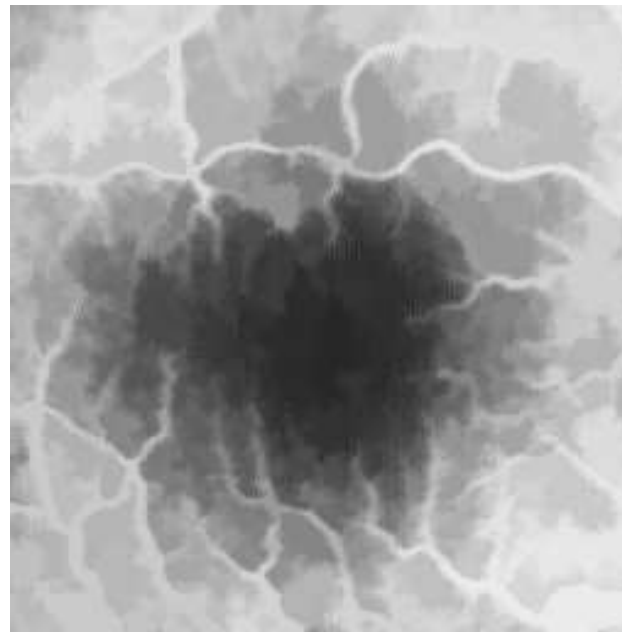
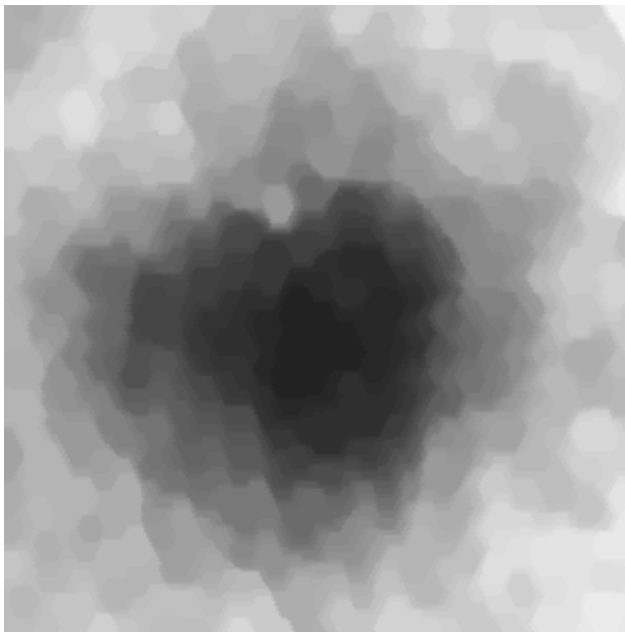
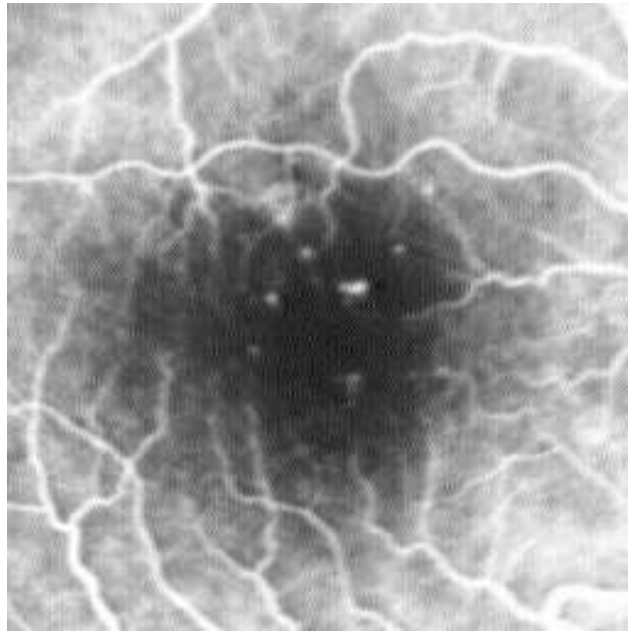
FAS par un hexagone (taille maximale = 1)

Application au filtrage alterné séquentiel



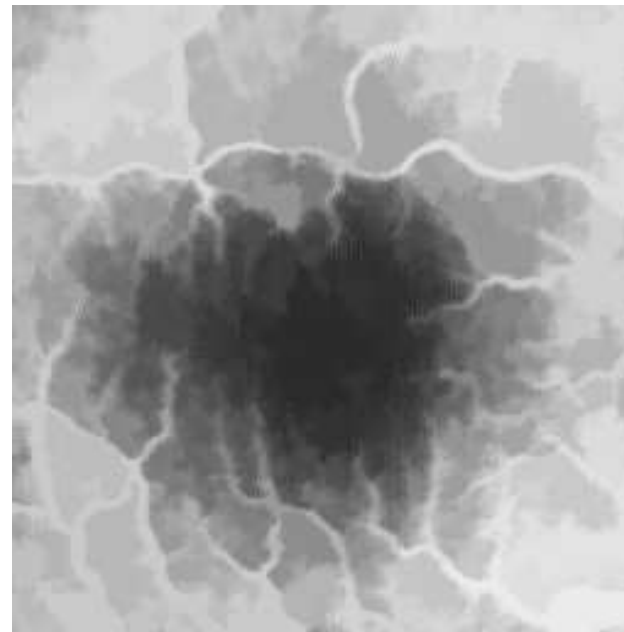
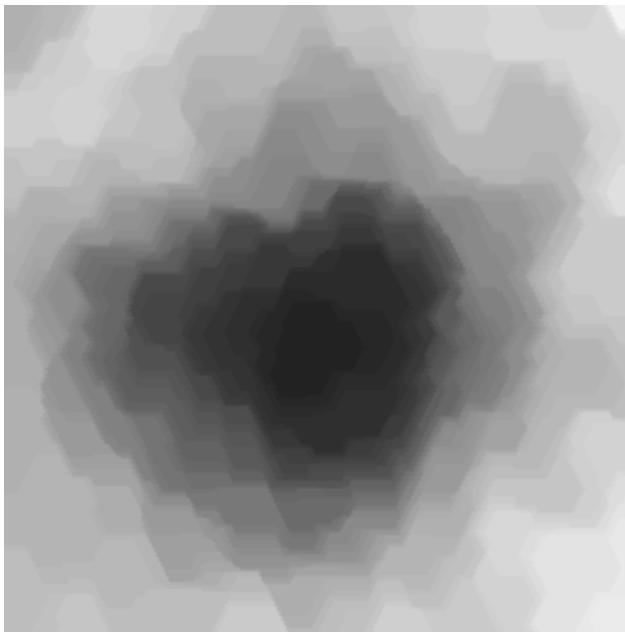
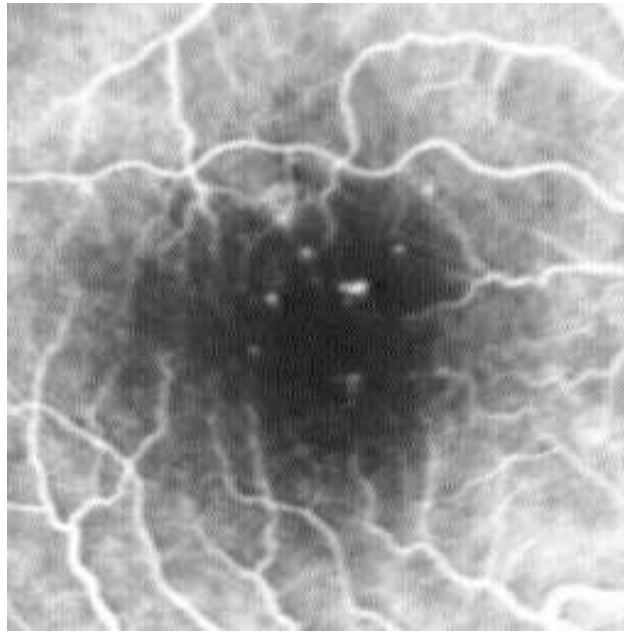
FAS par un hexagone (taille maximale = 3)

Application au filtrage alterné séquentiel



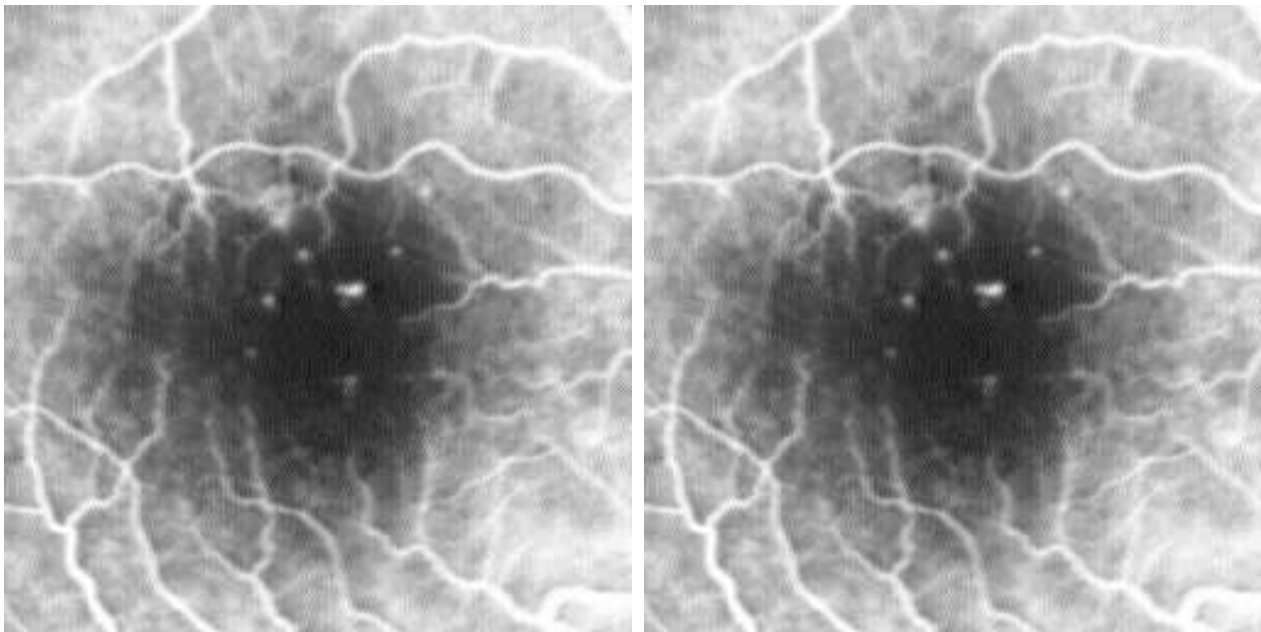
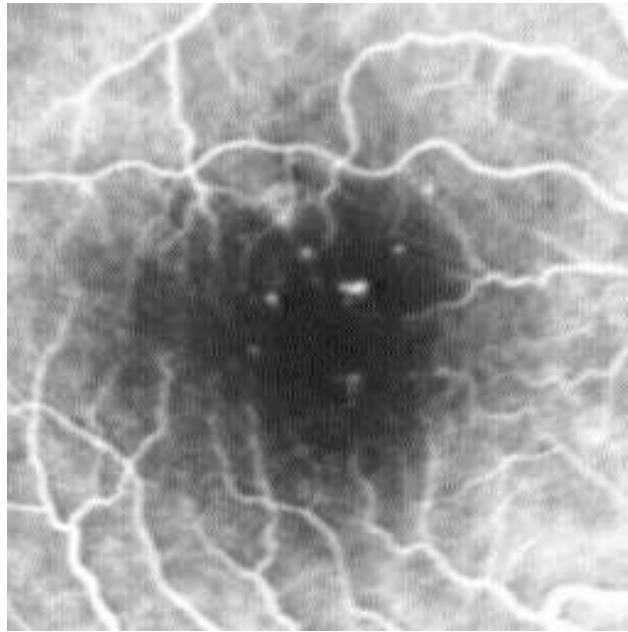
FAS par un hexagone (taille maximale = 5)

Application au filtrage alterné séquentiel



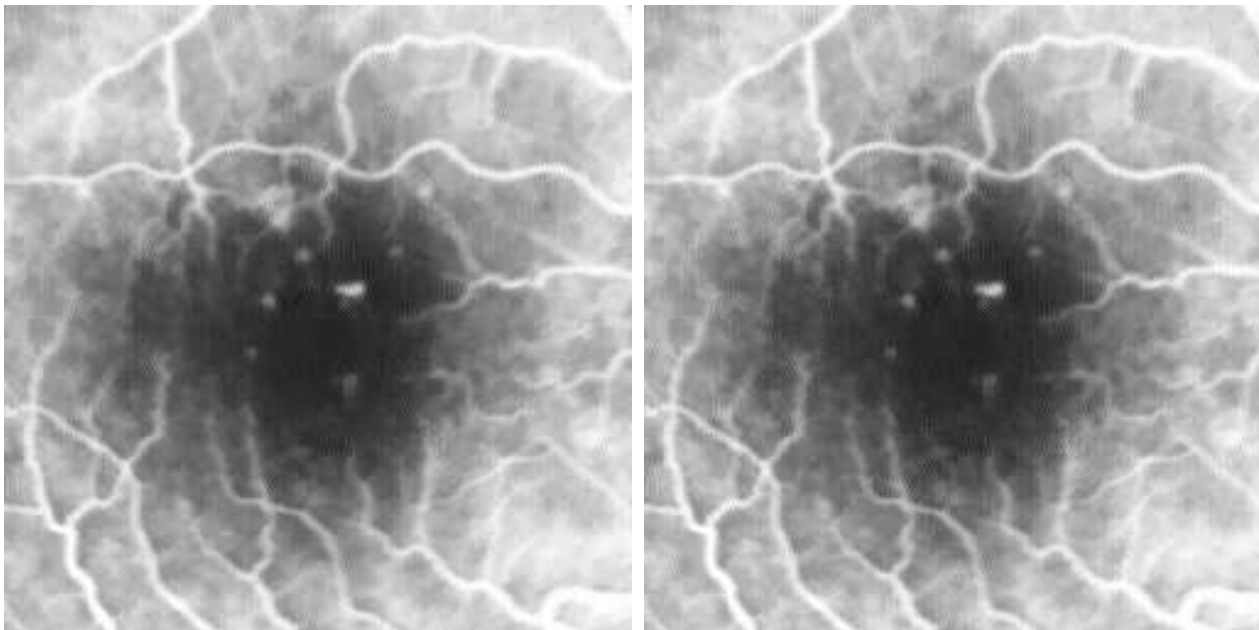
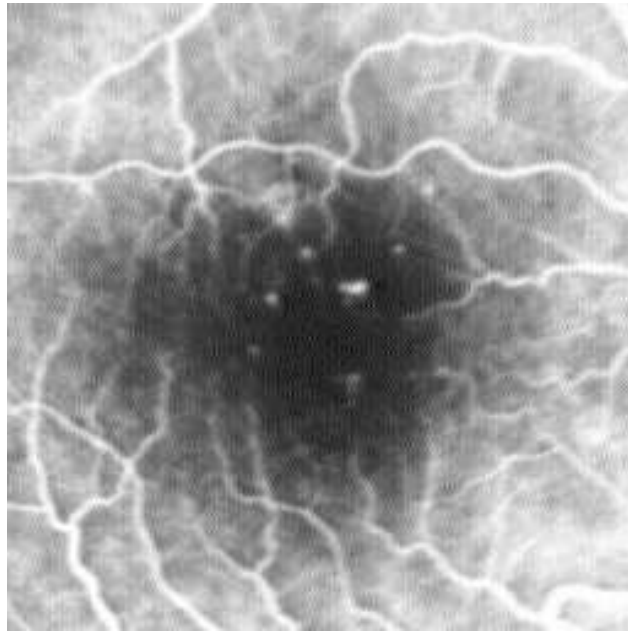
FAS par un hexagone (taille maximale = 9)

Application au filtrage alterné séquentiel



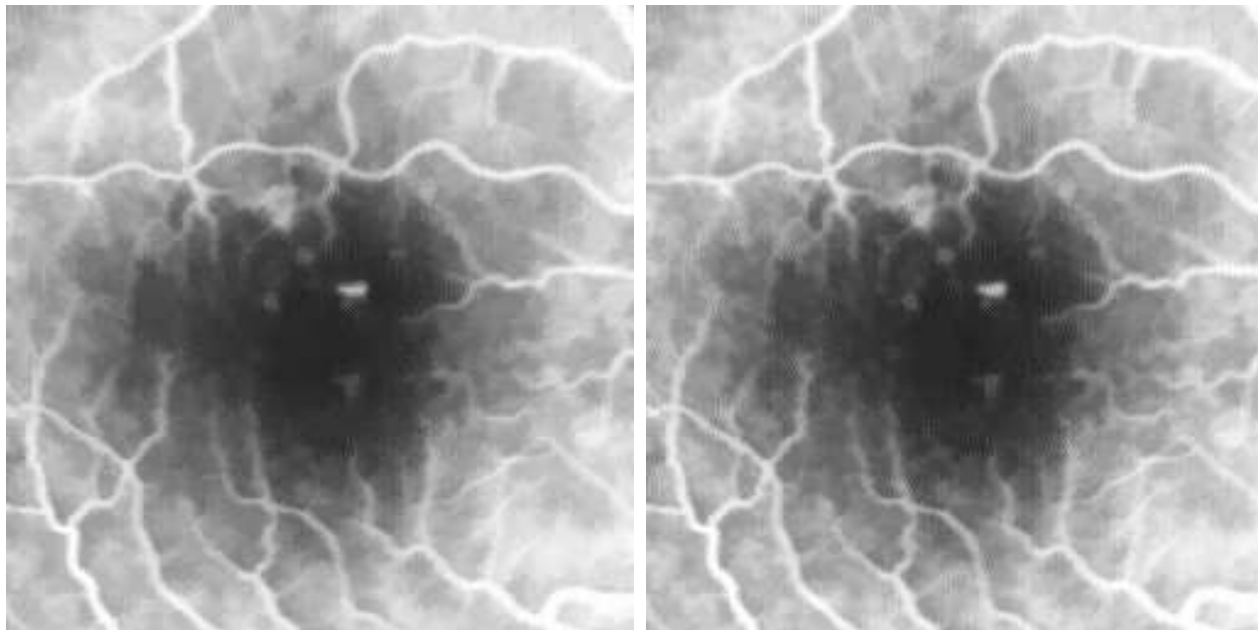
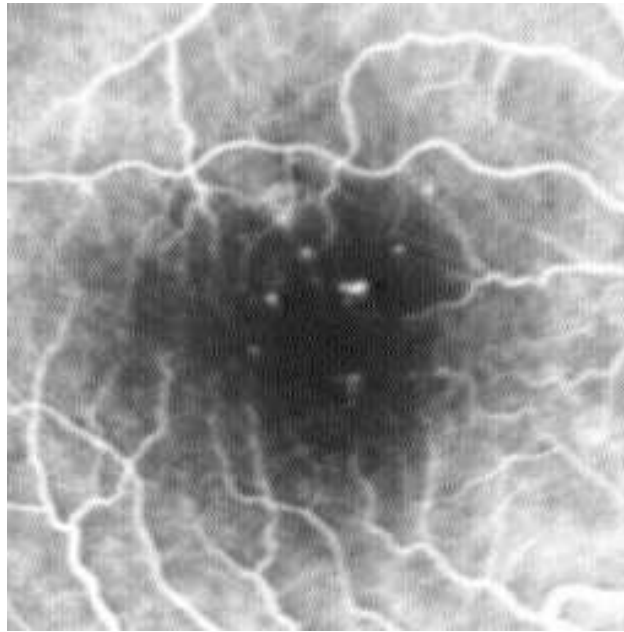
FAS par des segments (taille maximale = 1)

Application au filtrage alterné séquentiel



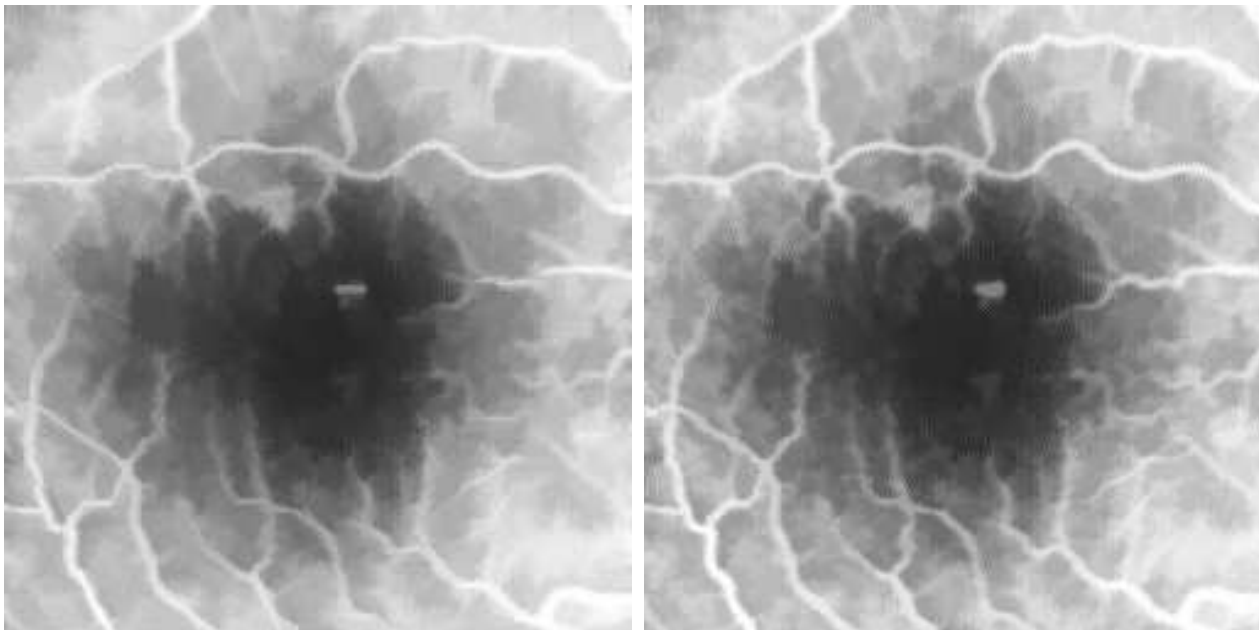
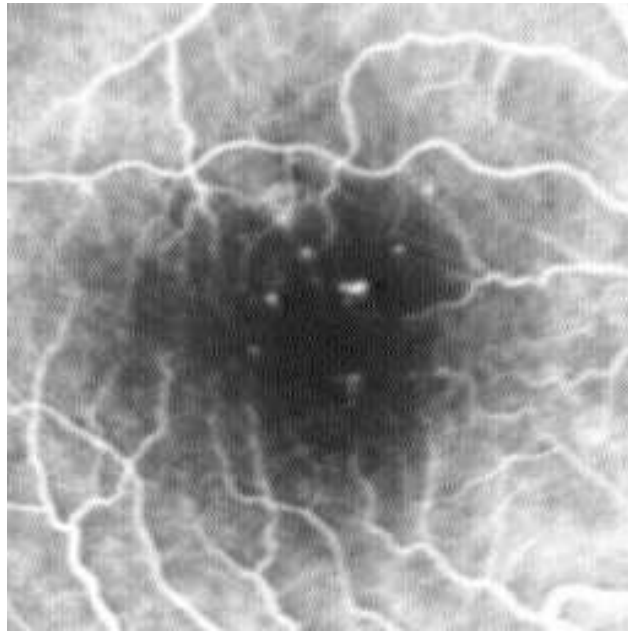
FAS par des segments (taille maximale = 3)

