

Morphologie mathématique - Fondements théoriques et filtrage

Isabelle Bloch

<http://perso.telecom-paristech.fr/~bloch>

Télécom ParisTech - CNRS LTCI

Paris - France



Fondements mathématiques de la morphologie

mathématique

- Théorie des ensembles
 - relations (\subseteq , \cap , \cup ...)
 - élément structurant
- Topologie
 - topologie en tout ou rien (topologie de Fell)
 - topologie myope
 - distance de Hausdorff
- Théorie des treillis
 - adjonctions
 - opérations algébriques
- Probabilités
 - $P(A \cap K \neq \emptyset)$
 - ensembles fermés aléatoires

Topologie en tout ou rien

- topologie sur les fermés
- engendrée par les \mathcal{F}^K et \mathcal{F}_G (K compact et G ouvert) :

$$\mathcal{F}^K = \{F \in \mathcal{F}, F \cap K = \emptyset\}$$

$$\mathcal{F}_G = \{F \in \mathcal{F}, F \cap G \neq \emptyset\}$$

- convergence dans \mathcal{F} : $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $F \in \mathcal{F}$ si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall G \in \mathcal{G}, G \cap F \neq \emptyset, \exists N, \forall n \geq N, G \cap F_n \neq \emptyset \\ \forall K \in \mathcal{K}, K \cap F = \emptyset, \exists N', \forall n \geq N', K \cap F_n = \emptyset \end{array} \right.$$

Topologie en tout ou rien

- topologie sur les fermés
- engendrée par les \mathcal{F}^K et \mathcal{F}_G (K compact et G ouvert) :

$$\mathcal{F}^K = \{F \in \mathcal{F}, F \cap K = \emptyset\}$$

$$\mathcal{F}_G = \{F \in \mathcal{F}, F \cap G \neq \emptyset\}$$

- convergence dans \mathcal{F} : $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $F \in \mathcal{F}$ si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall G \in \mathcal{G}, G \cap F \neq \emptyset, \exists N, \forall n \geq N, G \cap F_n \neq \emptyset \\ \forall K \in \mathcal{K}, K \cap F = \emptyset, \exists N', \forall n \geq N', K \cap F_n = \emptyset \end{array} \right.$$

La réunion est une opération continue de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ dans \mathcal{F} mais pas l'intersection



semi-continuité

Semi-continuité

$f : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$

- f semi-continue supérieurement (s.c.s.) si $\forall \omega \in \Omega$ et $\forall (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega$ convergeant vers ω :

$$\overline{\lim} f(\omega_n) \subseteq f(\omega)$$

- f semi-continue inférieurement (s.c.i.) si :

$$\underline{\lim} f(\omega_n) \supseteq f(\omega)$$

$\overline{\lim} / \underline{\lim} = \cup / \cap$ des points d'adhérence

f continue ssi f s.c.i. et s.c.s.

L'intersection est s.c.s.

Propriété des opérations morphologiques

- la dilatation d'un fermé par un compact est continue
- la dilatation d'un compact par un compact est continue
- $(F, K) \mapsto E(F, K)$ s.c.s.
- $(K', K) \mapsto E(K', K)$ s.c.s.
- $(F, K) \mapsto F_K$ s.c.s.
- $(K', K) \mapsto K'_K$ s.c.s.
- $(F, K) \mapsto F^K$ s.c.s.
- $(K', K) \mapsto K'^K$ s.c.s.

Topologie myope

- engendrée par la famille :

$$\mathcal{K}_G^F = \{K \in \mathcal{K}, K \cap F = \emptyset, K \cap G \neq \emptyset\}$$

$$(F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G})$$

- plus fine que la topologie induite sur \mathcal{K} par la topologie en tout ou rien
- équivalente sur $\mathcal{K} \setminus \emptyset$ à la topologie induite par la distance de Hausdorff

$$\delta(K, K') = \max\left\{\sup_{x \in K} d(x, K'), \sup_{x' \in K'} d(x', K)\right\}$$

$$\text{Rq : } \delta(K, K') = \inf\{\varepsilon, K \subseteq D(K', B^\varepsilon), K' \subseteq D(K, B^\varepsilon)\}$$

Cadre algébrique : les treillis complets

- Treillis : (\mathcal{T}, \leq) (\leq relation d'ordre) tel que $\forall (x, y) \in \mathcal{T}, \exists x \vee y$ et $\exists x \wedge y$
- Treillis complet : toute famille d'éléments (finie ou non) possède un plus petit majorant et un plus grand minorant
- \Rightarrow contient un plus petit élément 0 et un plus grand élément I :

$$0 = \bigwedge \mathcal{T} = \bigvee \emptyset \text{ et } I = \bigvee \mathcal{T} = \bigwedge \emptyset$$

- Exemples de treillis complets :
 - $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$: treillis complet, booléen (complémenté et distributif) :

$$\forall x, \exists x^C, x \wedge x^C = 0 \text{ et } x \vee x^C = I$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \text{ et } x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

- $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^d), \subseteq)$
- fonctions de \mathbb{R}^n dans $\overline{\mathbb{R}}$ pour la relation d'ordre \leq :

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) \leq g(x)$$

- partitions

Semi-continuité des fonctions

- s.c.s. :

$$\forall t > f(x), \exists V(x), \forall y \in V(x), t > f(y)$$

($V(x)$ voisinage de x dans \mathbb{R}^n)

- s.c.i. :

$$\forall t < f(x), \exists V(x), \forall y \in V(x), t < f(y)$$

- une fonction est s.c.s. si et seulement si son sous-graphe est fermé
- topologie sur l'espace des fonctions s.c.s. = celle induite par la topologie en tout ou rien sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}})$
- l'ensemble des fonctions s.c.s. de \mathbb{R}^n dans $\overline{\mathbb{R}}$ est un treillis complet pour \leq :

$$f \leq g \Leftrightarrow SG(f) \subseteq SG(g)$$

Dilatation et érosion algébriques

treillis complet (\mathcal{T}, \leq)