Application au filtrage alterné séquentiel



FAS par des segments (taille maximale = 5)

Application au filtrage alterné séquentiel

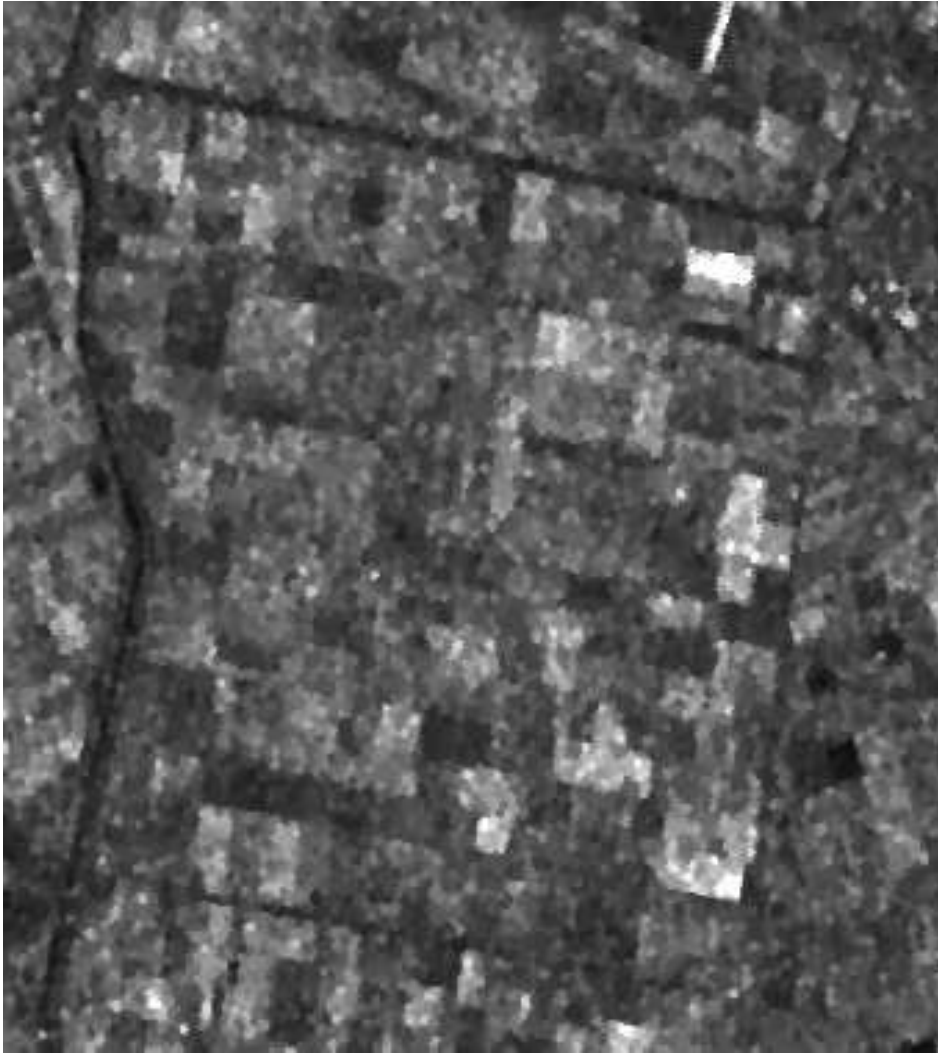


FAS par des segments (taille maximale = 9)

Un autre exemple

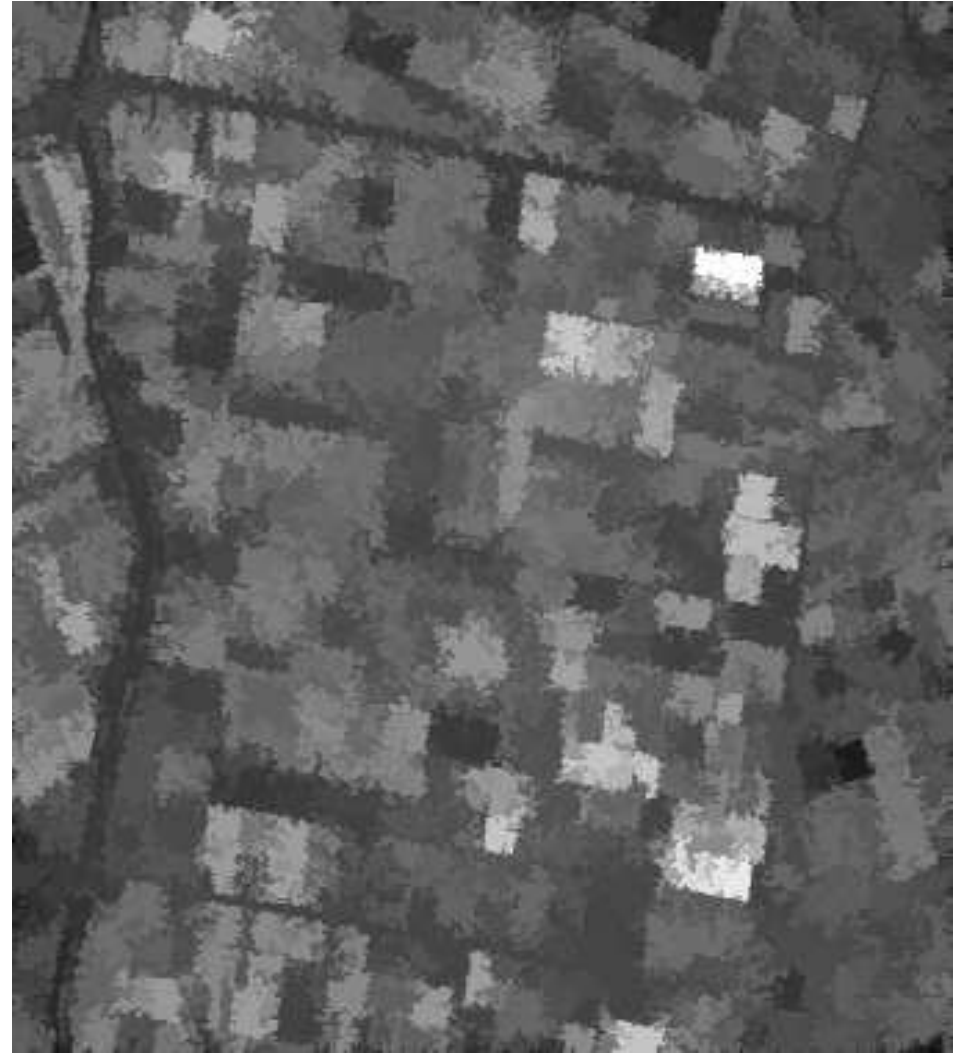
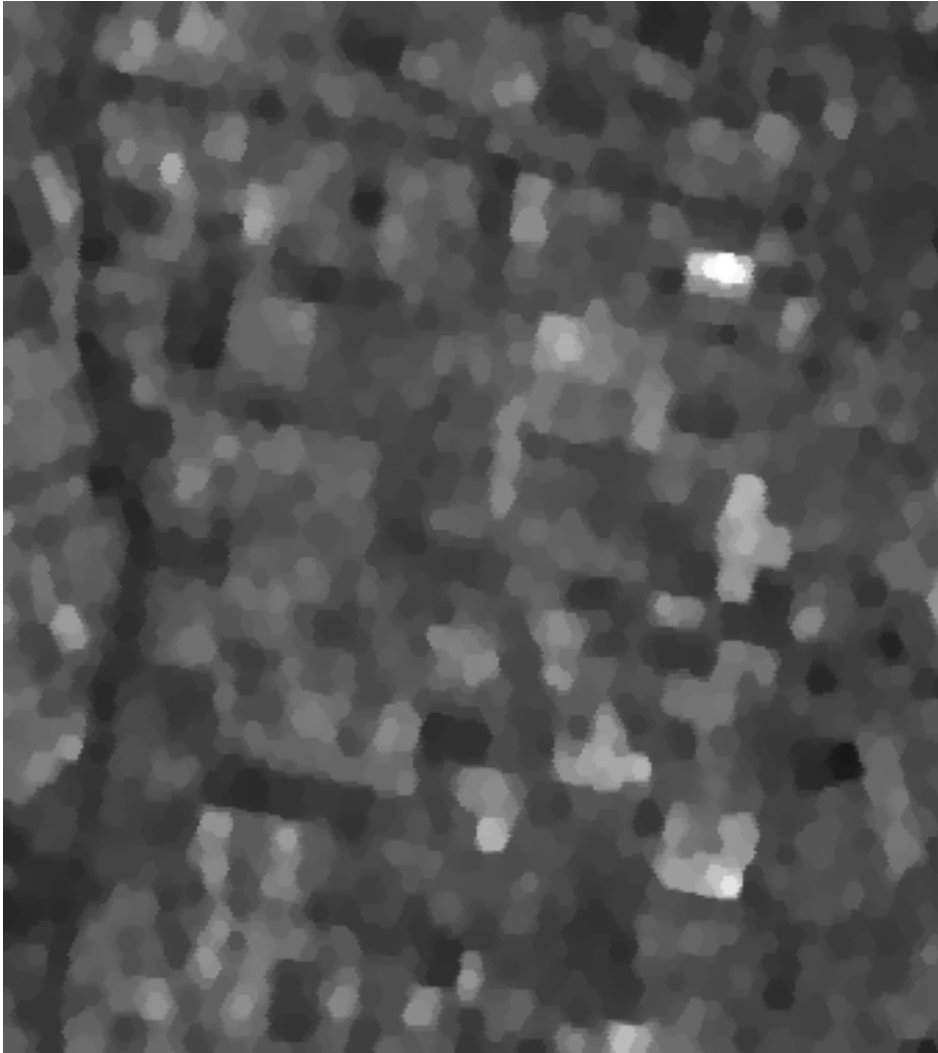


Un autre exemple



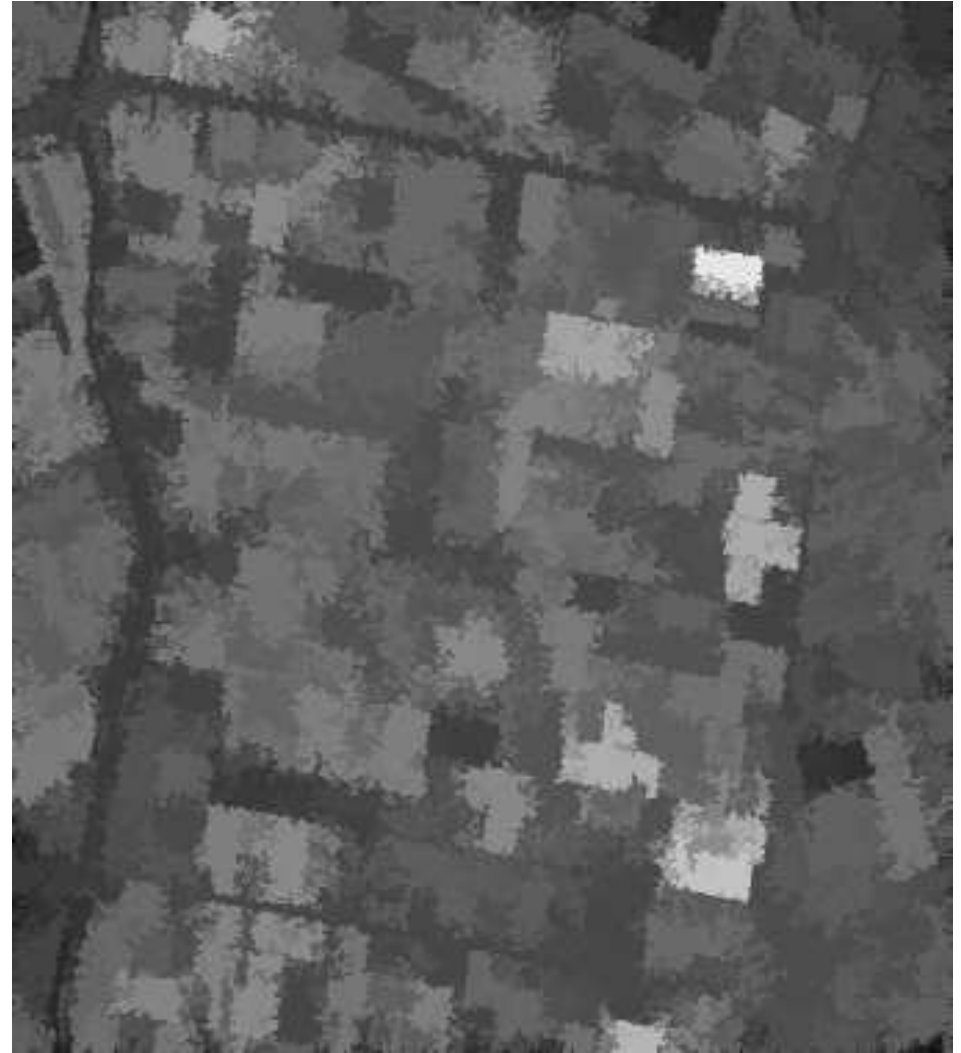
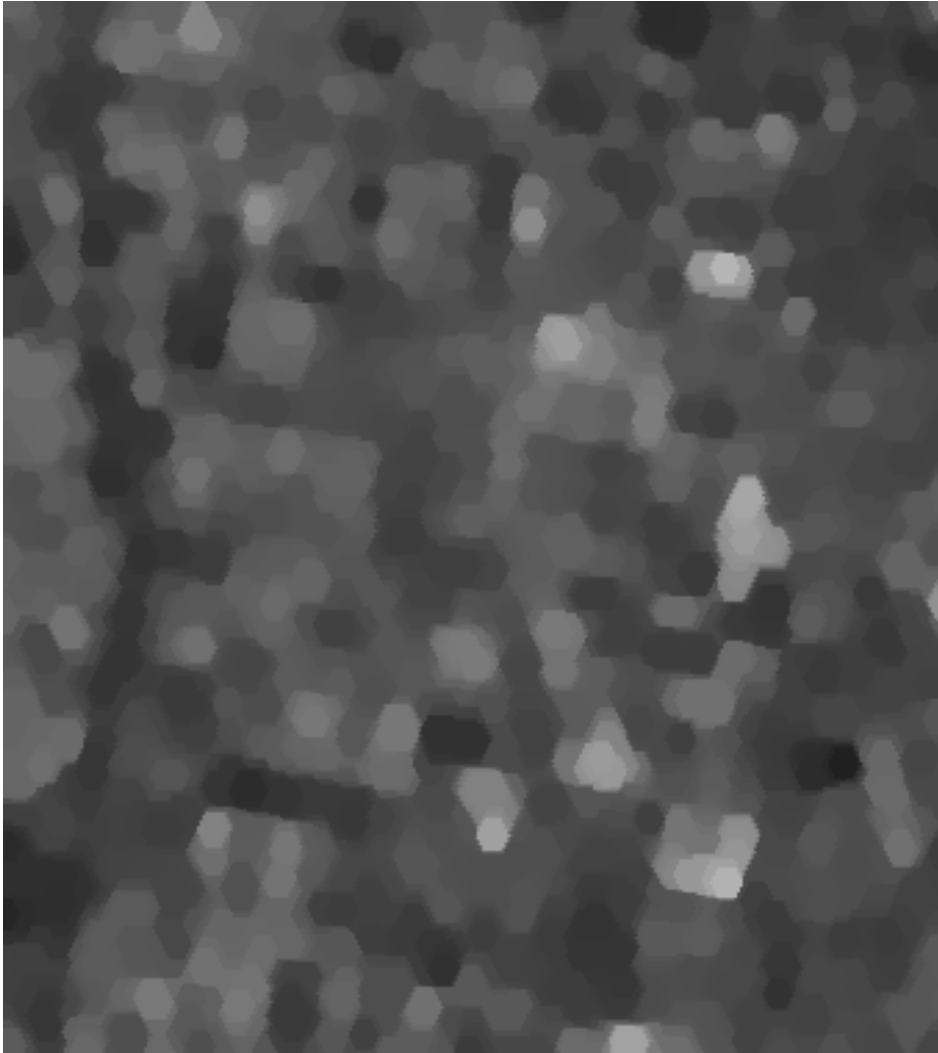
FAS par un hexagone (taille maximale = 1)

Un autre exemple



FAS par un hexagone (taille maximale = 3)

Un autre exemple



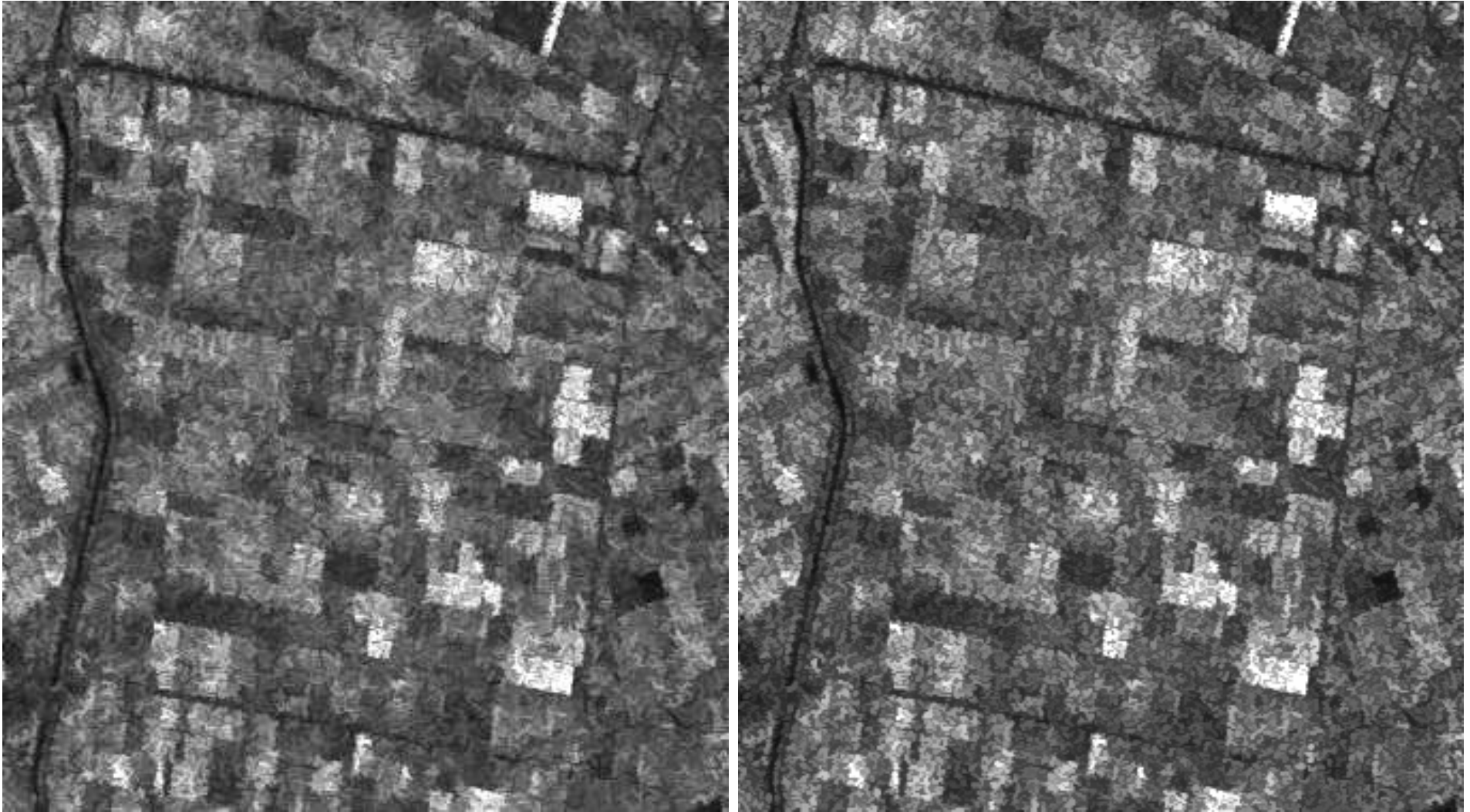
FAS par un hexagone (taille maximale = 5)

Un autre exemple



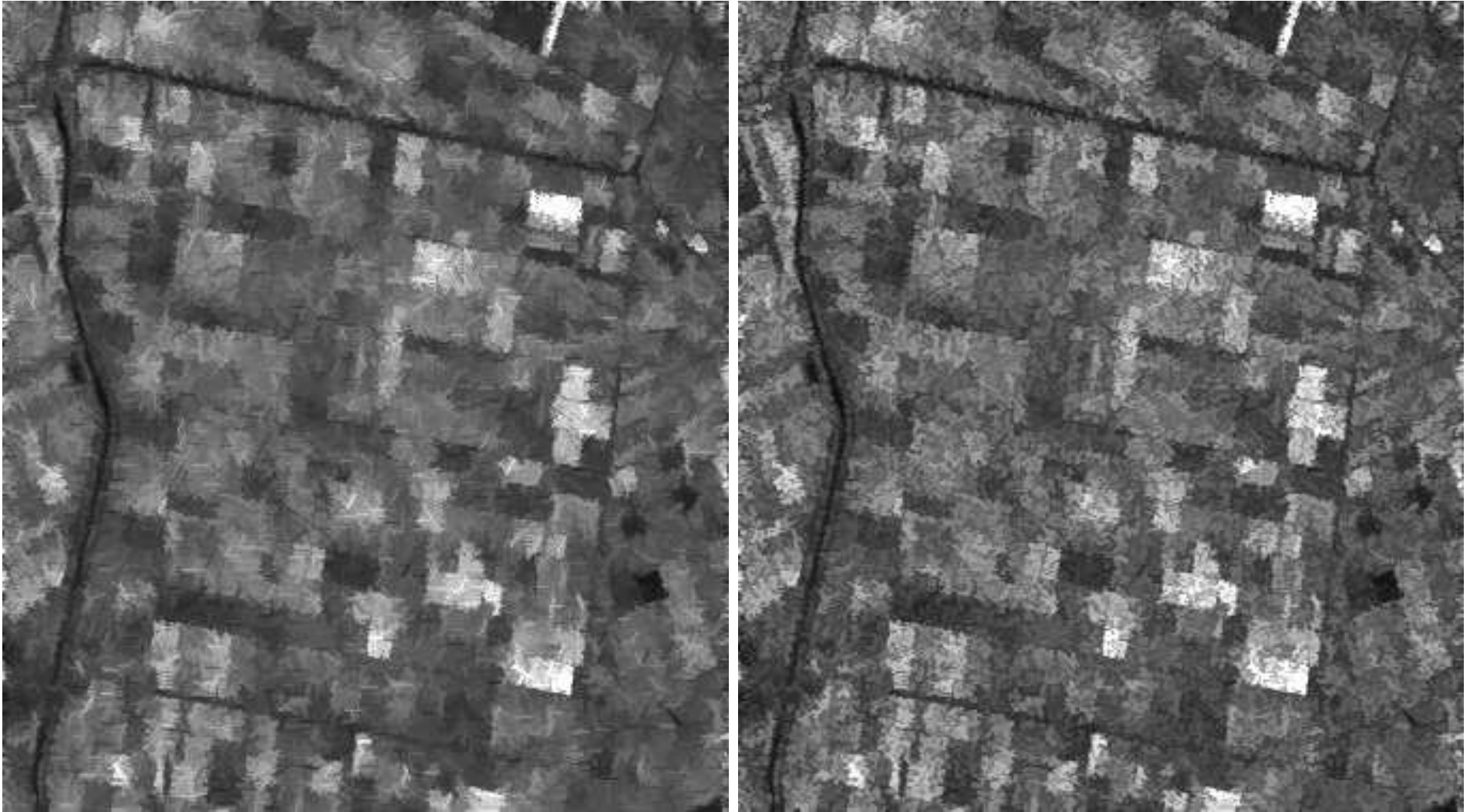
FAS par des segments (taille maximale = 1)

Un autre exemple



FAS par des segments (taille maximale = 3)

Un autre exemple



FAS par des segments (taille maximale = 5)

Maxima régionaux

X maximum régional de f si

$$\forall x \in X, f(x) = \lambda \text{ et } X = CC(f_\lambda)$$

Calcul des maxima régionaux :

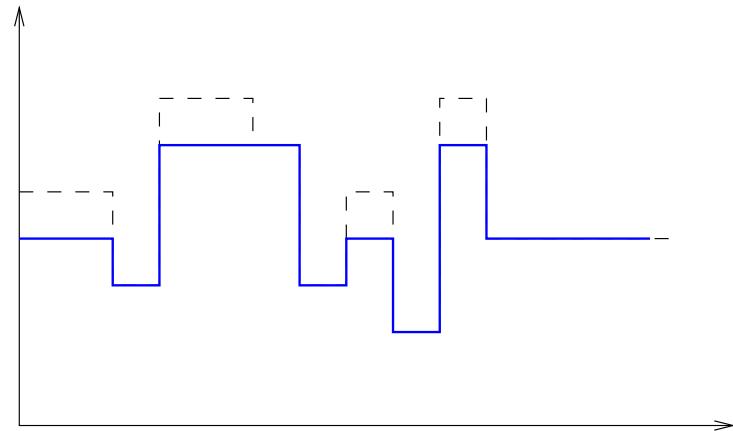
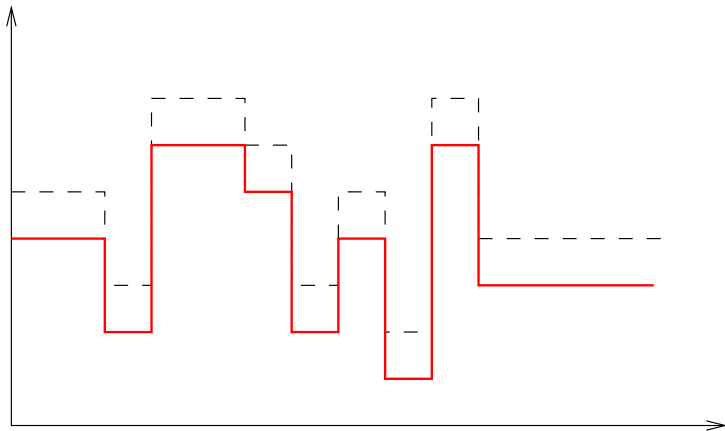
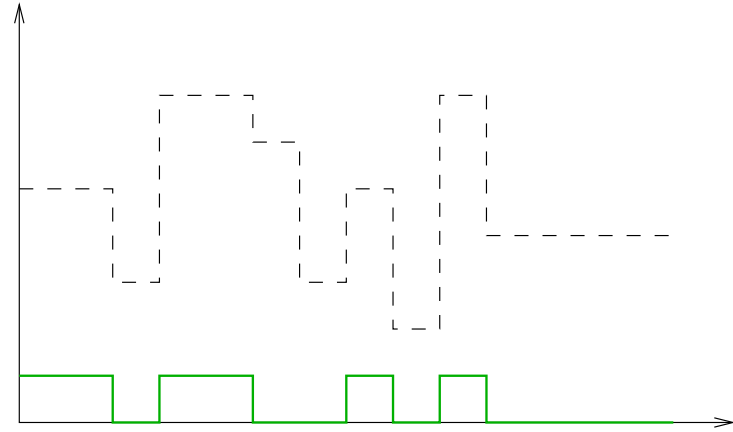
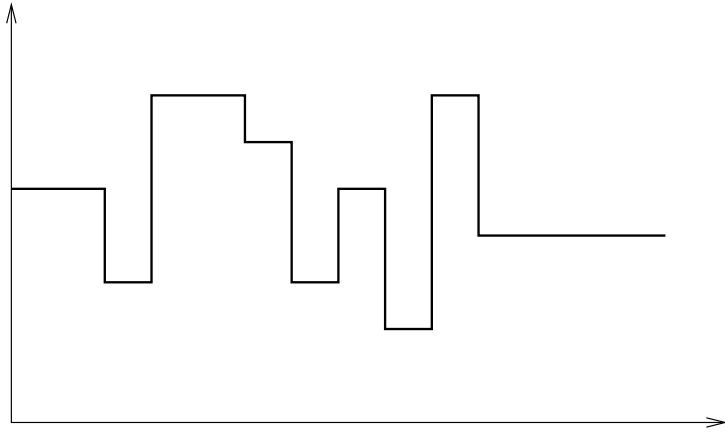
$$f - D_f^\infty(f - 1)$$

h -maxima (dynamique des niveaux de gris) :

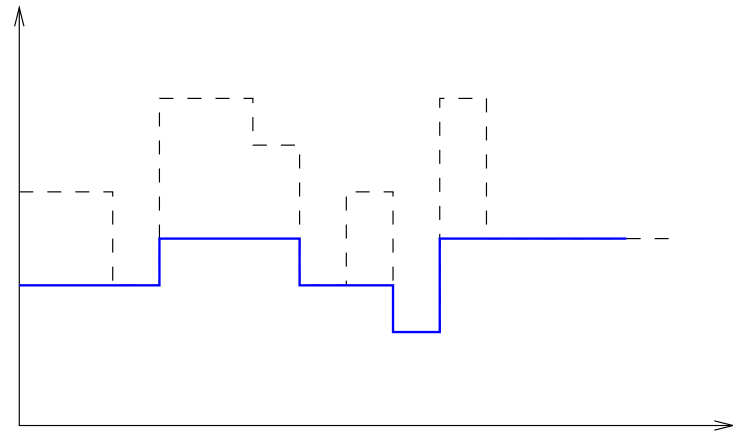
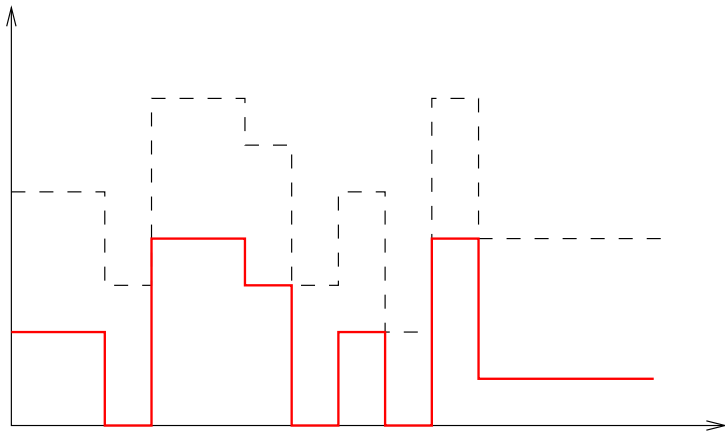
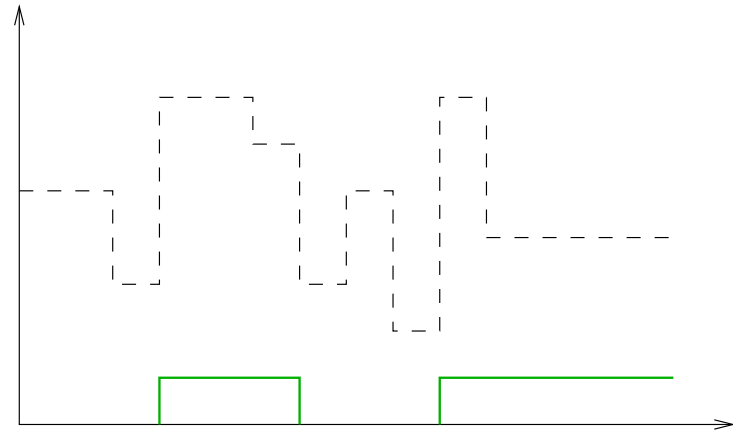
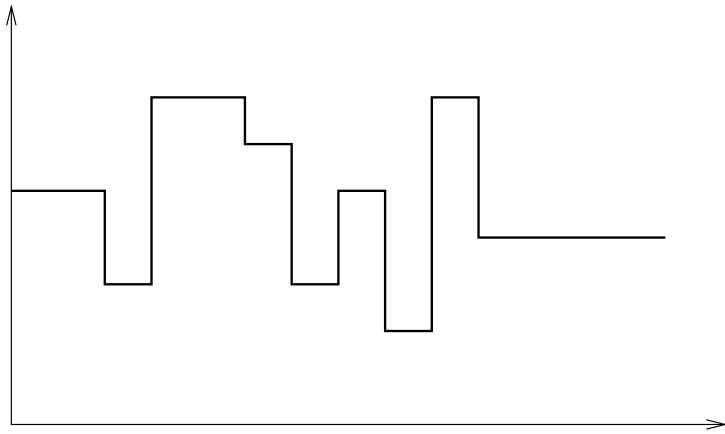
$$f - D_f^\infty(f - h)$$

\Rightarrow maxima robustes

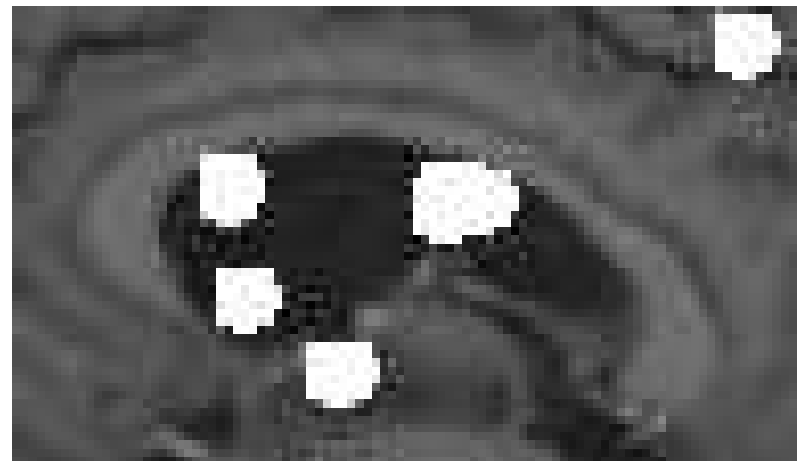
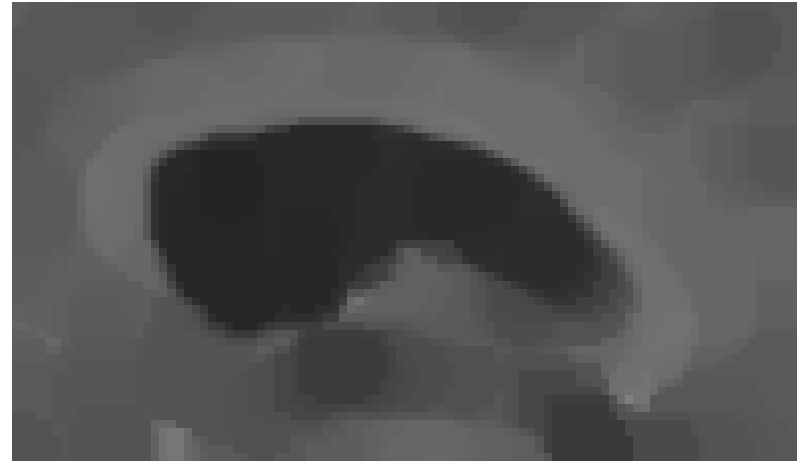
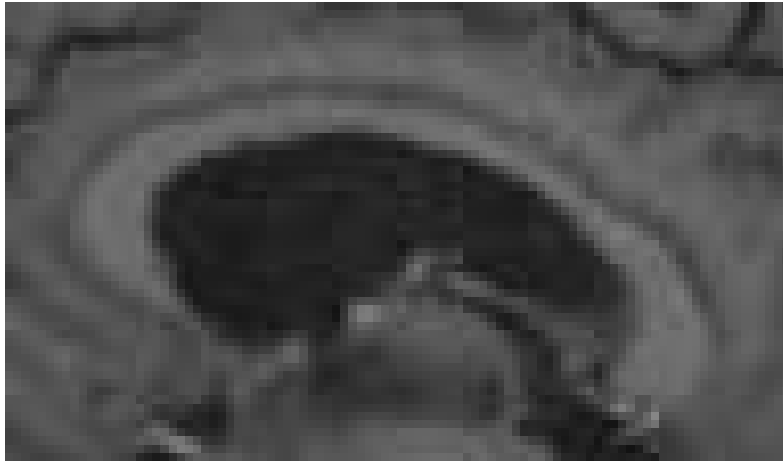
Maxima régionaux : exemple



Maxima robustes : exemple



Minima régionaux : exemple



Squelette par zones d'influence

$$X = \bigcup_i X_i$$

Zone d'influence de X_i dans X^C :

$$ZI(X_i) = \{x \in X^C / d(x, X_i) < d(x, X \setminus X_i)\}$$

Squelette par zone d'influence :

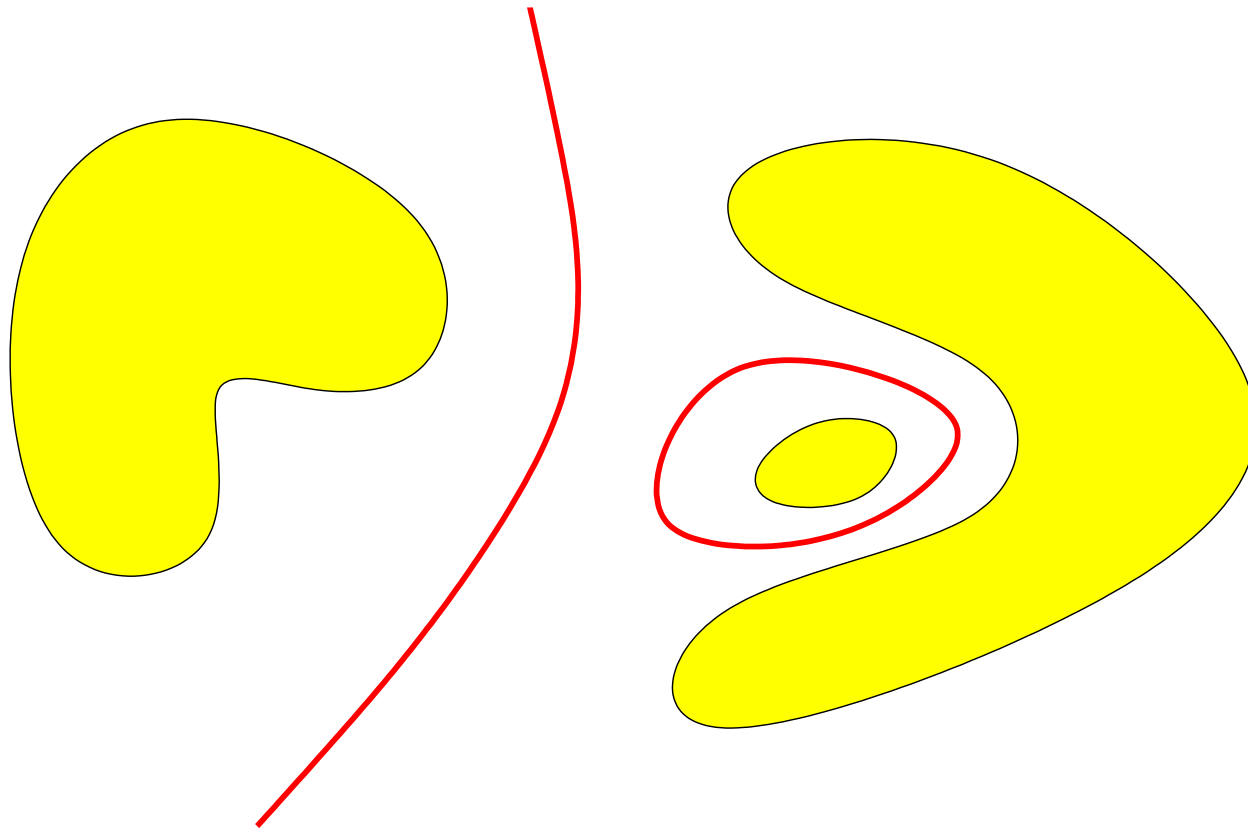
$$\text{Skiz}(X) = \left(\bigcup_i ZI(X_i) \right)^C$$

= diagramme de Voronoï généralisé

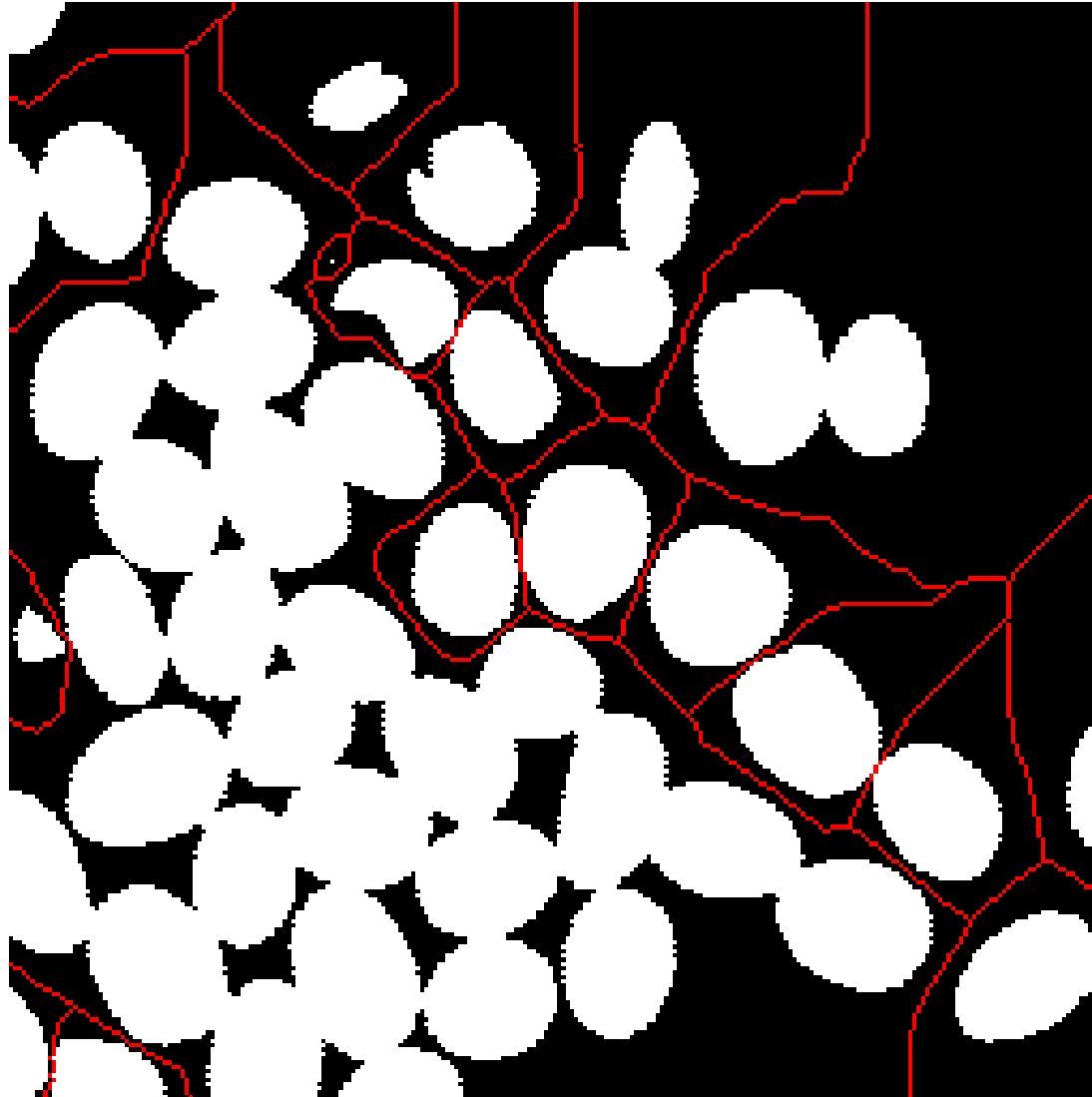
Propriétés :