Dilatation algébrique :

$$\forall (x_i) \in \mathcal{T}, \delta(\bigvee_i x_i) = \bigvee_i \delta(x_i)$$

Erosion algébrique :

$$\forall (x_i) \in \mathcal{T}, \varepsilon(\bigwedge_i x_i) = \bigwedge_i \varepsilon(x_i)$$

Propriétés :

- $\delta(0) = 0$ (dans $\mathcal{P}(E)$, $0 = \emptyset$)
- $\varepsilon(I) = I$ (dans $\mathcal{P}(E)$, $I = E$)
- δ croissante
- ε croissante
- dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $\delta(X) = \bigcup_{x \in X} \delta(\{x\})$

Adjonctions

(ε, δ) adjonction sur (\mathcal{T}, \leq) :

$$\forall(x, y), \delta(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq \varepsilon(y)$$

Propriétés :

- $\delta(0) = 0$ et $\varepsilon(I) = I$
- (ε, δ) adjonction $\Rightarrow \varepsilon =$ érosion algébrique et $\delta =$ dilatation algébrique
- δ croissant = dilatation algébrique ssi $\exists \varepsilon$ tel que (ε, δ) soit une adjonction
 $\Rightarrow \varepsilon =$ érosion algébrique et $\varepsilon(x) = \bigvee \{y \in \mathcal{T}, \delta(y) \leq x\}$
- ε croissant = érosion algébrique ssi $\exists \delta$ tel que (ε, δ) soit une adjonction
 $\Rightarrow \delta =$ dilatation algébrique et $\delta(x) = \bigwedge \{y \in \mathcal{T}, \varepsilon(y) \geq x\}$
- $\varepsilon\delta \geq Id$
- $\delta\varepsilon \leq Id$
- $\varepsilon\delta\varepsilon = \varepsilon$
- $\delta\varepsilon\delta = \delta$
- $\varepsilon\delta\varepsilon\delta = \varepsilon\delta$ et $\delta\varepsilon\delta\varepsilon = \delta\varepsilon$

Liens avec les opérateurs morphologiques

- Sur le treillis des parties de \mathbb{R}^n ou \mathbb{Z}^n , muni de l'inclusion :

$$\delta(X) = \cup_{x \in X} \delta(\{x\})$$

- + **invariance par translation** $\Rightarrow \exists B, \delta(X) = D(X, B)$
- Même résultat sur le treillis des fonctions.
- Résultats similaires pour l'érosion (avec des conventions différentes pour la dualité).

Ouverture et fermeture algébriques

- **Ouverture algébrique** : γ croissante, idempotente et anti-extensive
- **Fermeture algébrique** : φ croissante, idempotente et extensive
- Exemples : $\gamma = \delta\varepsilon$ et $\varphi = \varepsilon\delta$ avec (ε, δ) adjonction
- Domaine d'invariance : $Inv(\varphi) = \{x \in \mathcal{T}, \varphi(x) = x\}$
- γ ouverture $\Rightarrow \gamma(x) = \bigvee \{y \in Inv(\gamma), y \leq x\}$
- φ fermeture $\Rightarrow \varphi(x) = \bigwedge \{y \in Inv(\varphi), x \leq y\}$
- (γ_i) ouvertures $\Rightarrow \bigvee_i \gamma_i$ ouverture
- (φ_i) fermetures $\Rightarrow \bigwedge_i \varphi_i$ fermeture
- γ_1 et γ_2 ouvertures \Rightarrow équivalence entre :
 1. $\gamma_1 \leq \gamma_2$
 2. $\gamma_1\gamma_2 = \gamma_2\gamma_1 = \gamma_1$
 3. $Inv(\gamma_1) \subseteq Inv(\gamma_2)$
- φ_1 et φ_2 fermetures \Rightarrow équivalence entre :
 1. $\varphi_2 \leq \varphi_1$
 2. $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1 = \varphi_1$
 3. $Inv(\varphi_1) \subseteq Inv(\varphi_2)$

Cadre probabiliste

- **Tribu morphologique** : σ_f sur \mathcal{F} engendrée par les \mathcal{F}^K et les \mathcal{F}_G pour tous les compacts K de \mathcal{K} et tous les ouverts G de \mathcal{G} :

$$\mathcal{F}^K = \{F \in \mathcal{F}, K \cap F = \emptyset\}, \quad \mathcal{F}_G = \{F \in \mathcal{F}, G \cap F \neq \emptyset\}$$

(ouverts de la topologie en tout ou rien)

- **Ensemble fermé aléatoire** : $F = (\mathcal{F}, \sigma_f, P)$, déterminé par la donnée d'une probabilité P sur (\mathcal{F}, σ_f)
- **Capacité de Choquet** : fonctionnelle $T : \mathcal{K} \rightarrow [0, 1]$

$$\forall K \in \mathcal{K}, \quad T(K) = P(F \cap K \neq \emptyset)$$

- Exemple : schéma booléen

$$1 - T(K) = P(K \cap F = \emptyset) = e^{-\theta \overline{V(F' \oplus \check{K})}}$$

avec θ densité du processus de Poisson et F' grain primaire

Théorie algébrique des filtres

Filtre = opérateur croissant et idempotent

Exemples

- ouvertures γ et $\bigvee_i \gamma_i$ (filtres anti-extensifs)
- fermetures φ et $\bigwedge_i \varphi_i$ (filtres extensifs)

Théorème de composition de filtres φ et ψ tels que $\varphi \geq \psi$:

- $\varphi \geq \varphi\psi\varphi \geq \varphi\psi \vee \psi\varphi \geq \varphi\psi \wedge \psi\varphi \geq \psi\varphi\psi \geq \psi$
- $\varphi\psi$, $\psi\varphi$, $\varphi\psi\varphi$ et $\psi\varphi\psi$ sont des filtres
- $Inv(\varphi\psi\varphi) = Inv(\varphi\psi)$ et $Inv(\psi\varphi\psi) = Inv(\psi\varphi)$
- $\varphi\psi\varphi$ est le plus petit filtre plus grand que $\varphi\psi \vee \psi\varphi$

Exemple : filtres alternés séquentiels

- ouvertures γ_i et fermetures φ_i telles que :

$$i \leq j \Rightarrow \gamma_j \leq \gamma_i \leq Id \leq \varphi_i \leq \varphi_j$$

- Théorème de composition de filtres $\Rightarrow m_i = \gamma_i \varphi_i$, $n_i = \varphi_i \gamma_i$, $r_i = \varphi_i \gamma_i \varphi_i$ et $s_i = \gamma_i \varphi_i \gamma_i$ sont des filtres
- Filtres alternés séquentiels :

$$M_i = m_i m_{i-1} \dots m_2 m_1$$

$$N_i = n_i n_{i-1} \dots n_2 n_1$$

$$R_i = r_i r_{i-1} \dots r_2 r_1$$

$$S_i = s_i s_{i-1} \dots s_2 s_1$$

- Propriété : $i \leq j \Rightarrow M_j M_i = M_j$, $N_j N_i = N_j$, ...

Filtres alternés séquentiels morphologiques

$$\left(\dots \left(\left(\left(f_{B_1} \right)^{B_1} \right)_{B_2} \right)^{B_2} \right) \dots_{B_n} \right)^{B_n}$$

Filtres alternés séquentiels morphologiques

$$\left(\dots \left(\left(f_{B_1} \right)^{B_1} \right)_{B_2} \right)^{B_2} \dots_{B_n} \right)^{B_n}$$



Filtres alternés séquentiels morphologiques

$$\left(\dots \left(\left(\left(f_{B_1} \right)^{B_1} \right)_{B_2} \right)^{B_2} \right) \dots_{B_n} \right)^{B_n}$$



Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit gaussien



Image originale



Bruit gaussien (variance 20)

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit gaussien



Moyenne 3×3



Moyenne 7×7



Filtre gaussien de variance 0,75



Filtre gaussien de variance 4,08

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit gaussien



Image bruitée



Filtre de Nagao



Médian 3×3



Médian 7×7

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit gaussien



Image bruitée



Filtre alterné séquentiel de taille 1



Filtre alterné séquentiel de taille 2



Filtre alterné séquentiel de taille 3

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit gaussien



Image originale



Bruit gaussien (variance 120)

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit gaussien



Moyenne 3×3



Moyenne 7×7



Filtre gaussien de variance 0,75



Filtre gaussien de variance 4,08

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit gaussien



Image bruitée



Filtre de Nagao



Médian 3×3



Médian 7×7

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit gaussien



Image bruitée



Filtre alterné séquentiel de taille 1



Filtre alterné séquentiel de taille 2



Filtre alterné séquentiel de taille 3

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit impulsionnel



Image originale



Bruit impulsionnel (intensité 2%)

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit impulsionnel



Moyenne 3×3



Moyenne 7×7



Filtre gaussien de variance 0,75



Filtre gaussien de variance 4,08

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit impulsionnel



Image bruitée



Filtre de Nagao



Médian 3×3



Médian 7×7

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit impulsionnel



Image bruitée



Filtre alterné séquentiel de taille 1



Filtre alterné séquentiel de taille 2



Filtre alterné séquentiel de taille 3

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit impulsionnel



Image originale



Bruit impulsionnel (intensité 10%)

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit impulsionnel



Moyenne 3×3



Moyenne 7×7



Filtre gaussien de variance 0,75



Filtre gaussien de variance 4,08

Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit impulsionnel



Image bruitée



Filtre de Nagao



Médian 3×3



Médian 7×7

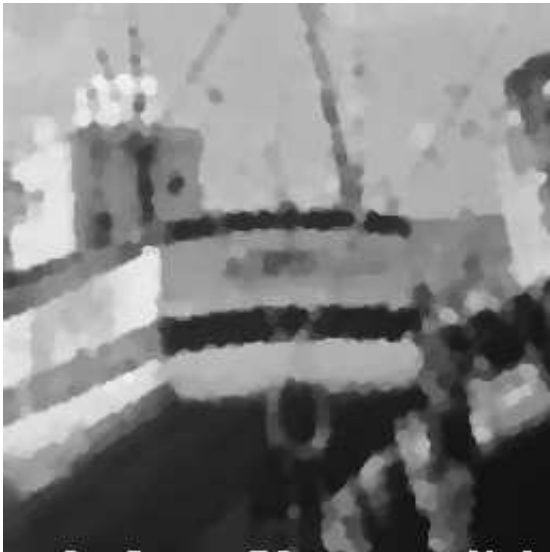
Comparaison de filtres sur une image bruitée par un bruit impulsionnel



Image bruitée



Filtre alterné séquentiel de taille 1



Filtre alterné séquentiel de taille 2



Filtre alterné séquentiel de taille 3

Filtres auto-duaux

- Opérateurs indépendants du contraste local, agissant de la même manière sur les parties sombres et claires.
- Exemple : **centre morphologique**