- $\text{Skiz}(X) \subseteq \text{squelette}(X^C)$ (cf cours sur le squelette)
- le Skiz peut être non connexe (même si X^C l'est)

Squelette par zones d'influence : exemples



Squelette par zones d'influence : exemples



Squelette géodésique par zones d'influence

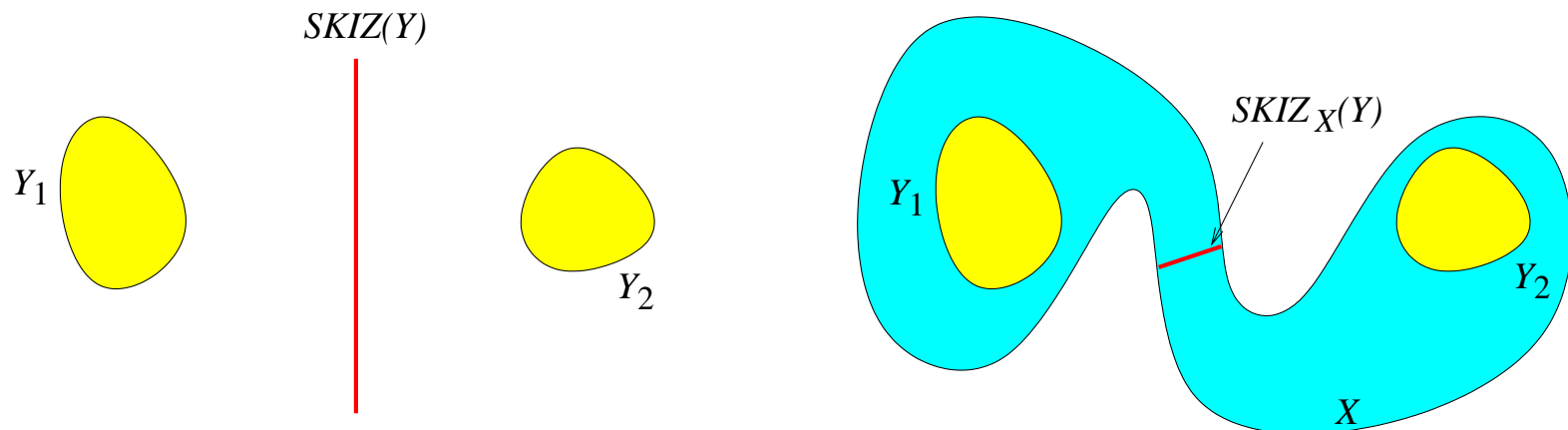
$$Y = \cup_i Y_i$$

Zone d'influence géodésique de Y_i conditionnellement à X :

$$ZI_X(Y_i) = \{x \in X, d_X(x, Y_i) < d_X(x, Y \setminus Y_i)\}$$

Squelette géodésique par zone d'influence :

$$SKIZ_X(Y) = X \setminus \bigcup_i ZI_X(Y_i)$$



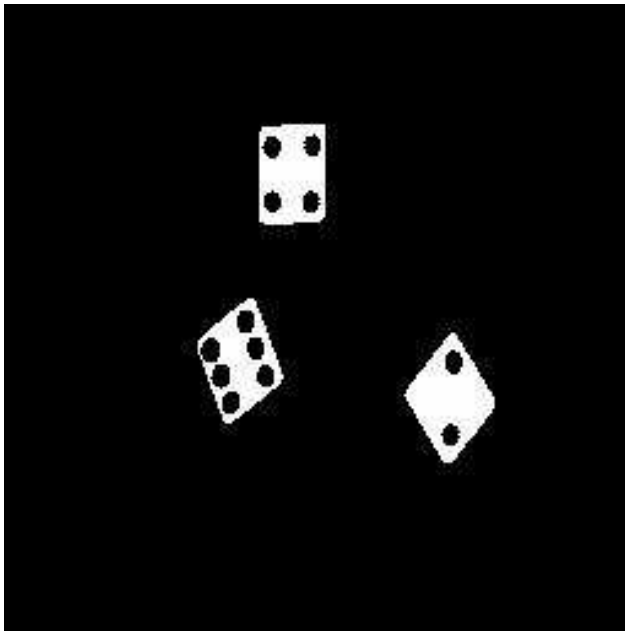
Une première application simple...



Une première application simple...



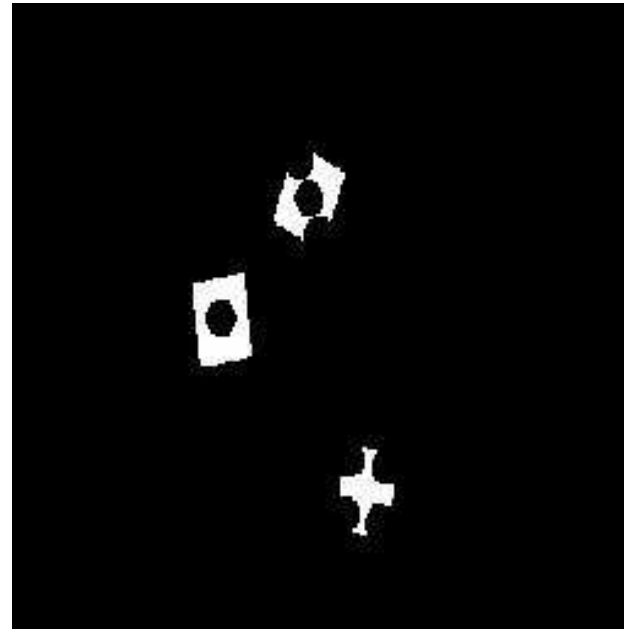
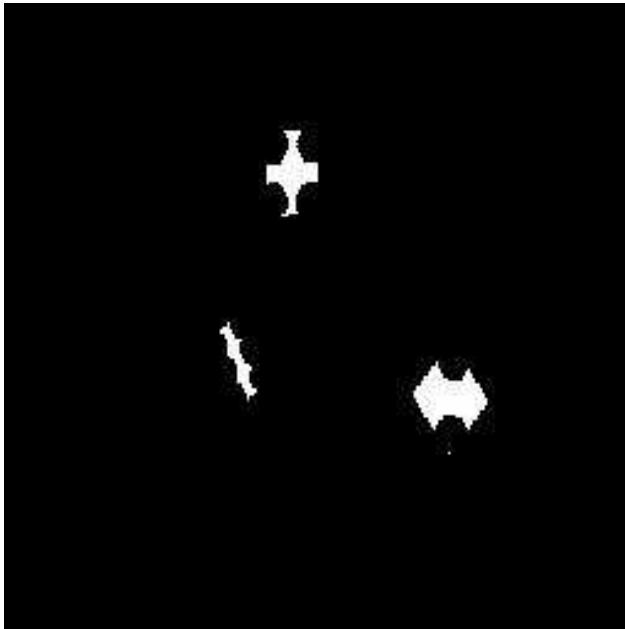
Seuillage :



Une première application simple...



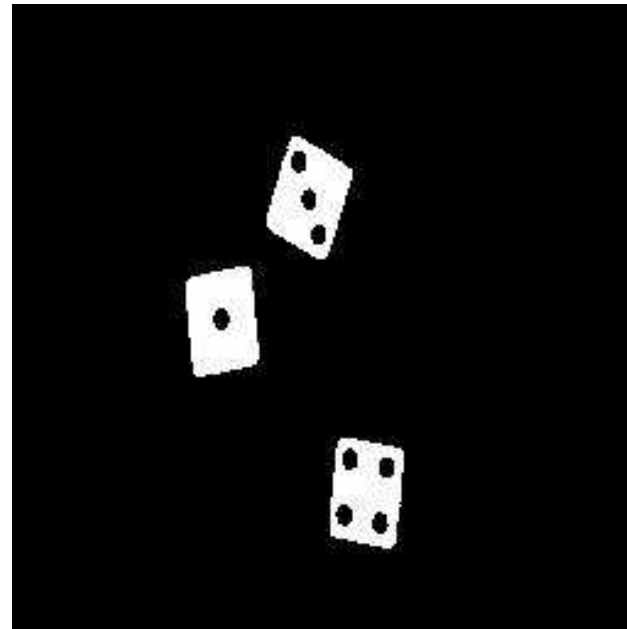
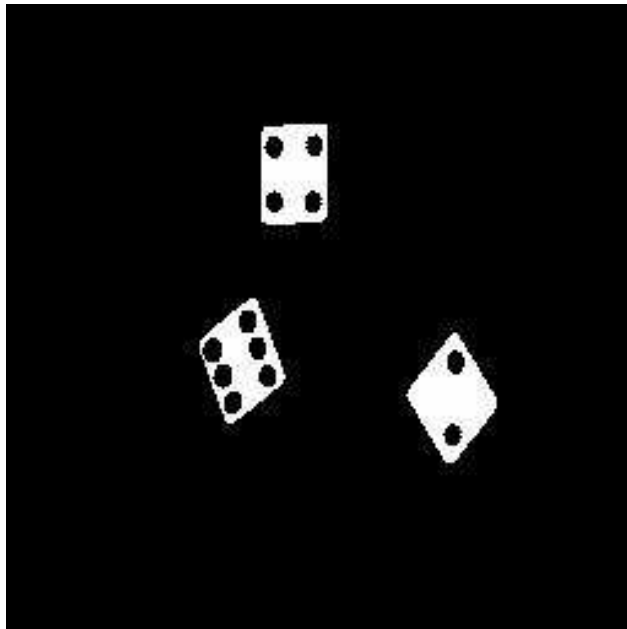
Erosion :



Une première application simple...



Reconstruction :



⇒ comptage des dés blancs et des points noirs sur chaque dé

Une première application simple...

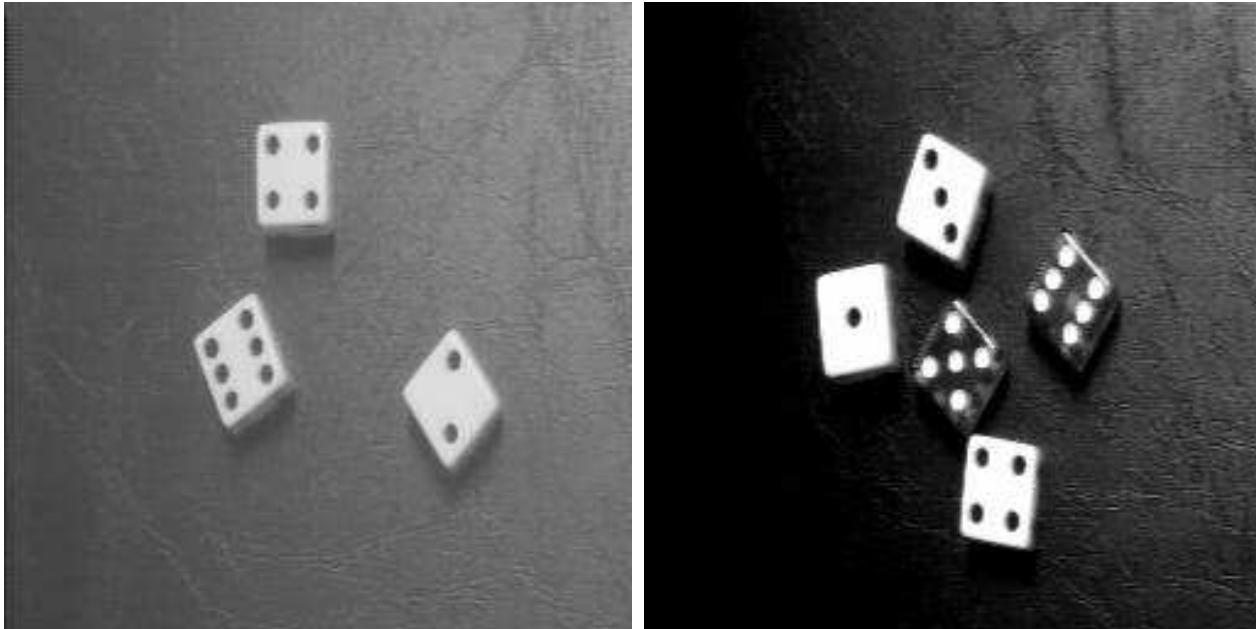
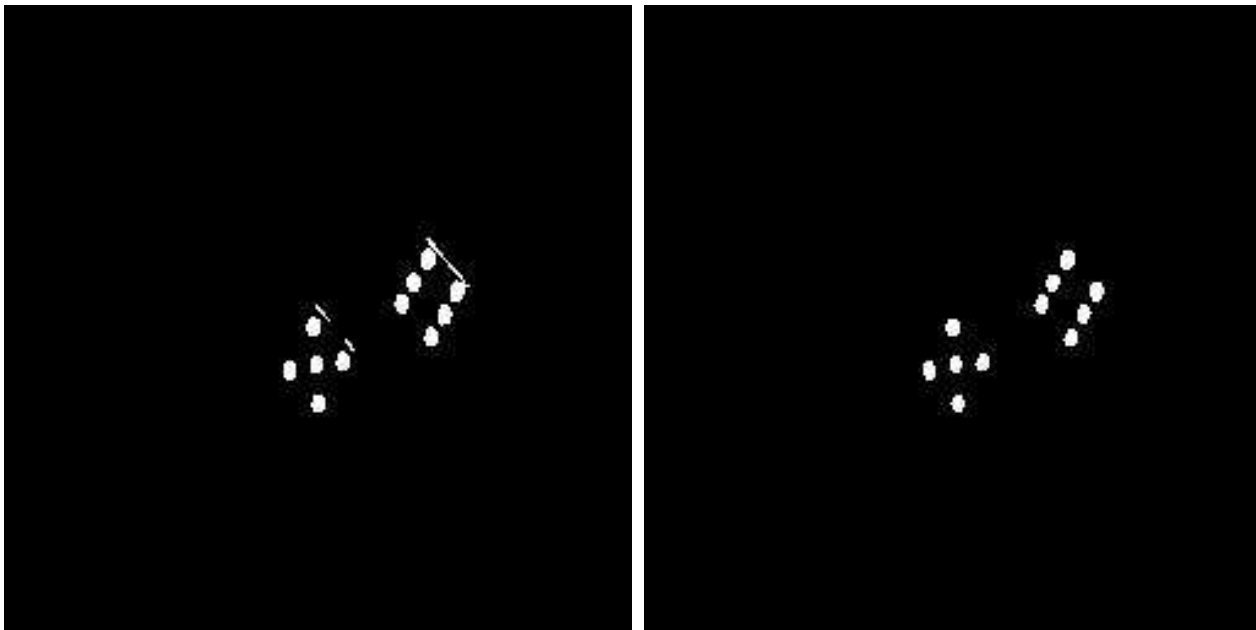


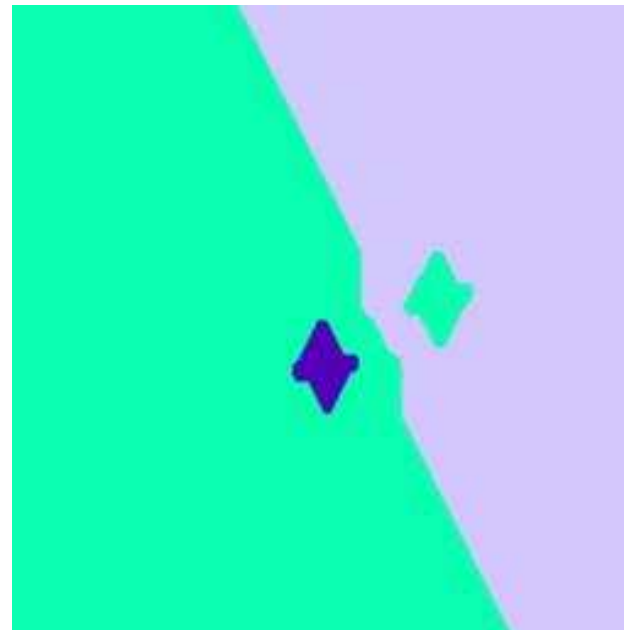
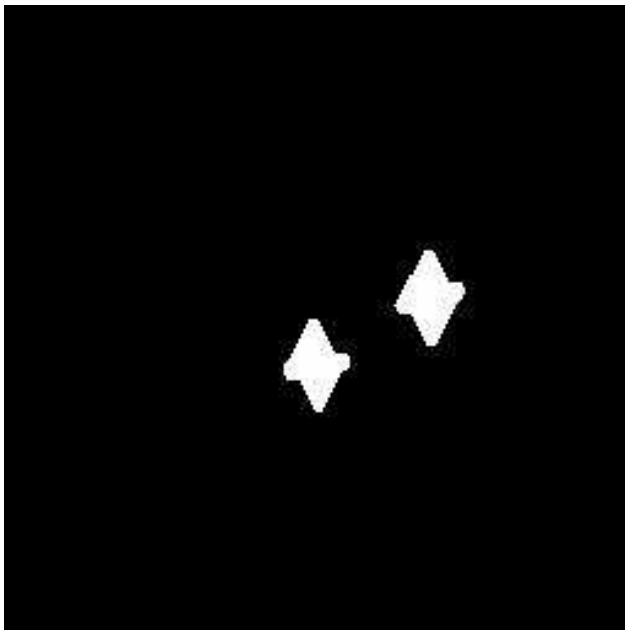
Image seuillée – reconstruction des dés blancs puis petite ouverture



Une première application simple...



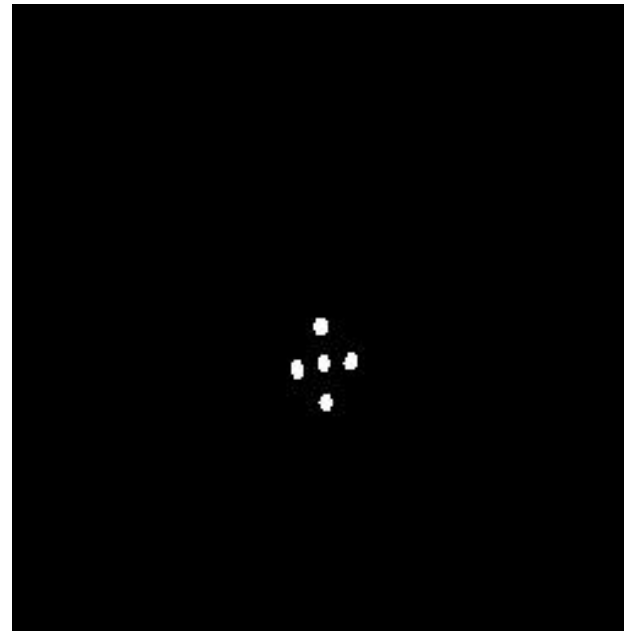
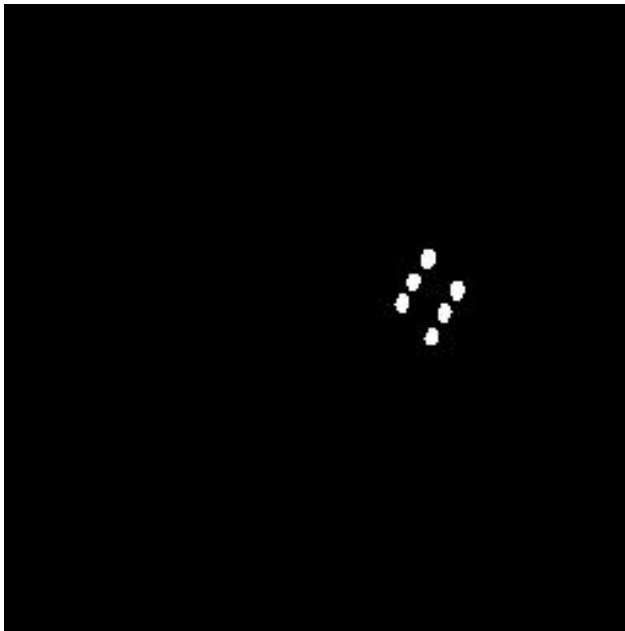
Grande fermeture (15) - SKIZ



Une première application simple...



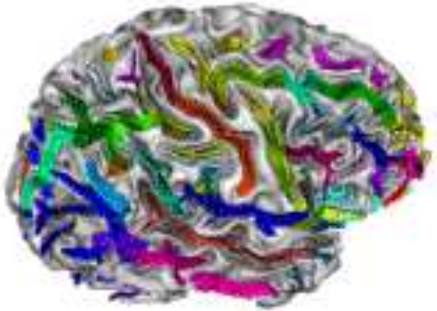
Séparation (et logique) et étiquetage



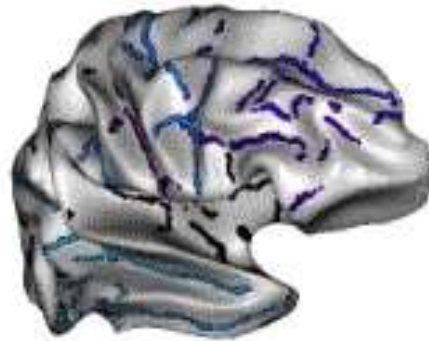
⇒ comptage des dés noirs et des points blancs sur chaque dé

Parcellisation du cortex

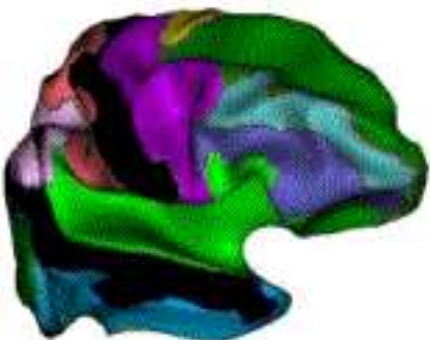
(thèse d'Arnaud Cachia)



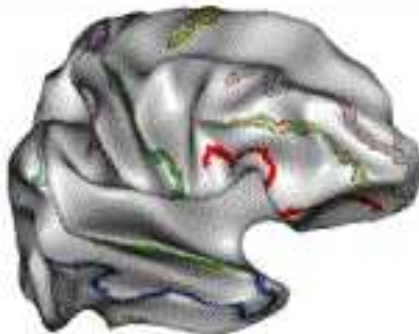
Segmentation et reconnaissance automatique des **sillons**
Rivière00



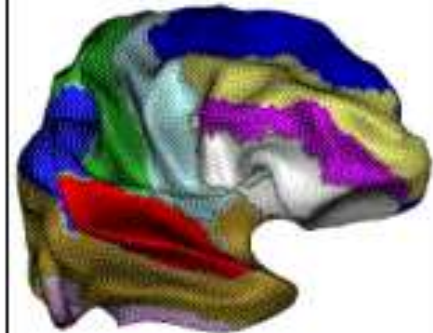
Définition sur la surface corticale des **sillons-frontières**



Calcul des **zones d'influences sulcales**



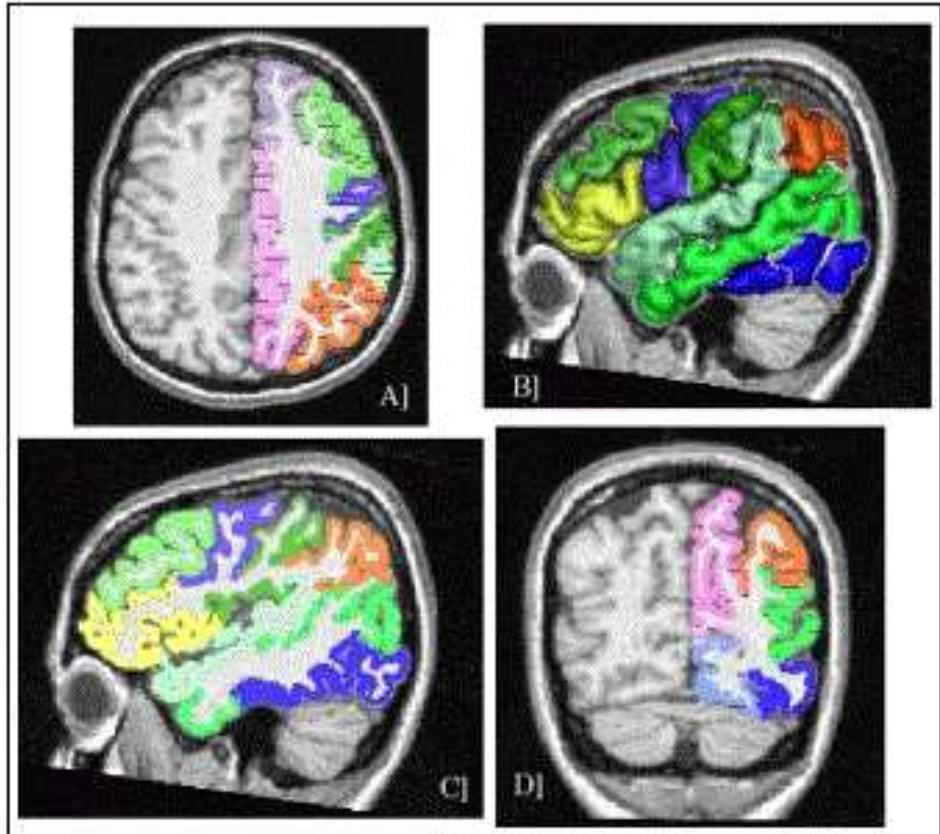
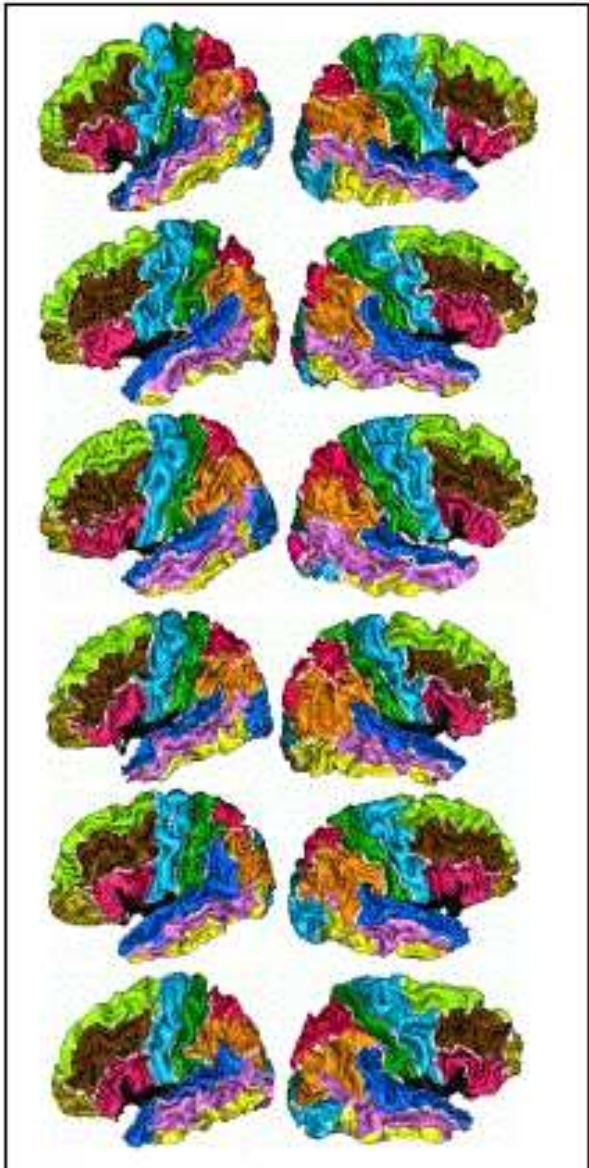
Définition des **graines gyrales**
(extraction et sélection des frontières)



Parcellisation en **gyri**
(2D et 3D)

Parcellisation du cortex

(thèse d'Arnaud Cachia)

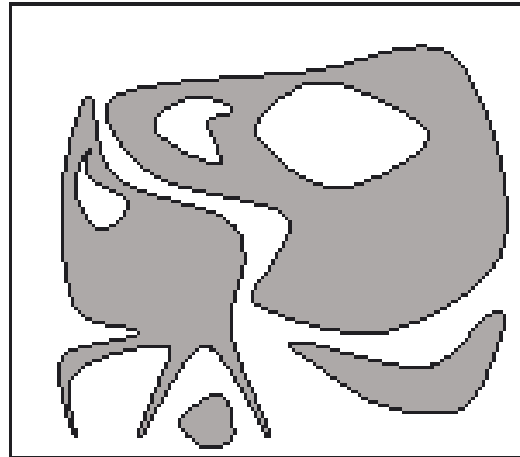


Parcellisation volumique
(diagramme de Voronoï calculé
dans le ruban cortical 3D)

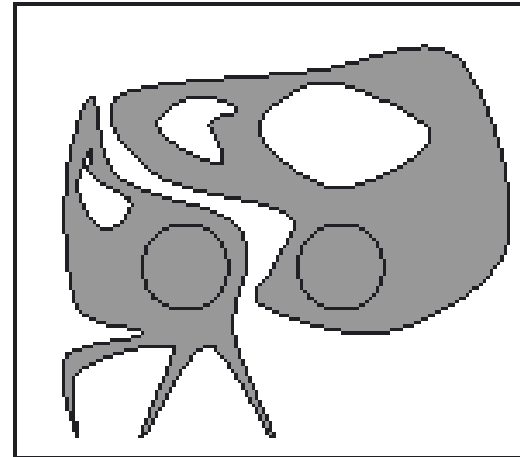
Filtres connectés

- Objectif : simplifier l'image
- Filtre morphologique qui
 - préserve les contours
 - est indépendant du contraste
 - agit sur les composantes connexes
- Premier exemple : ouvertures surfaciques

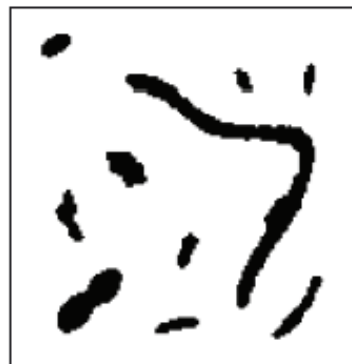
Filtres connectés



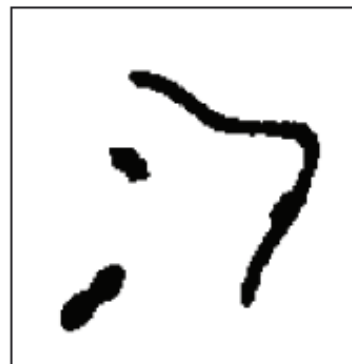
Original Image



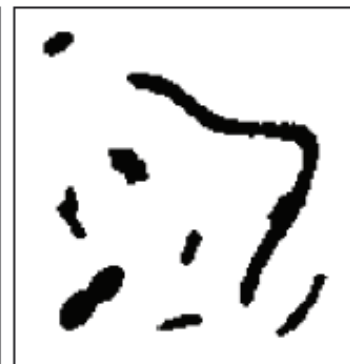
Opening by reconstruction



Original Image



Opening by reconstruction



Area Opening

Filtres connectés sur des images à niveaux de gris

- Opérations croissantes
- Application coupe par coupe

$$T_h(f) = \{x | f(x) \geq h\}$$

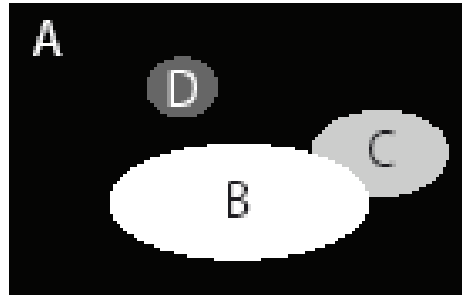
$$(\gamma^A(f))(x) = \sup\{h | x \in \Gamma^A(T_h(f))\}$$



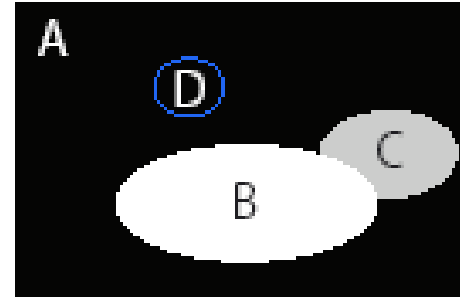
Ouverture surfacique

Fermeture surfacique

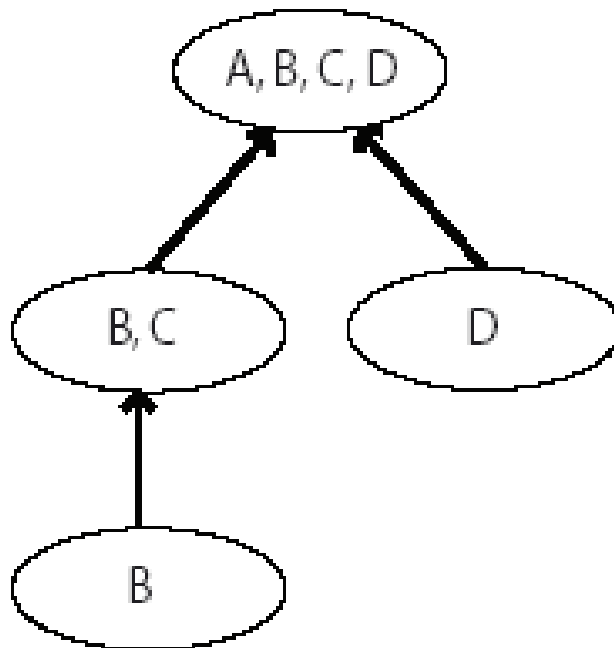
Représentation par arbres



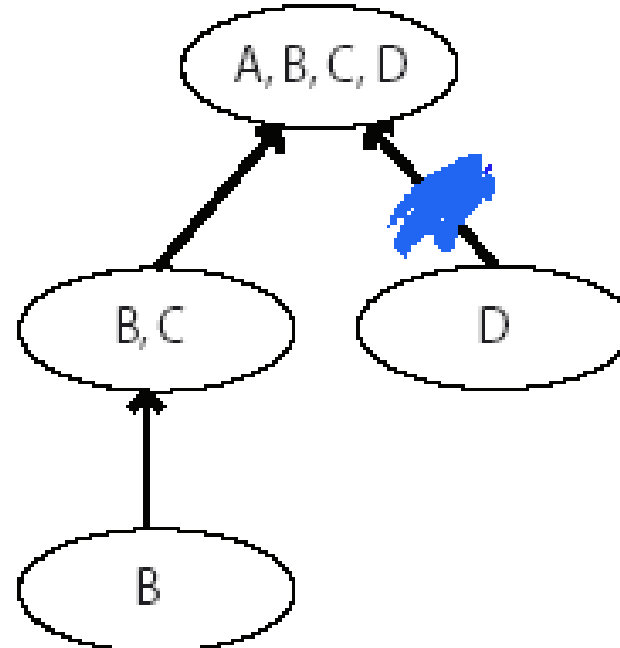
Original Image



Original Image

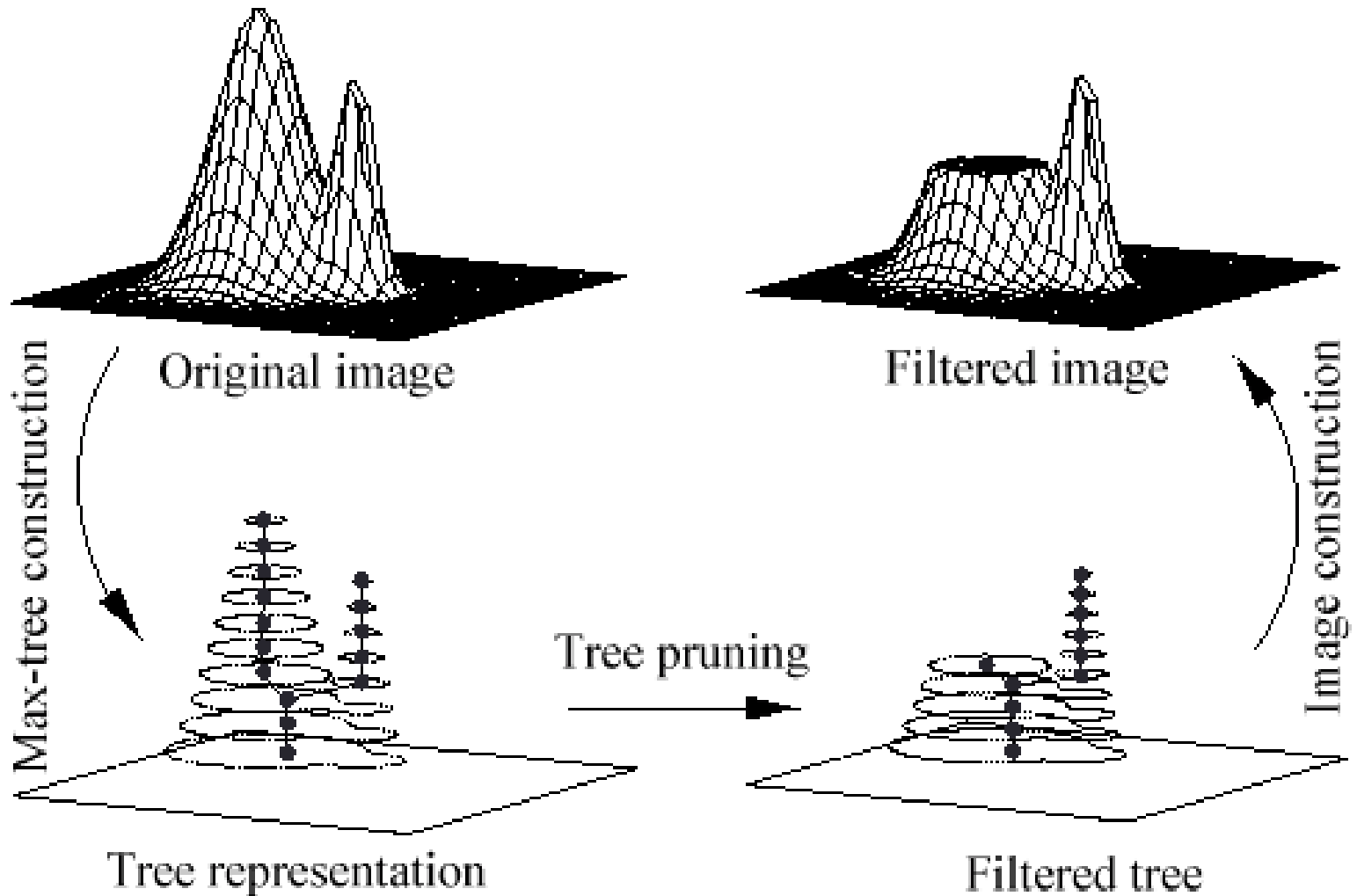


Max-Tree



Max-Tree

Représentation par arbres



from (Salembier ITIP 00)

Ouverture par attribut



Original
Image



Area
Opening

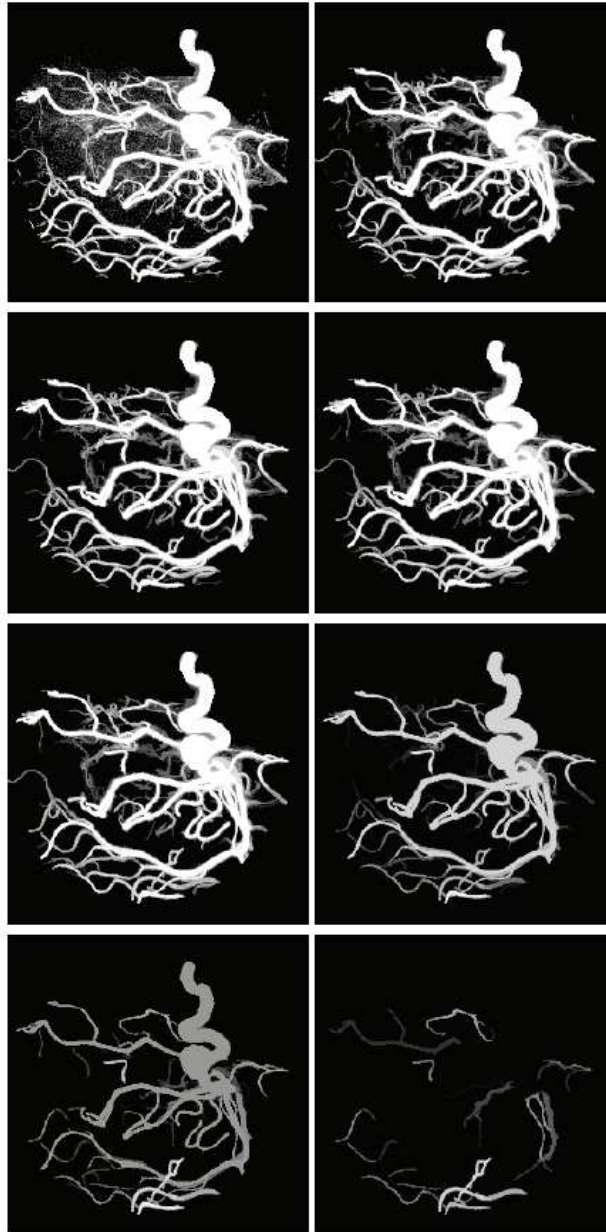


Moment of Inertia
Opening

from (Wilkinson ISMM 00)

Exemples d'application

Filtrage en fonction de l'élongation (Meijster, 2002) :



Exemples d'application

Critère entropique (Salembier, 1998) :

Original



Entropy Operator



Exemples d'application

Analyse du mouvement (Salembier, 1998) :



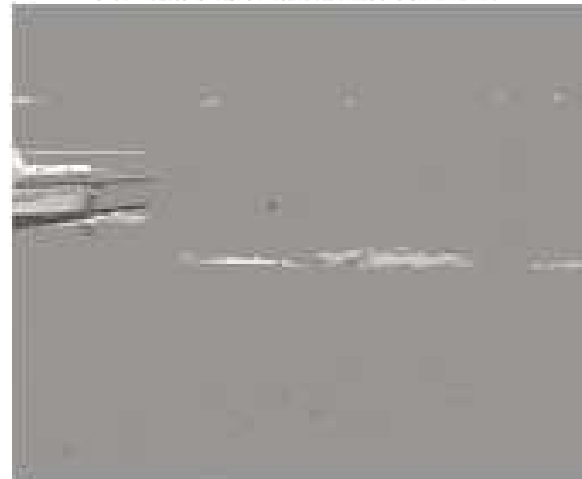
Original frame



Objects with
translation (0,0)