$$\text{Median}[f(x), \psi_1(f)(x), \psi_2(f)(x)]$$

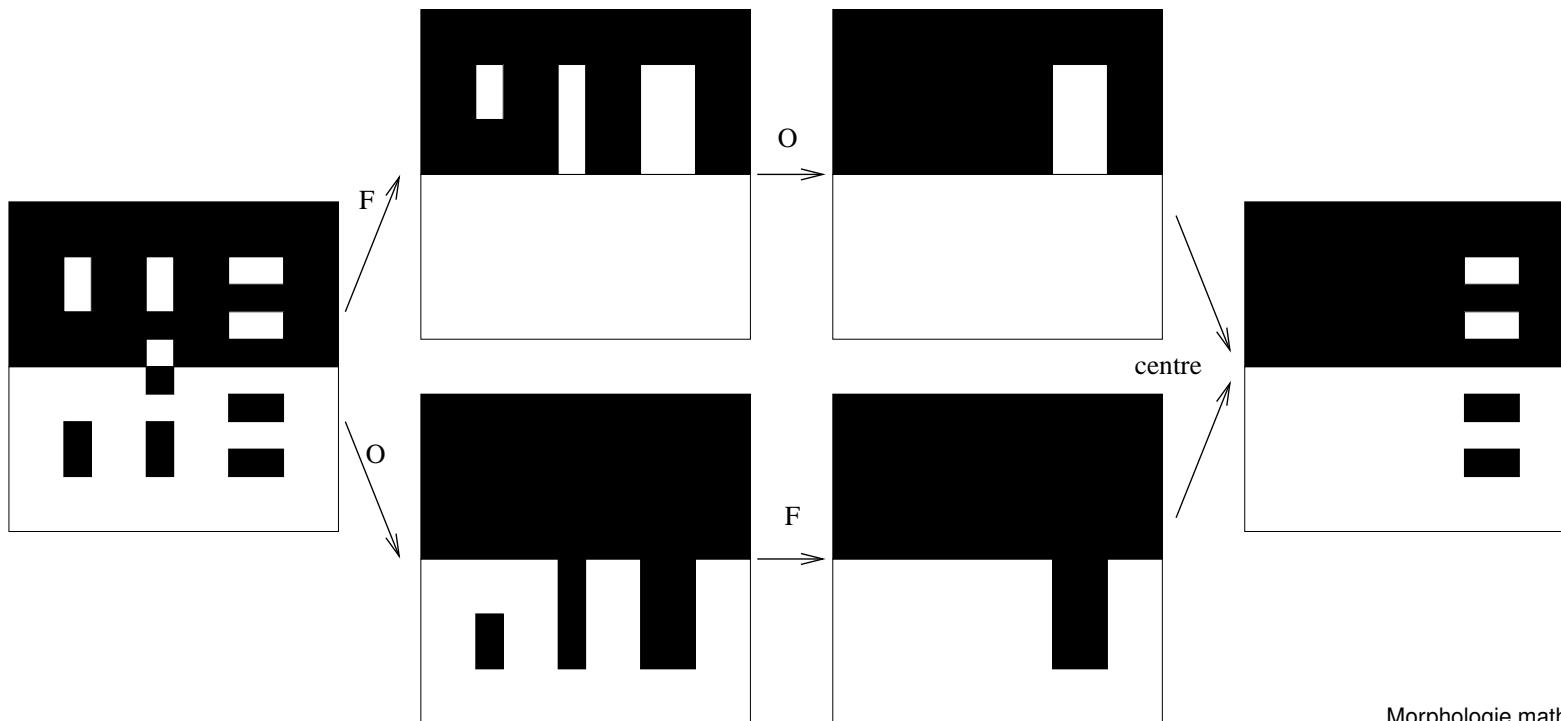
- Plus généralement, pour des opérateurs $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\} : (Id \vee \wedge_i \psi_i) \wedge \vee_i \psi_i$
- Par exemple $\psi_1(f) = \gamma\varphi(f) = (f^B)_B$, $\psi_2 = \varphi\gamma(f) = (f_B)^B$

Filtres auto-duaux

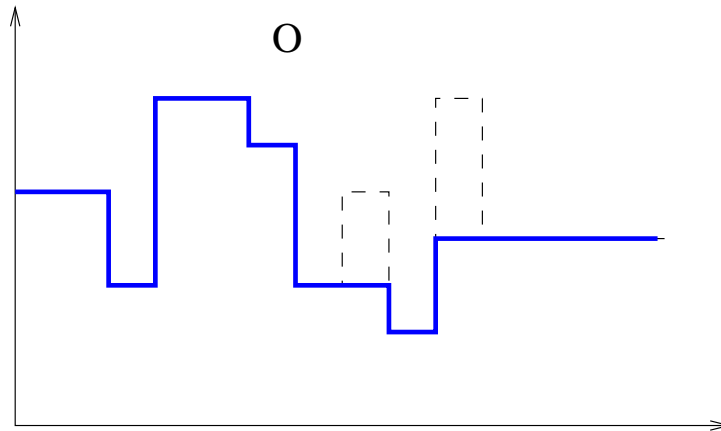
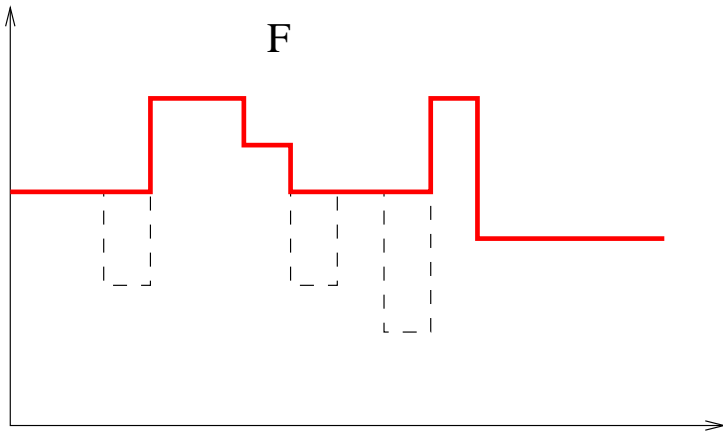
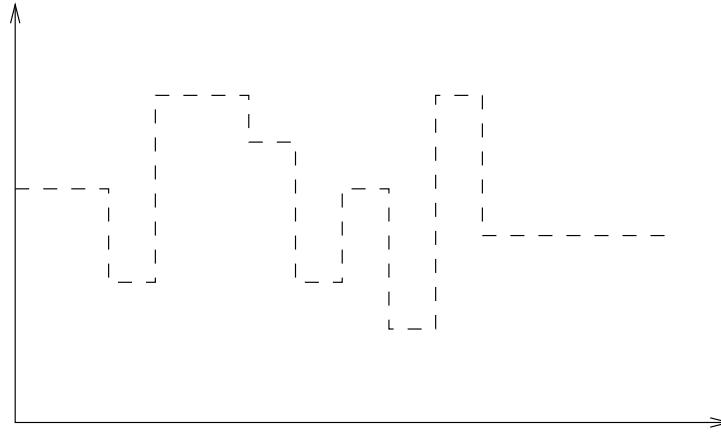
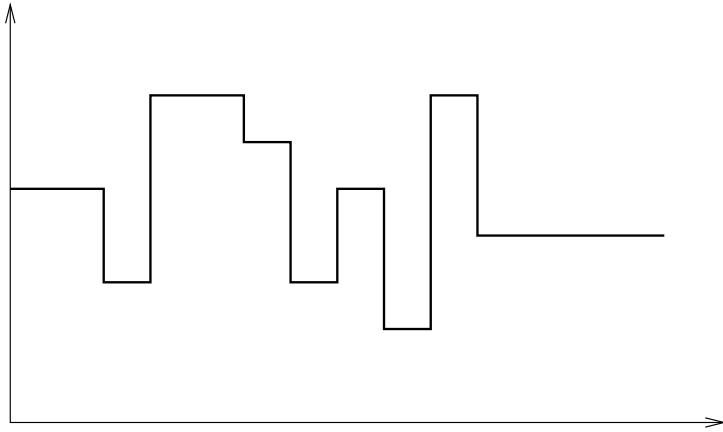
- Opérateurs indépendants du contraste local, agissant de la même manière sur les parties sombres et claires.
- Exemple : **centre morphologique**

$$\text{Median}[f(x), \psi_1(f)(x), \psi_2(f)(x)]$$

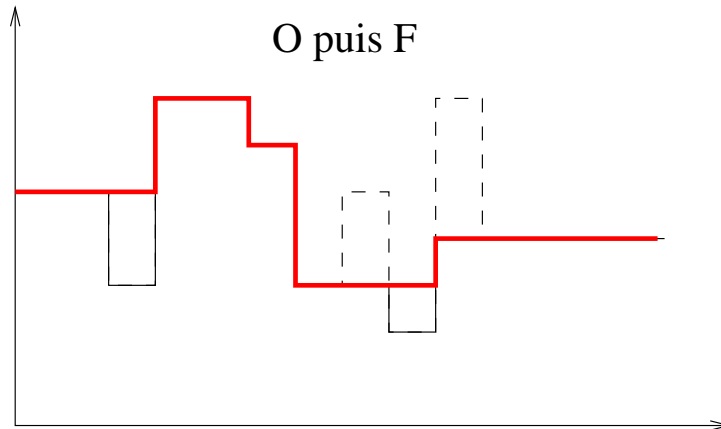
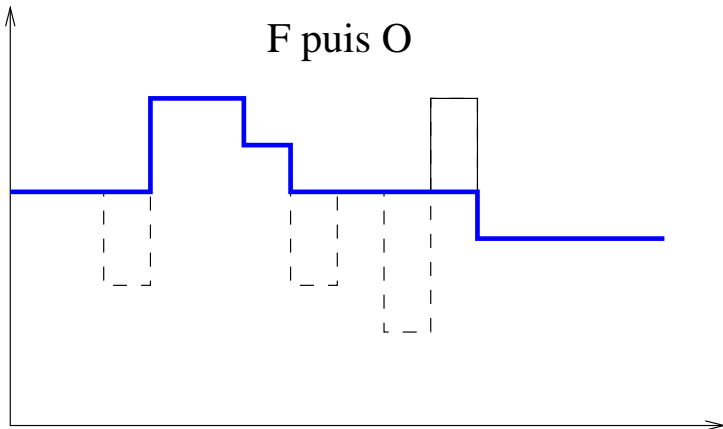
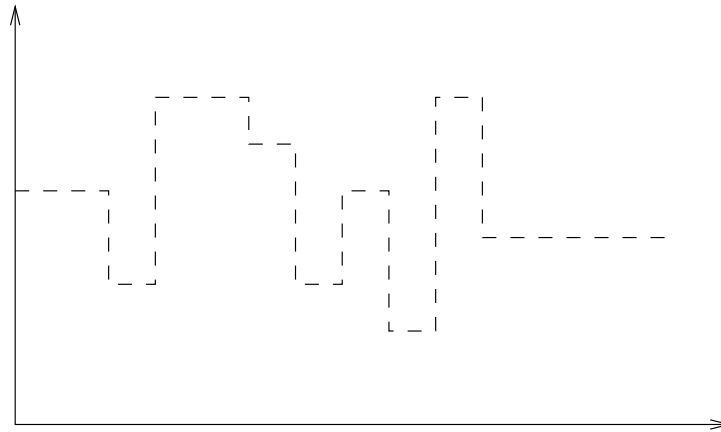
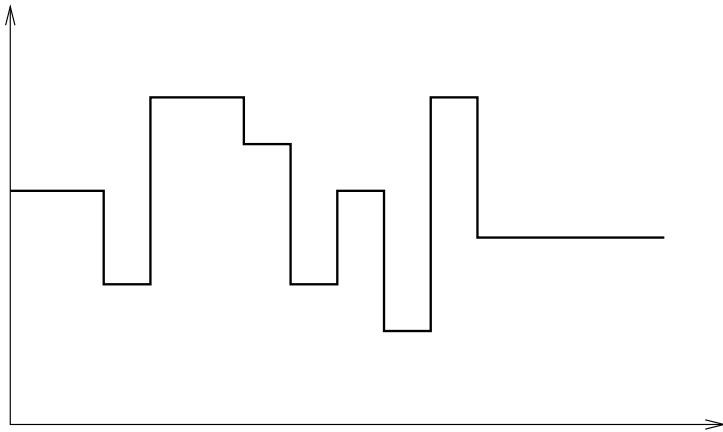
- Plus généralement, pour des opérateurs $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\} : (Id \vee \wedge_i \psi_i) \wedge \vee_i \psi_i$
- Par exemple $\psi_1(f) = \gamma\varphi(f) = (f^B)_B$, $\psi_2 = \varphi\gamma(f) = (f_B)^B$