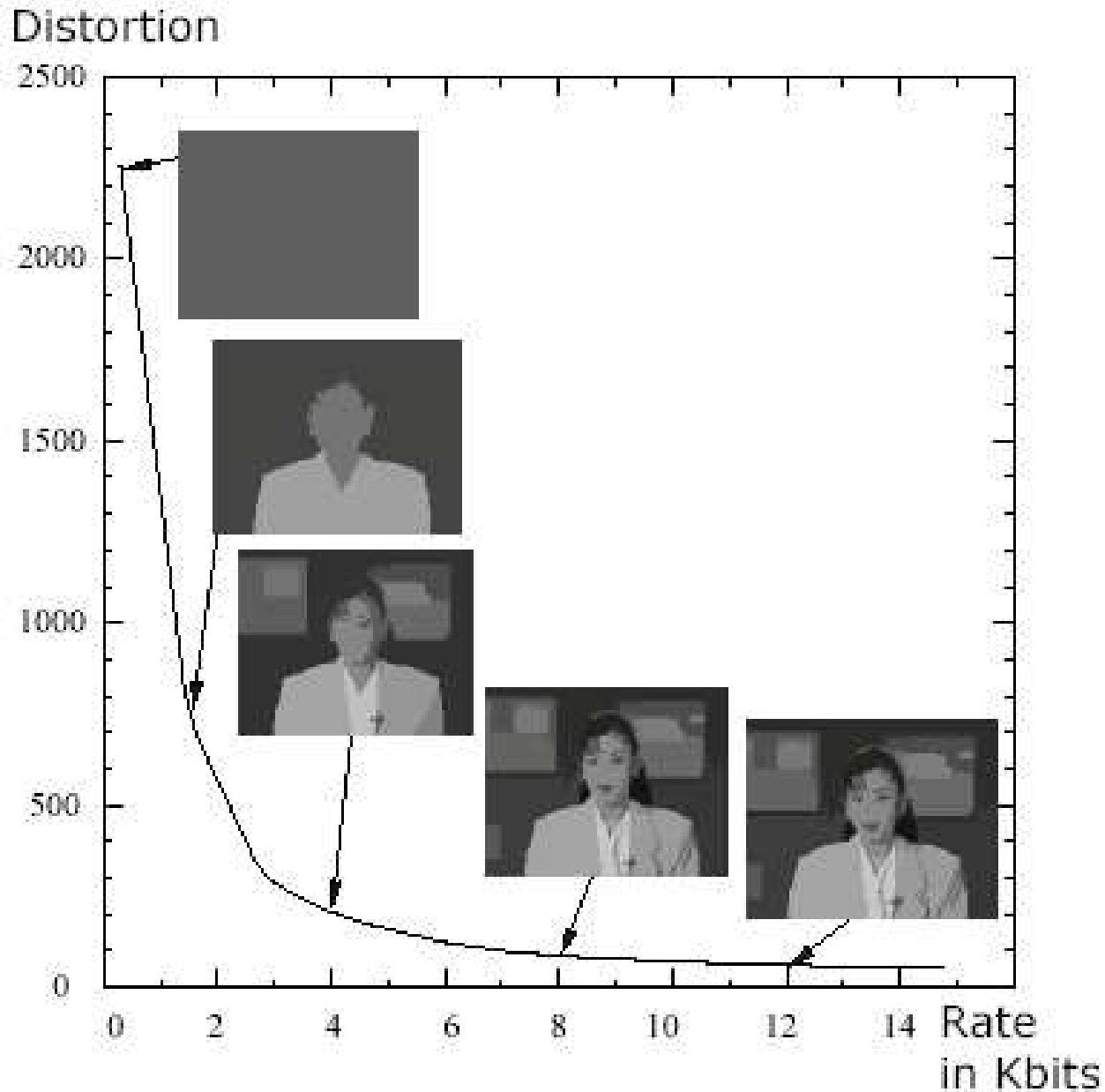
Objects with
translation (2,0)



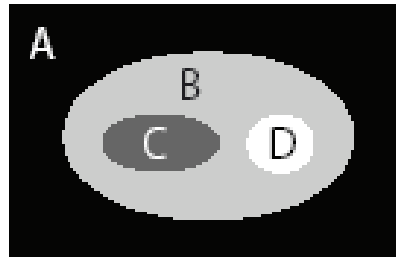
Remaining Objects

Exemples d'application

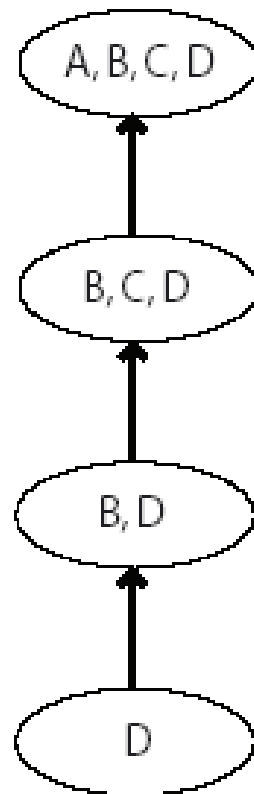
Compression (Salembier, 2000) :



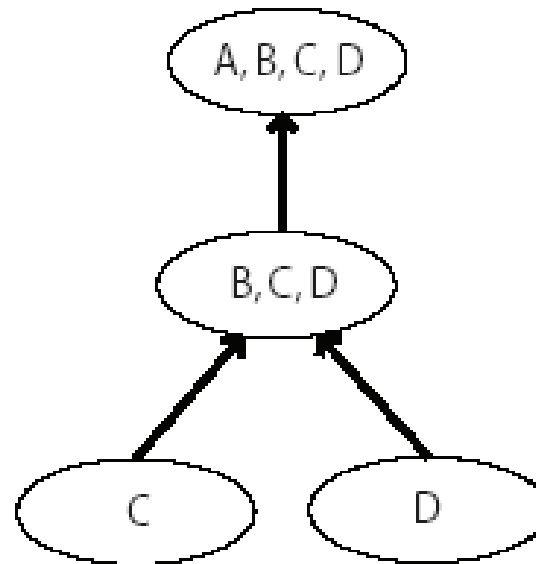
Arbre des formes : vers l'auto-dualité



Original Image



Max-Tree



Tree of Shapes

Arbre des formes : vers l'auto-dualité



Transformation en tout ou rien

Élément structurant : $T = (T_1, T_2)$, avec $T_1 \cap T_2 = \emptyset$

HMT :

$$X \otimes T = E(X, T_1) \cap E(X^C, T_2)$$

Transformation en tout ou rien

Élément structurant : $T = (T_1, T_2)$, avec $T_1 \cap T_2 = \emptyset$

HMT :

$$X \otimes T = E(X, T_1) \cap E(X^C, T_2)$$

Amincissement (si $O \in T_1$) :

$$X \circ T = X \setminus X \otimes T$$

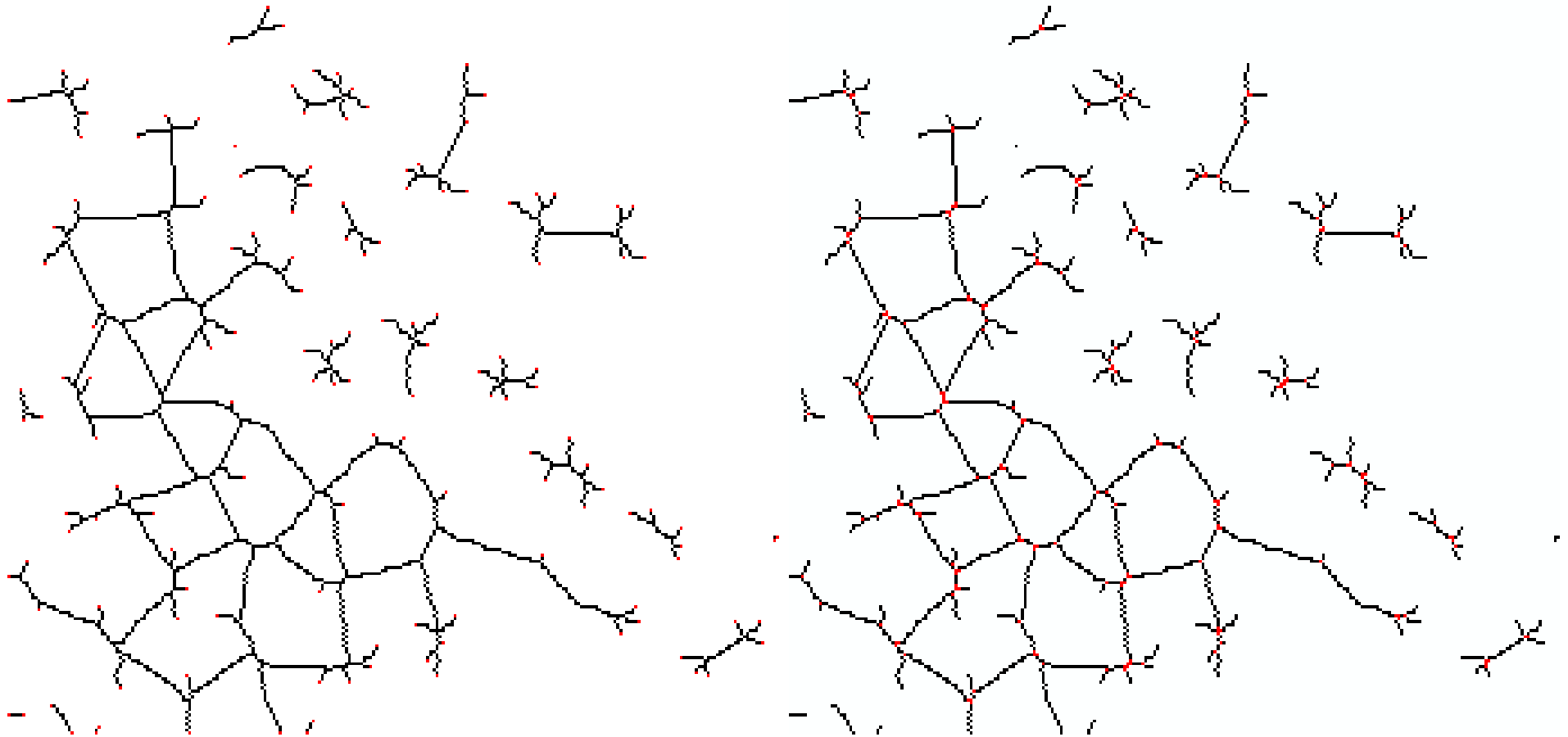
Épaississement (si $O \in T_2$) :

$$X \odot T = X \cup X \otimes T$$

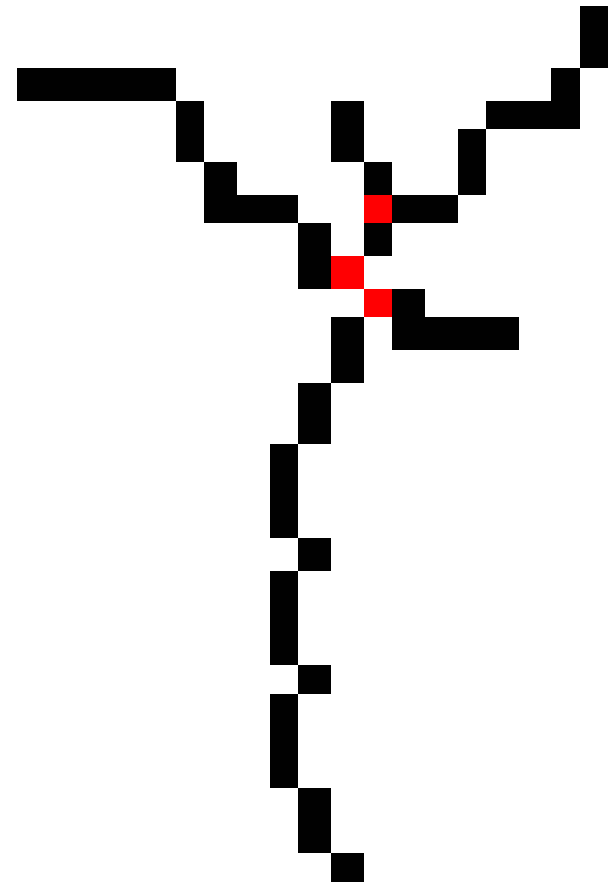
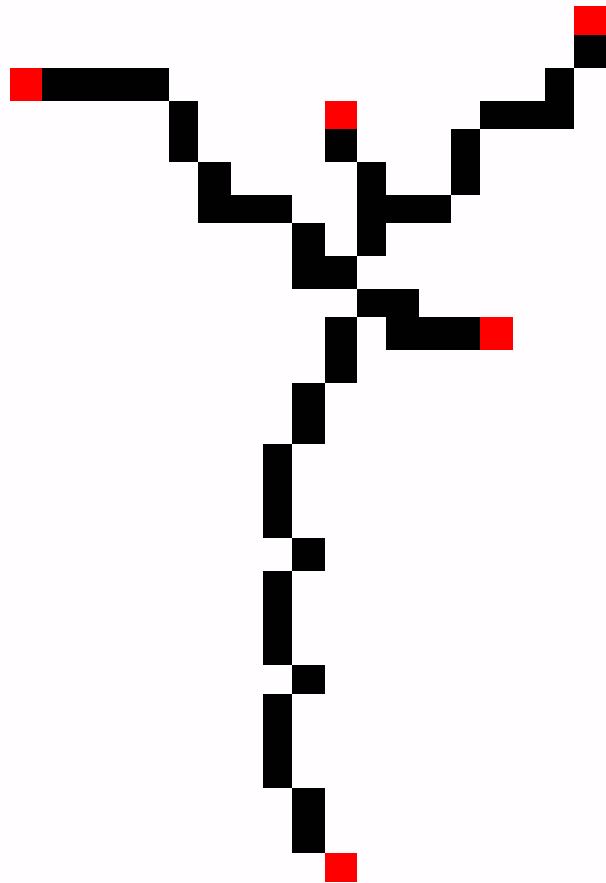
Pour $T' = (T_2, T_1)$:

$$X \circ T = (X^C \odot T')^C$$

Transformation en tout ou rien : exemples



Transformation en tout ou rien : exemples



Squelette : exigences

- représentation compacte des objets
- lignes minces
- inclus et centré dans l'objet
- homotope à l'objet
- bonne représentation de la géométrie
- inversible (reconstruction de l'objet initial)

Squelette : cas continu

A : ensemble ouvert

$s_\rho(A)$ = ensemble des centres des boules maximales de A de rayon ρ

Squelette :

$$r(A) = \bigcup_{\rho > 0} s_\rho(A)$$

Caractérisation :

$$s_\rho(A) = \bigcap_{\mu > 0} [E(A, B_\rho) \setminus [E(A, B_\rho)]_{\bar{B}_\mu}]$$

$$r(A) = \bigcup_{\rho > 0} \bigcap_{\mu > 0} [E(A, B_\rho) \setminus [E(A, B_\rho)]_{\bar{B}_\mu}]$$

Reconstruction :

$$A = \bigcup_{\rho > 0} D(s_\rho, B_\rho)$$

Propriétés du squelette continu

- $s_\rho(E_{\rho_0}(A)) = s_{\rho+\rho_0}(A) \Rightarrow r(E_{\rho_0}(A)) = \cup_{\rho>\rho_0} s_\rho(A)$
- pas de formule générale pour le squelette d'un dilaté, ouvert ou fermé
- $A \mapsto \bar{r}(A)$ est s.c.i. de \mathcal{G} dans \mathcal{F}
- A connexe $\Rightarrow \bar{r}(A)$ connexe
- le squelette est « fin » : son intérieur est vide

Squelette : cas discret

- **Transposition directe** du cas continu :

$$S(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [E(X, B_n) \setminus E(X, B_n)_B]$$

Propriétés :

- centres de boules maximales discrètes
- reconstuction
- mais pas de bonnes propriétés de connexité

Squelette : cas discret

- **Transposition directe** du cas continu :

$$S(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [E(X, B_n) \setminus E(X, B_n)_B]$$

Propriétés :

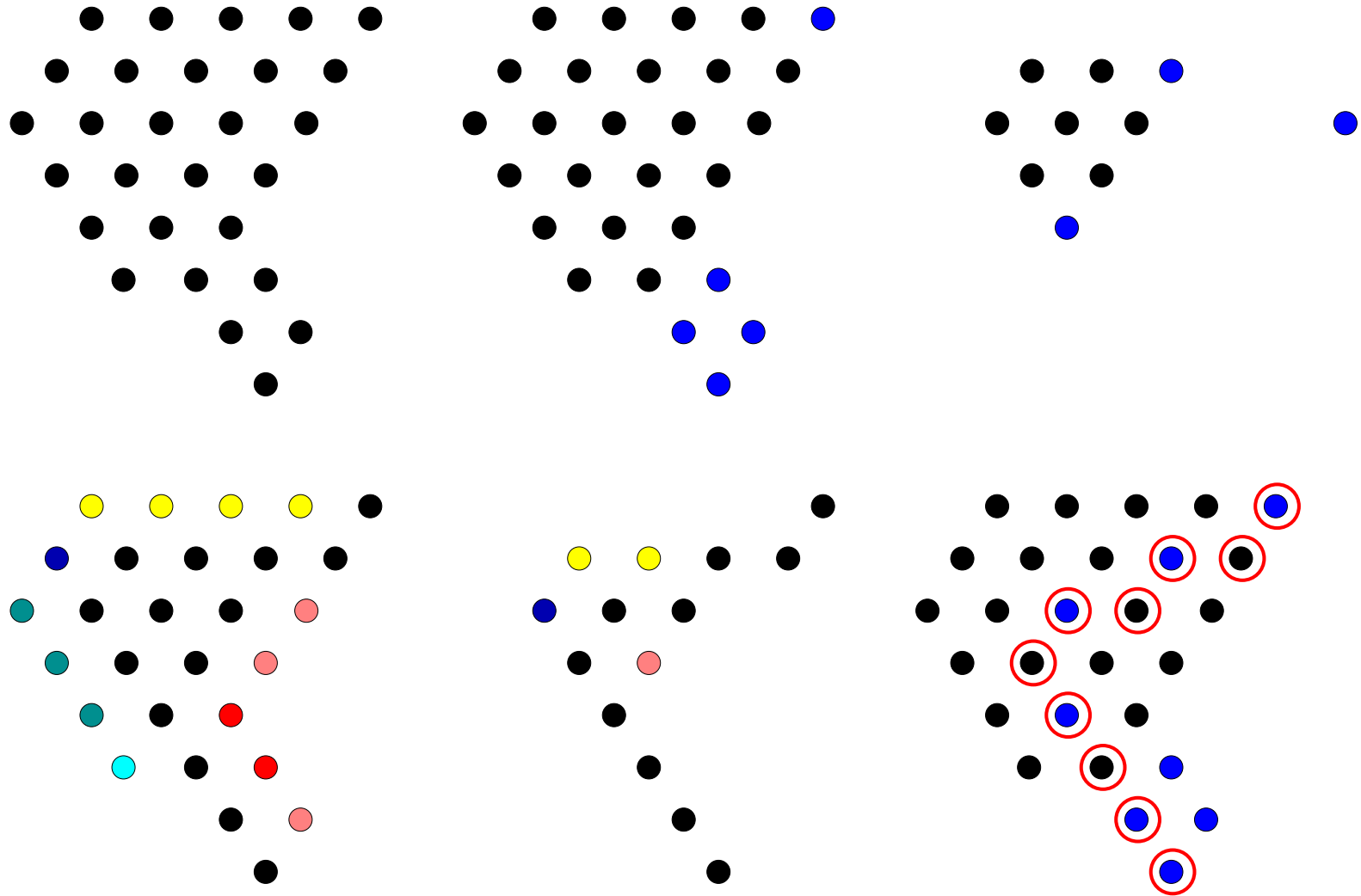
- centres de boules maximales discrètes
 - reconstruction
 - mais pas de bonnes propriétés de connexité
- Squelette par **amincissement homotopique**

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \\ 0 & 0 \end{array}$$

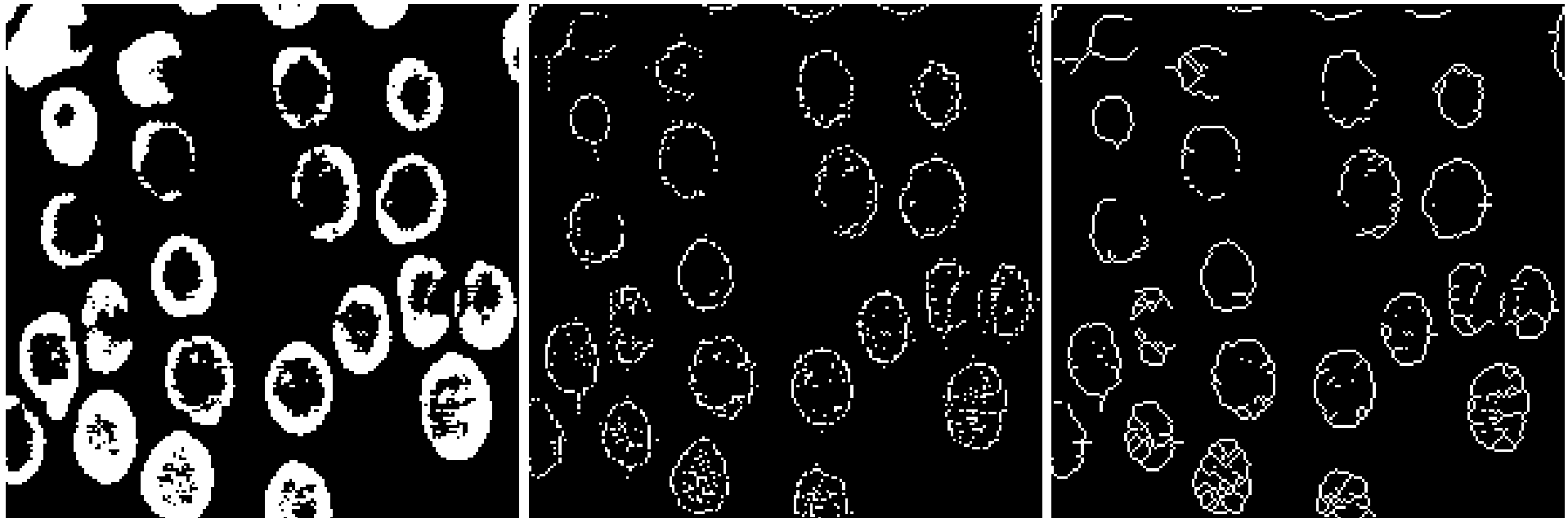
Propriétés :

- topologie parfaite
- pas de possibilité de reconstruction

Centres des boules maximales vs amincissement



Centres des boules maximales vs amincissement



Centres des boules maximales vs amincissement

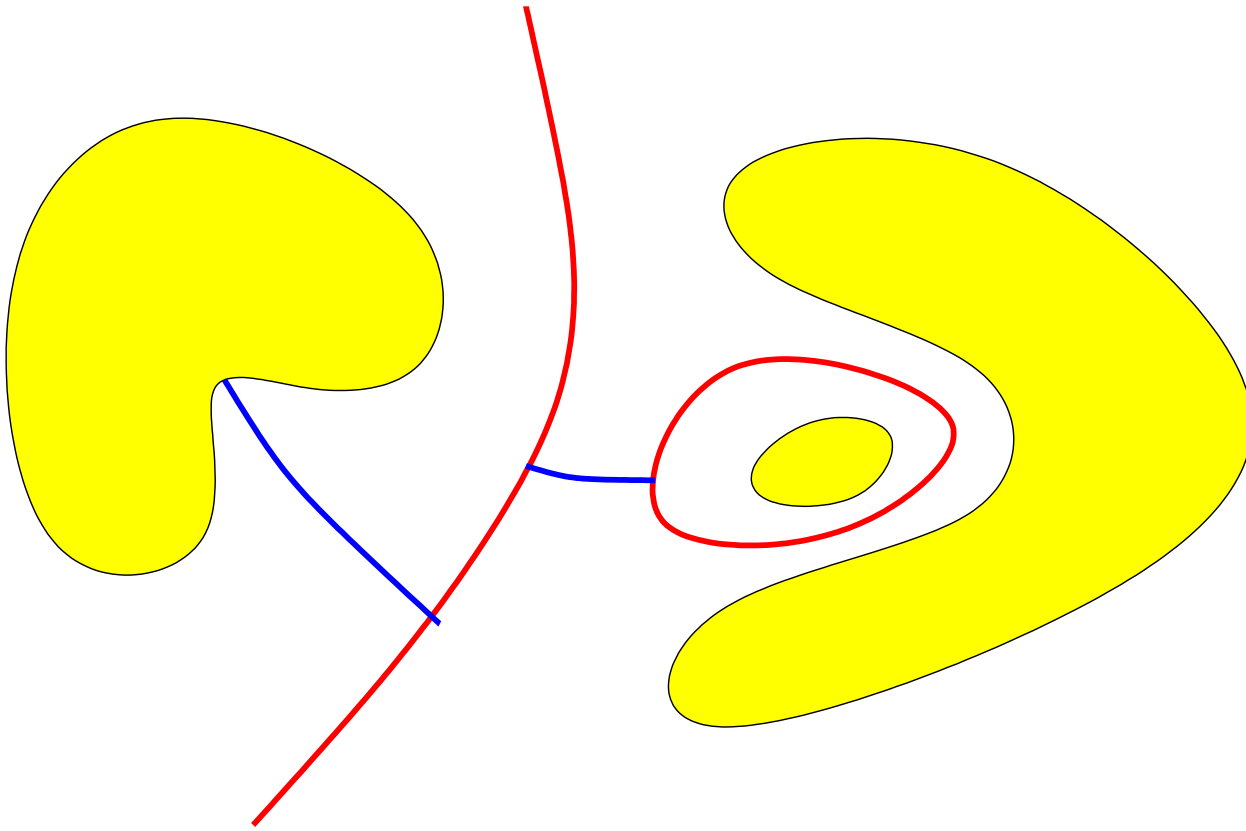
וְחָזְתוּ וְכִי תִמְכְּרוּ מִמְכַר לְעַמִּיתְכֶם
וְנִמִּיתְךָ אַל תֹּנוּ אִישׁ אֶת אַחִיו בְּ
אָחֵר הַיּוֹבֵל תִּקְנֶה מֵאֵת עַמִּיתְךָ
וְכִזְזֹאת יִמְכַר לְךָ לְפִי רֵב הַשָּׁנִים
זוּ וּלְפִי מַעֲטֵי הַשָּׁנִים תִּמְעִיט מִמֶּנּוּ
וְתִזְזֹאת הוּא מְכַר לְךָ וְלֹא אֶתְנוּ
זוּ וִירָאת מֵאֱלֹהֶיךָ כִּי אֲנִי יְהוָה
אֲתָה חִקְתִּי וְאֵת מִשְׁפַּטִּי תִשְׁמֹר
תִּם אַתֶּם וְיִשְׁמַרְתֶּם עַל הָאָרֶץ
וְהָאָרֶץ פְּרִיהָ וְאִכְלֹתֶם לְשִׁבְעָה

Centres des boules maximales vs amincissement

צמחתנו וכו' תמכרו ממכר לעמיתך
צמיתך אל תונו איש את אחיו
אחר היובל תקנה מאת עמיתך
ובואאת ימכר לך לפי רב השנים
ולפי מעט השנים תמעט ממנו
תבואאת הוא מכר לך ול אחת
נו ויראת מאלהיך כי אני יהוה
אם את חקתי ואת משפטי תשומ
תם אתם וישבתם על הארץ
הארץ פריה ואכלתם לשבע

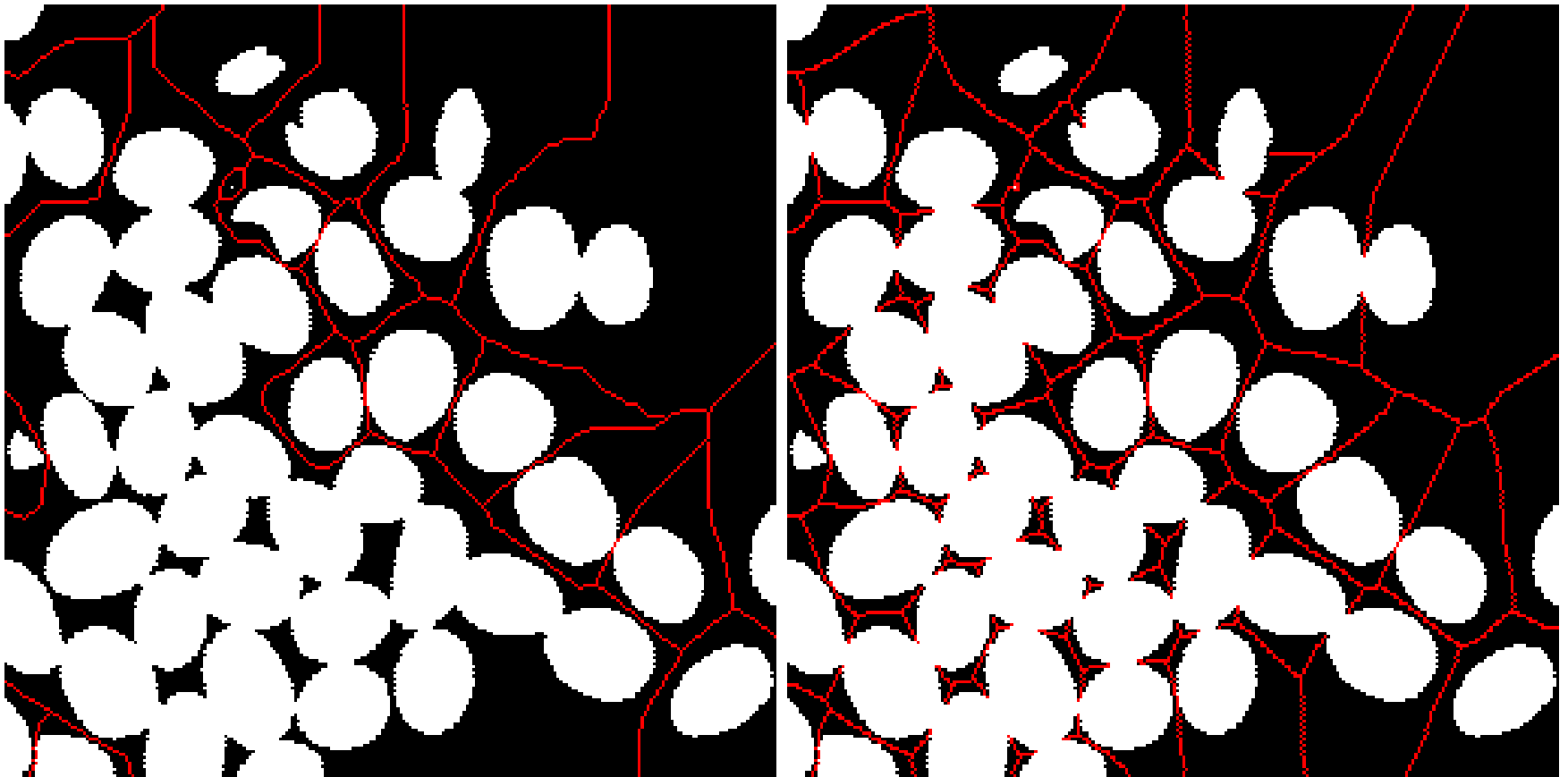
Squelette et squelette par zones d'influence

$$\text{Skiz}(X) \subseteq r(X^C)$$



Squelette et squelette par zones d'influence

$$\text{Skiz}(X) \subseteq r(X^C)$$



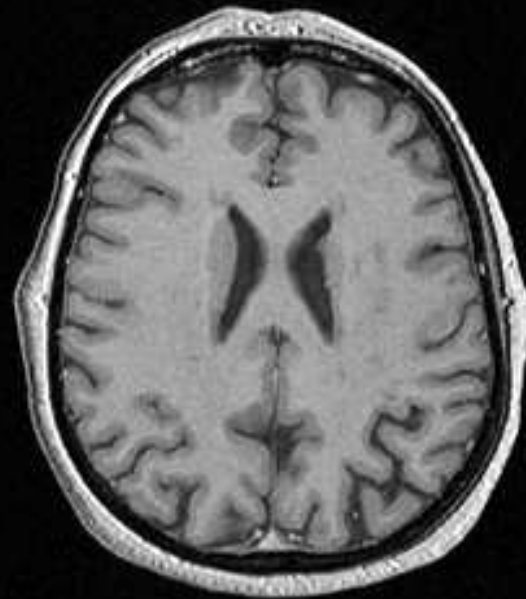
Application en imagerie cérébrale

(thèse de Jean-François Mangin)

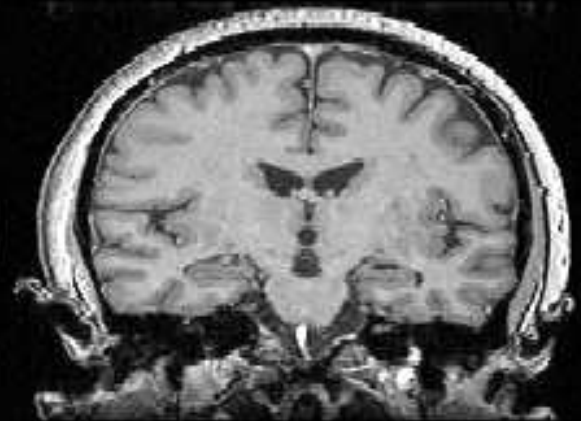
Initial 3-D MR image



SAGITTAL



AXIAL



CORONAL

CEA SHFI ORSAY / TELECOM PARIS

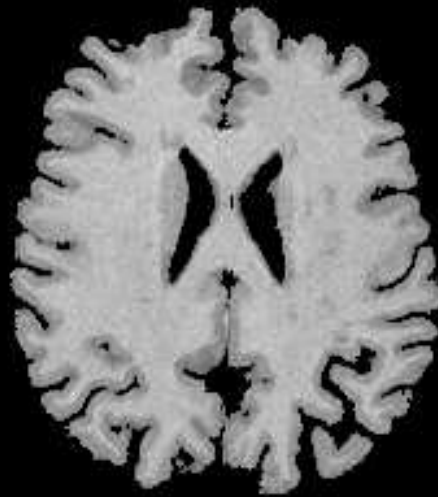
Application en imagerie cérébrale

(thèse de Jean-François Mangin)

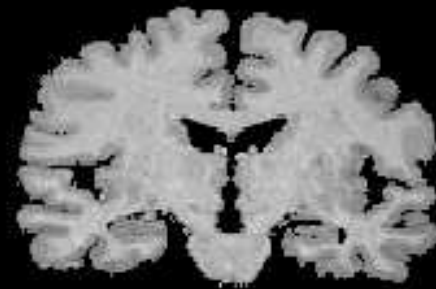
Brain Segmentation using 3-D Mathematical Morphology



SAGITTAL



AXIAL



CORONAL

CEA SHFJ ORSAY / TELECOM PARIS

Application en imagerie cérébrale

(thèse de Jean-François Mangin)

Detection of the “Gray / White” Interface.



SAGITTAL

AXIAL

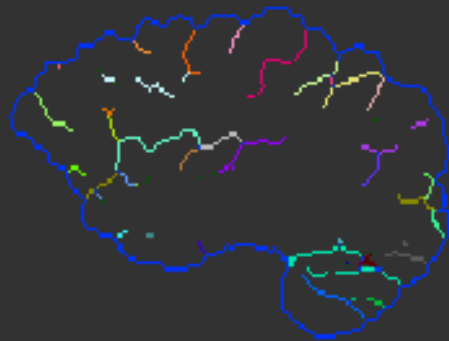
CORONAL

CEA SHFJ ORSAY / TELECOM PARIS

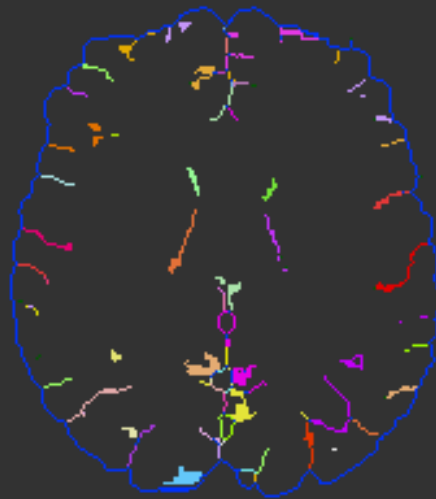
Application en imagerie cérébrale

(thèse de Jean-François Mangin)

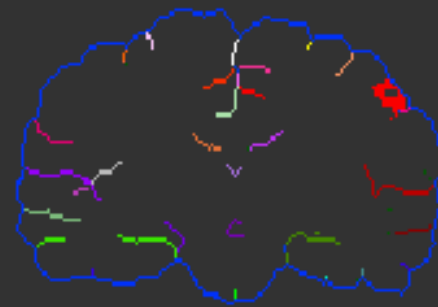
Simple Surfaces of the 3-D Skeleton



SAGITTAL



AXIAL

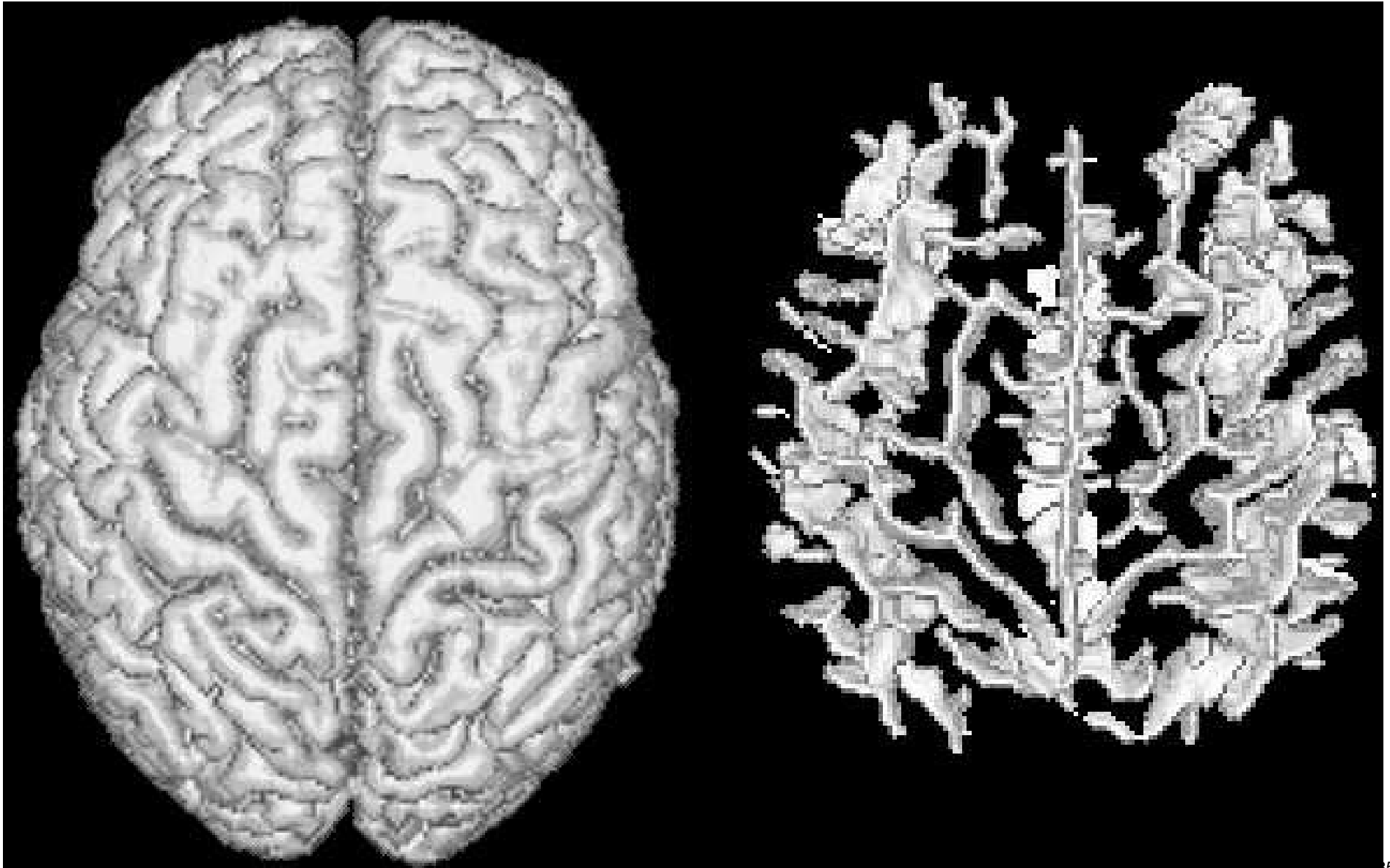


CORONAL

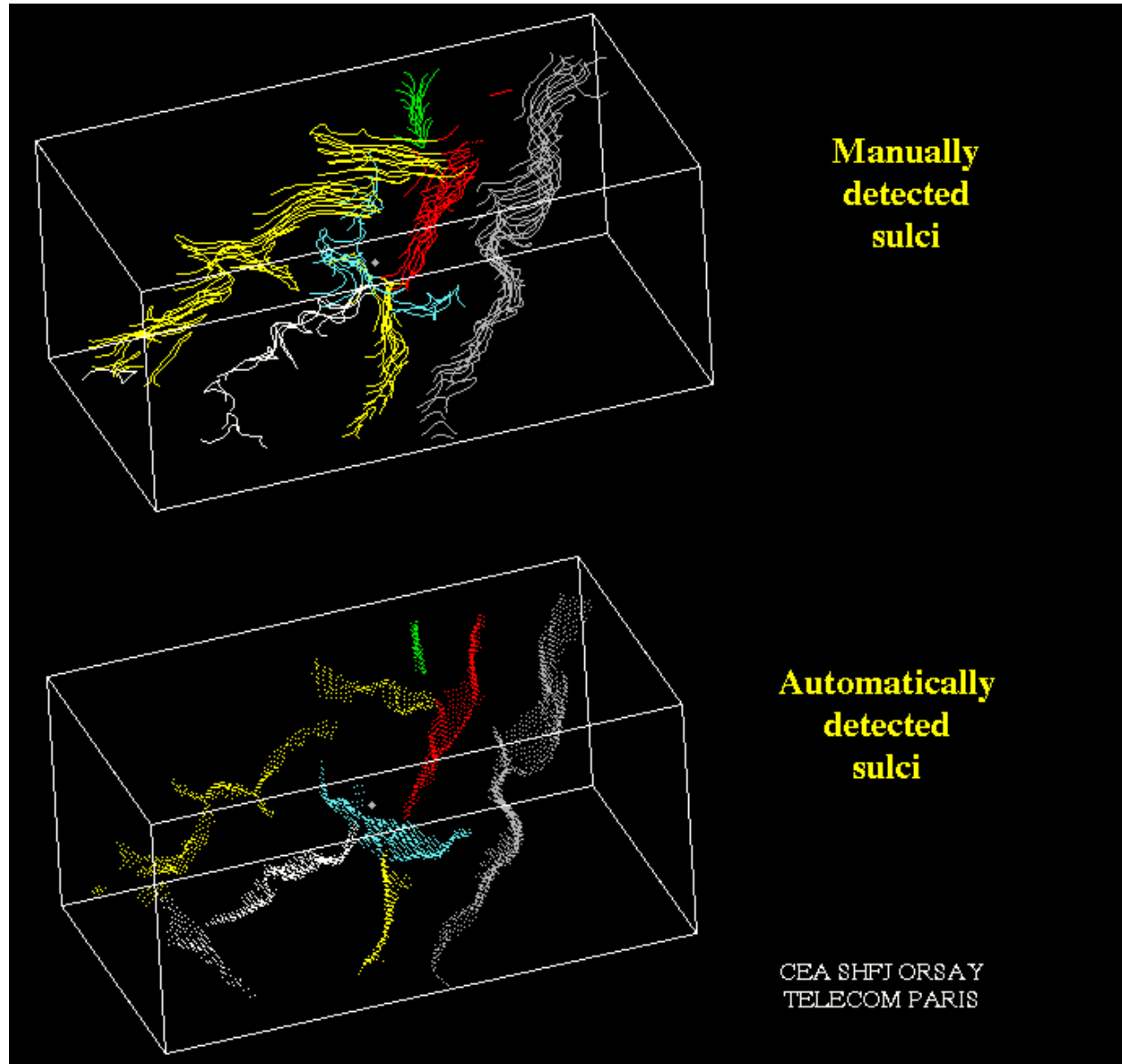
CEA SHFJ ORSAY / TELECOM PARIS

Application en imagerie cérébrale

(thèse de Jean-François Mangin)