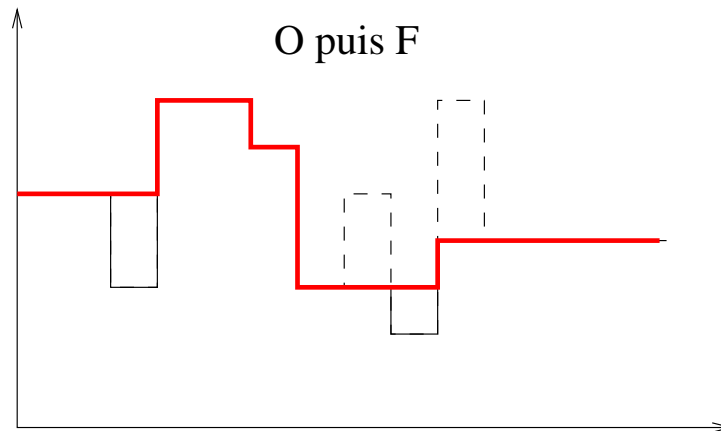
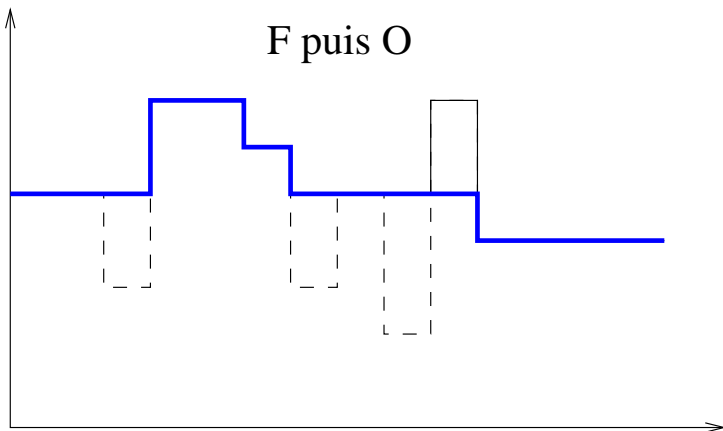
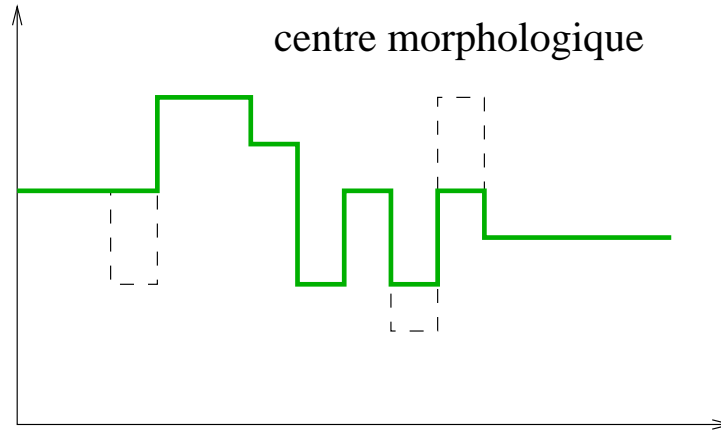
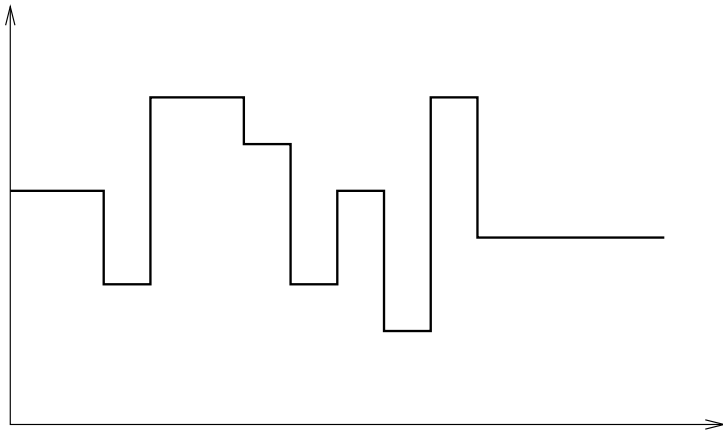
Centre morphologique : exemple numérique



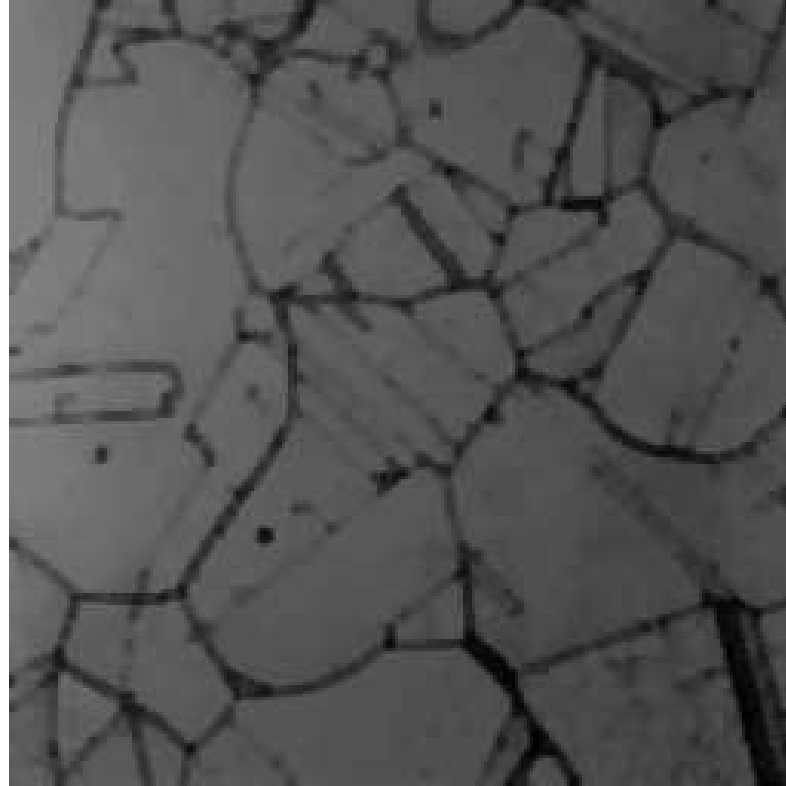
Centre morphologique : exemple numérique



Centre morphologique : exemple numérique



Filtrage par centre morphologique : exemple



Granulométries

- $\forall X \in \mathcal{A}, \forall \lambda > 0, \phi_\lambda(X) \subseteq X$ (ϕ_λ anti-extensive) ;
- $\forall (X, Y) \in \mathcal{A}^2, \forall \lambda > 0, X \subseteq Y \Rightarrow \phi_\lambda(X) \subseteq \phi_\lambda(Y)$ (ϕ_λ croissante) ;
- $\forall X \in \mathcal{A}, \forall \lambda > 0, \forall \mu > 0 \lambda \geq \mu \Rightarrow \phi_\lambda(X) \subseteq \phi_\mu(X)$ (ϕ_λ décroissante par rapport au paramètre) ;
- $\forall \lambda > 0, \forall \mu > 0, \phi_\lambda \circ \phi_\mu = \phi_\mu \circ \phi_\lambda = \phi_{\max(\lambda, \mu)}$.

Granulométries

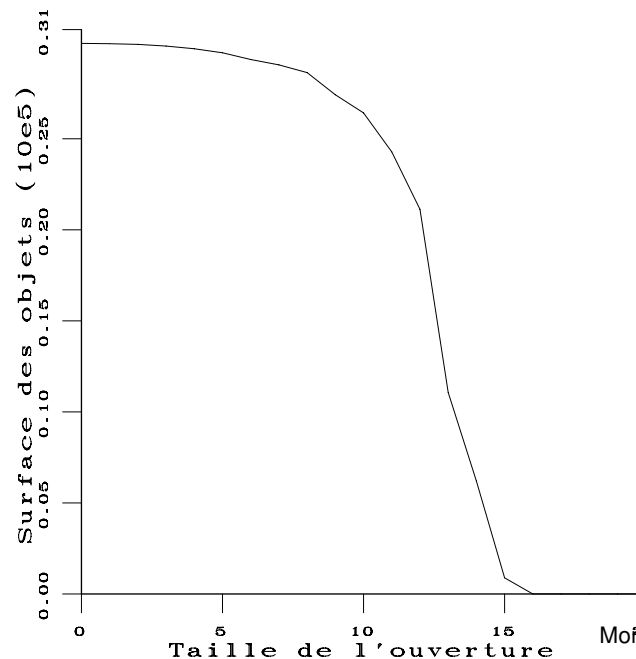
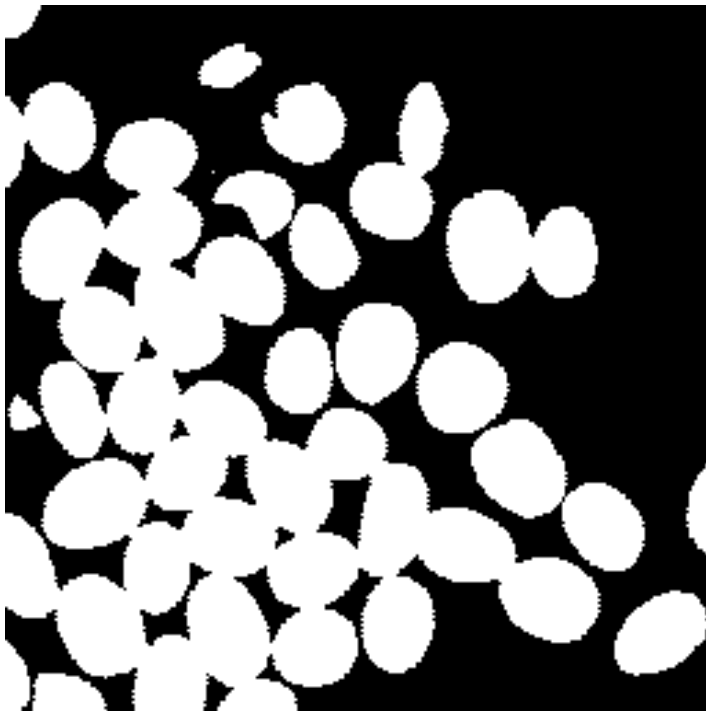
- $\forall X \in \mathcal{A}, \forall \lambda > 0, \phi_\lambda(X) \subseteq X$ (ϕ_λ anti-extensive) ;
- $\forall (X, Y) \in \mathcal{A}^2, \forall \lambda > 0, X \subseteq Y \Rightarrow \phi_\lambda(X) \subseteq \phi_\lambda(Y)$ (ϕ_λ croissante) ;
- $\forall X \in \mathcal{A}, \forall \lambda > 0, \forall \mu > 0 \lambda \geq \mu \Rightarrow \phi_\lambda(X) \subseteq \phi_\mu(X)$ (ϕ_λ décroissante par rapport au paramètre) ;
- $\forall \lambda > 0, \forall \mu > 0, \phi_\lambda \circ \phi_\mu = \phi_\mu \circ \phi_\lambda = \phi_{\max(\lambda, \mu)}$.