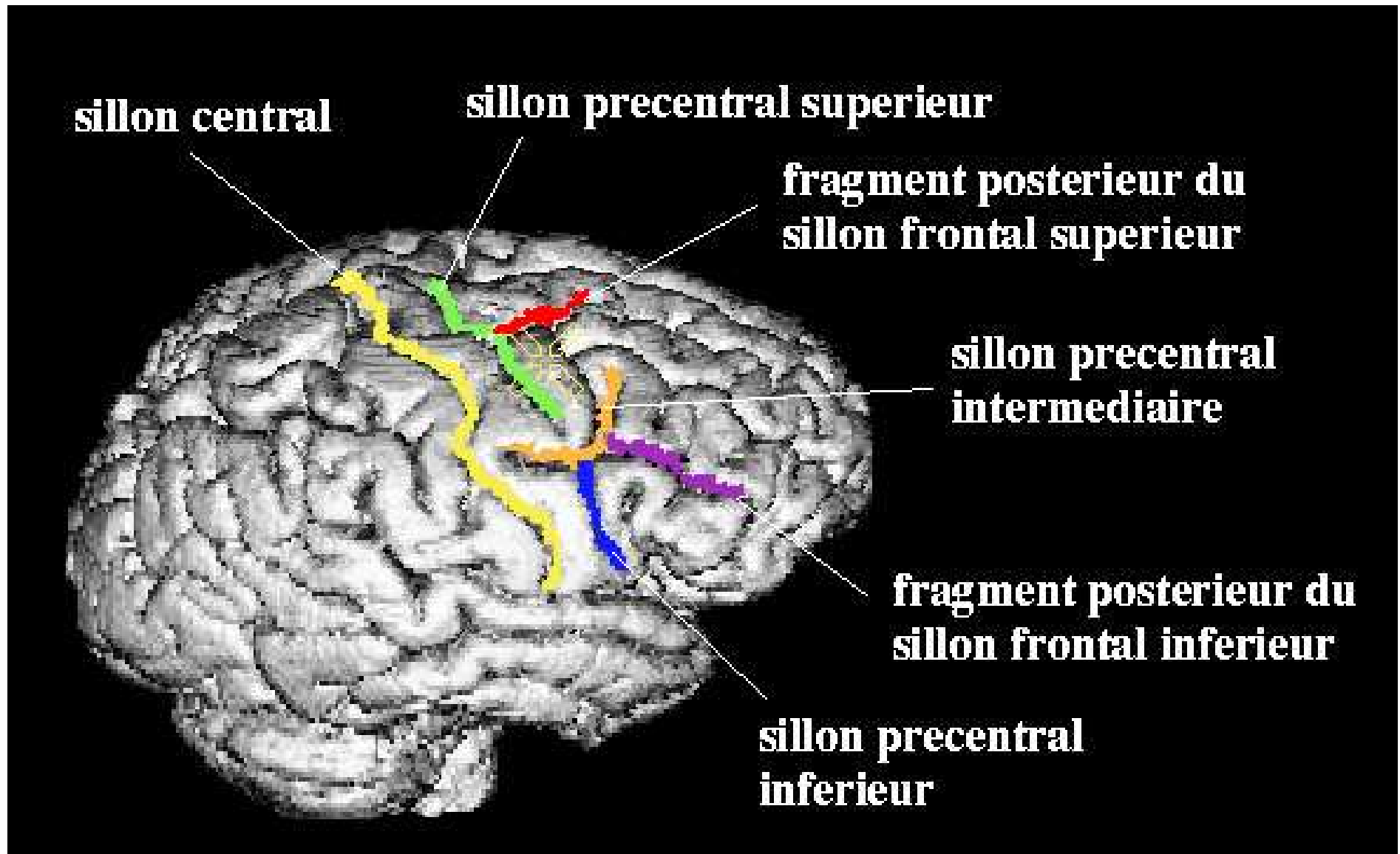


Application en imagerie cérébrale (thèse de Jean-François Mangin)



Application en imagerie cérébrale

(thèse de Jean-François Mangin)



Filtrage et segmentation topologiques

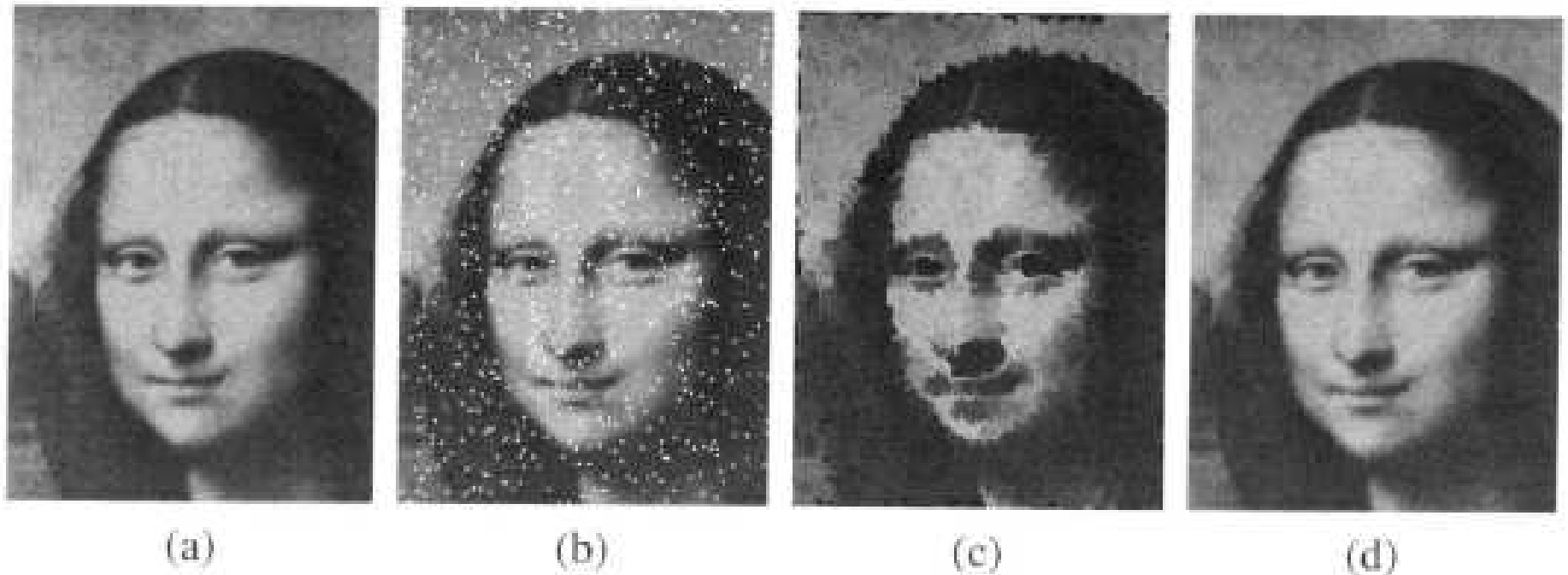


Figure 8.8. *Filtrage topologique. (a) image originale ; (b) image originale plus bruit impulsionnel ; (c) après 3 étapes d'amincissement et abaissement des pics ; (d) reconstruction homotopique de (c) contrainte par (b).*

Source : G. Bertrand, M. Couprie (2007)

Filtrage et segmentation topologiques

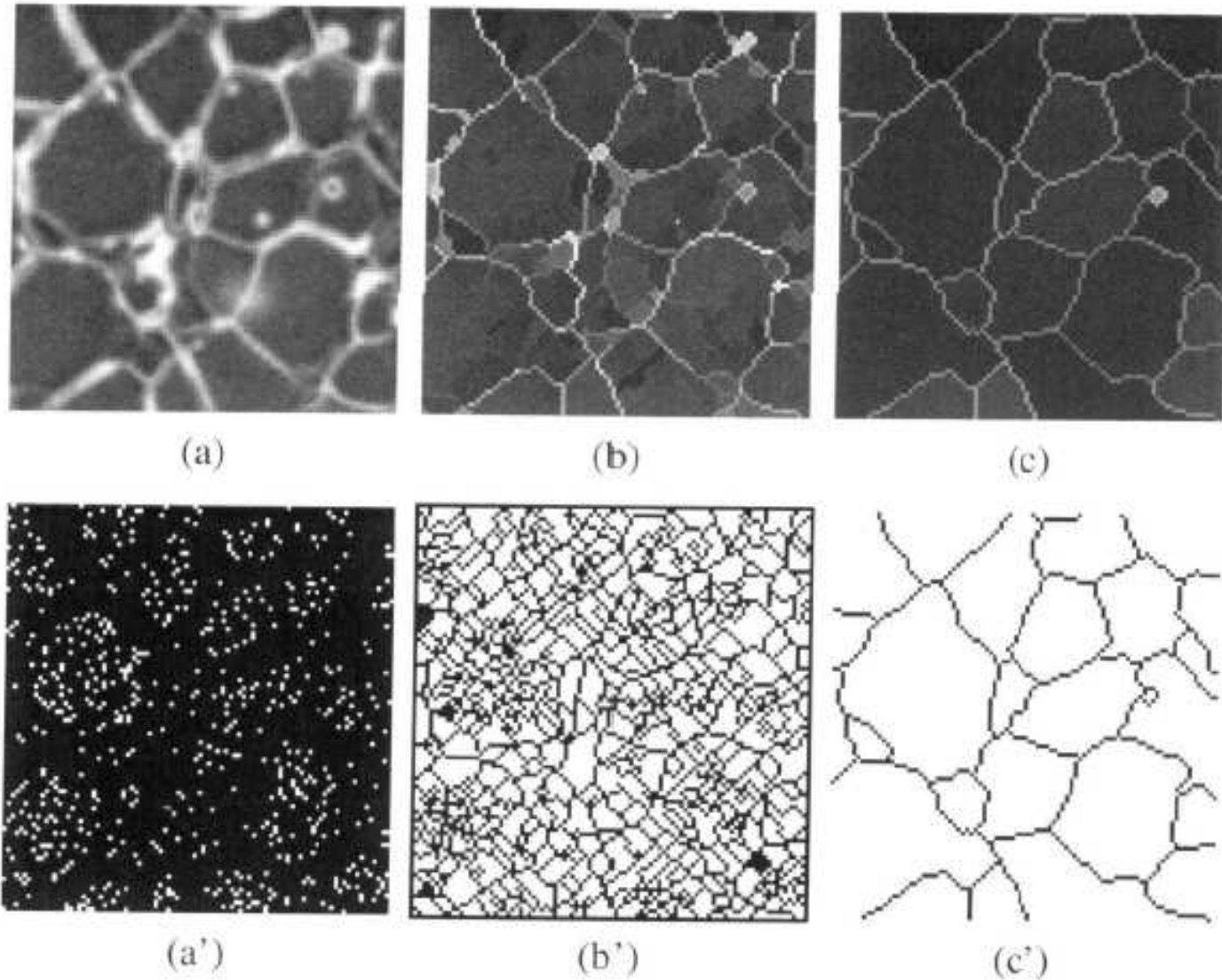


Figure 8.9. *Segmentation topologique.* (a) image originale ; (b) amincissement homotopique ultime ; (c) amincissement filtré ultime avec $\lambda = 40$; (a'), (b'), (c') en blanc, les minima de (a), (b), (c) respectivement.

Filtrage et segmentation topologiques

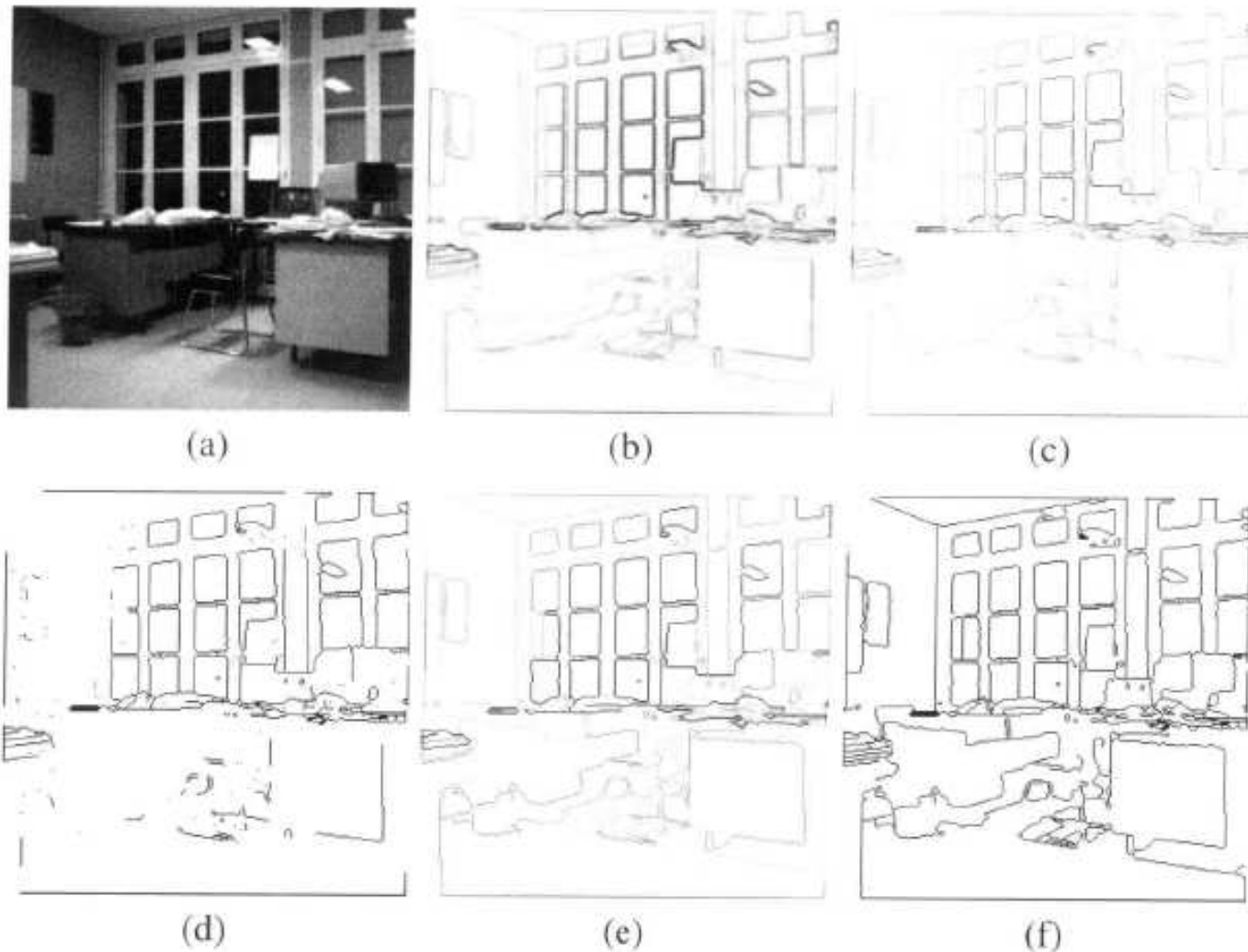
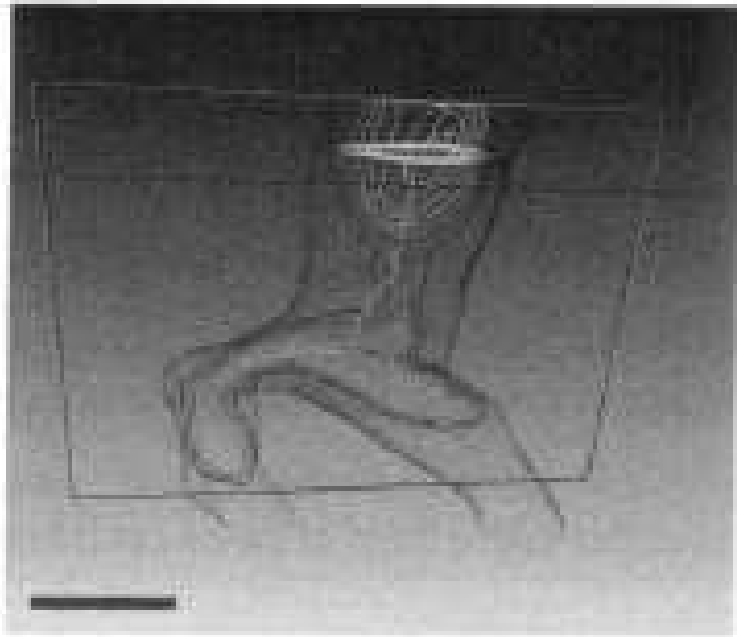


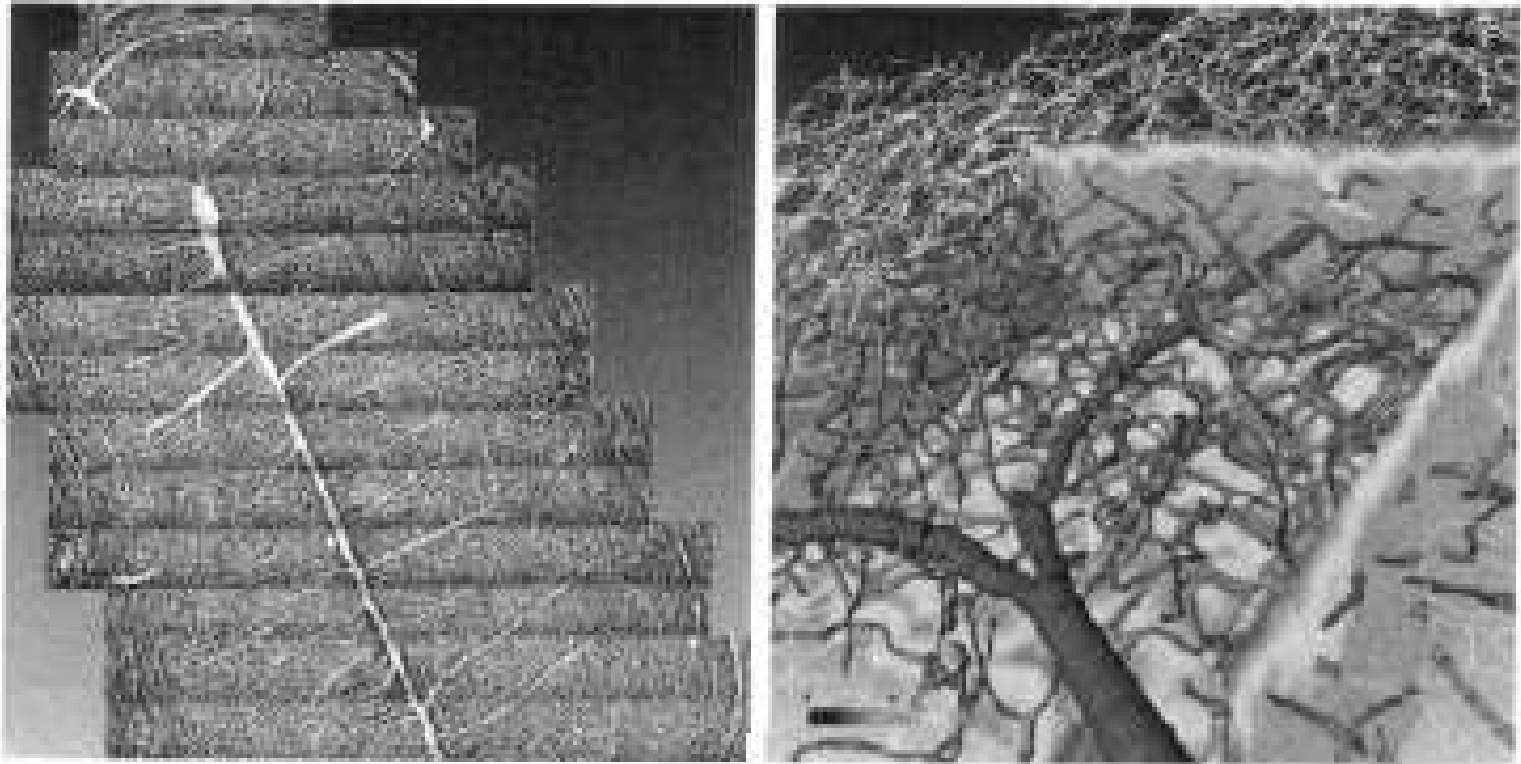
Figure 8.12. *Restauration de crêtes. (a) image originale ; (b) après un opérateur de gradient (les valeurs les plus faibles sont en blanc) ; (c) après un amincissement filtré ; (e) après restauration de crêtes jusqu'à stabilité ; (d,f) seuil de (c,e) respectivement, au même niveau.*

Application : amincissement



Source : G. Malandain (2007)

Application : amincissement



Source : G. Malandain (2007)

Fonction de propagation

$$T_X(x) = \sup_{y \in X} d_X(x, y)$$

Applications :

- extrémités : maxima régionaux de T_X ($\in Fr(X)$ si X simplement connexe)
- centre : $\min(T_X)$ (unique si X simplement connexe)
- calcul de la courbe de plus grande longueur du squelette