(ϕ_λ) est une granulométrie ssi ϕ_λ est une ouverture pour tout λ et la classe des ensembles de \mathcal{A} invariants par ϕ_λ est incluse dans celle des invariants par ϕ_μ pour $\lambda \geq \mu$

Granulométries

- $\forall X \in \mathcal{A}, \forall \lambda > 0, \phi_\lambda(X) \subseteq X$ (ϕ_λ anti-extensive) ;
- $\forall (X, Y) \in \mathcal{A}^2, \forall \lambda > 0, X \subseteq Y \Rightarrow \phi_\lambda(X) \subseteq \phi_\lambda(Y)$ (ϕ_λ croissante) ;
- $\forall X \in \mathcal{A}, \forall \lambda > 0, \forall \mu > 0 \lambda \geq \mu \Rightarrow \phi_\lambda(X) \subseteq \phi_\mu(X)$ (ϕ_λ décroissante par rapport au paramètre) ;
- $\forall \lambda > 0, \forall \mu > 0, \phi_\lambda \circ \phi_\mu = \phi_\mu \circ \phi_\lambda = \phi_{\max(\lambda, \mu)}$.

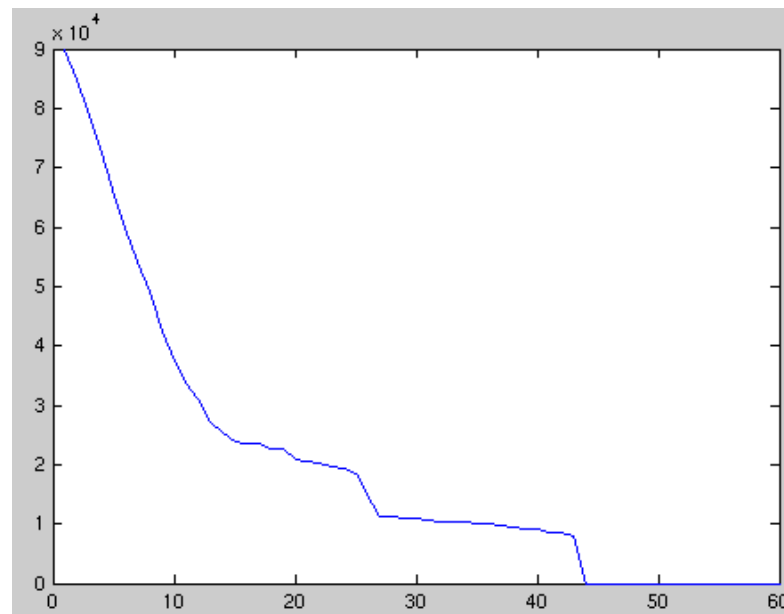
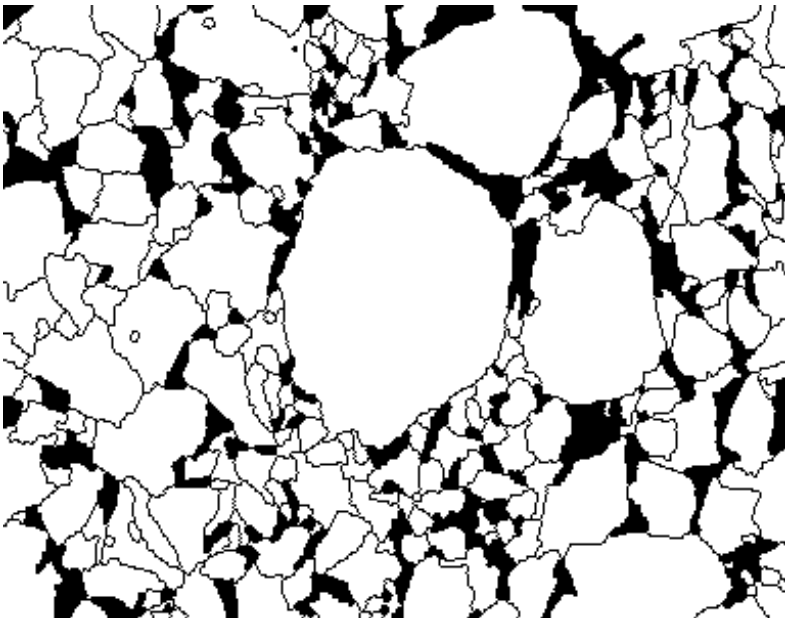
(ϕ_λ) est une granulométrie ssi ϕ_λ est une ouverture pour tout λ et la classe des ensembles de \mathcal{A} invariants par ϕ_λ est incluse dans celle des invariants par ϕ_μ pour $\lambda \geq \mu$



Granulométries

- $\forall X \in \mathcal{A}, \forall \lambda > 0, \phi_\lambda(X) \subseteq X$ (ϕ_λ anti-extensive) ;
- $\forall (X, Y) \in \mathcal{A}^2, \forall \lambda > 0, X \subseteq Y \Rightarrow \phi_\lambda(X) \subseteq \phi_\lambda(Y)$ (ϕ_λ croissante) ;
- $\forall X \in \mathcal{A}, \forall \lambda > 0, \forall \mu > 0 \lambda \geq \mu \Rightarrow \phi_\lambda(X) \subseteq \phi_\mu(X)$ (ϕ_λ décroissante par rapport au paramètre) ;
- $\forall \lambda > 0, \forall \mu > 0, \phi_\lambda \circ \phi_\mu = \phi_\mu \circ \phi_\lambda = \phi_{\max(\lambda, \mu)}$.

(ϕ_λ) est une granulométrie ssi ϕ_λ est une ouverture pour tout λ et la classe des ensembles de \mathcal{A} invariants par ϕ_λ est incluse dans celle des invariants par ϕ_μ pour $\lambda \geq \mu$



source de l'image : <http://www.mamba-image.org/examples.html>