



*Morphologie mathématique 1*

RDMM - MR2 IMA UPMC P6

*Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI*

# Morphologie Mathématique : Chapitre 1

## *LES QUATRE OPERATIONS ET LEURS APPLICATIONS IMMEDIATES*

I Introduction : *approche morphologique du TI*

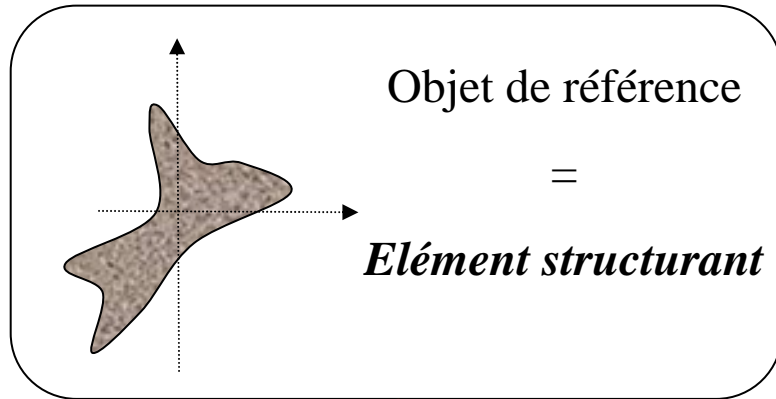
II Opérateurs de base : *Dilatation et Erosion*

- (a) Opérations ensemblistes
- (b) Algorithmes
- (c) Opérations fonctionnelles
- (d) Premiers opérateurs composés

III Filtres de base : *Ouverture et Fermeture*

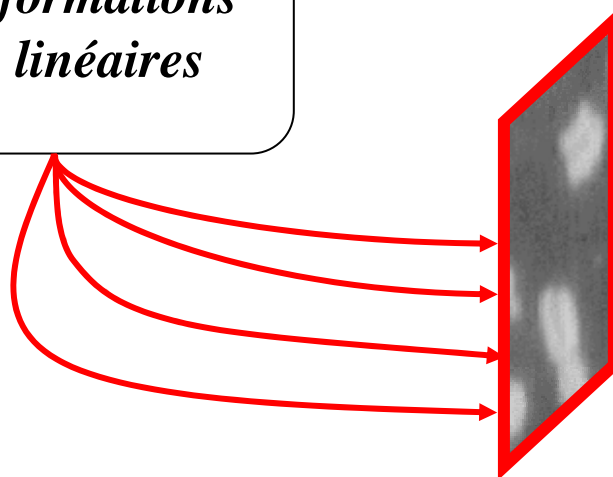
- (a) Définition et propriétés
- (b) Seconds opérateurs composés

# L'approche morphologique du traitement d'images



Le principe de base de l'analyse morphologique est d'extraire de la connaissance de l'image à partir des réponses fournies à différents tests (transformations).

*Transformations  
non linéaires*

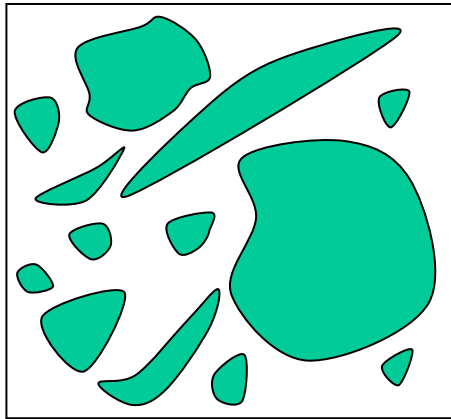


Critères de :

- ✓ *taille*
- ✓ *forme*
- ✓ *orientation*
- ✓ *connexité*
- ✓ *.../...*

# L'approche morphologique du traitement d'images

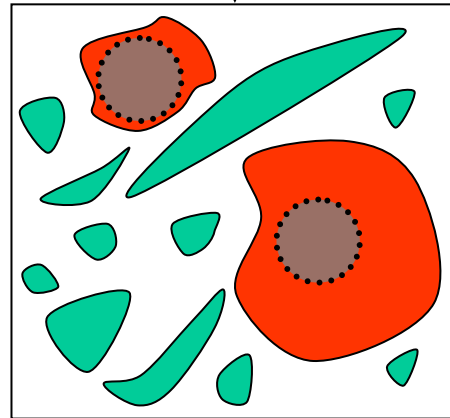
*Exemple :*



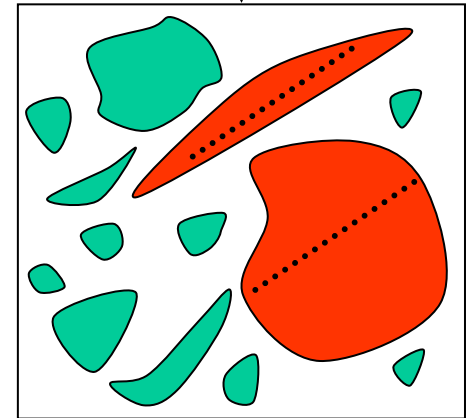
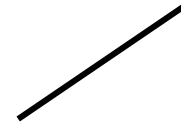
Elément  
structurant 1



Test : « contient »



Elément  
structurant 2

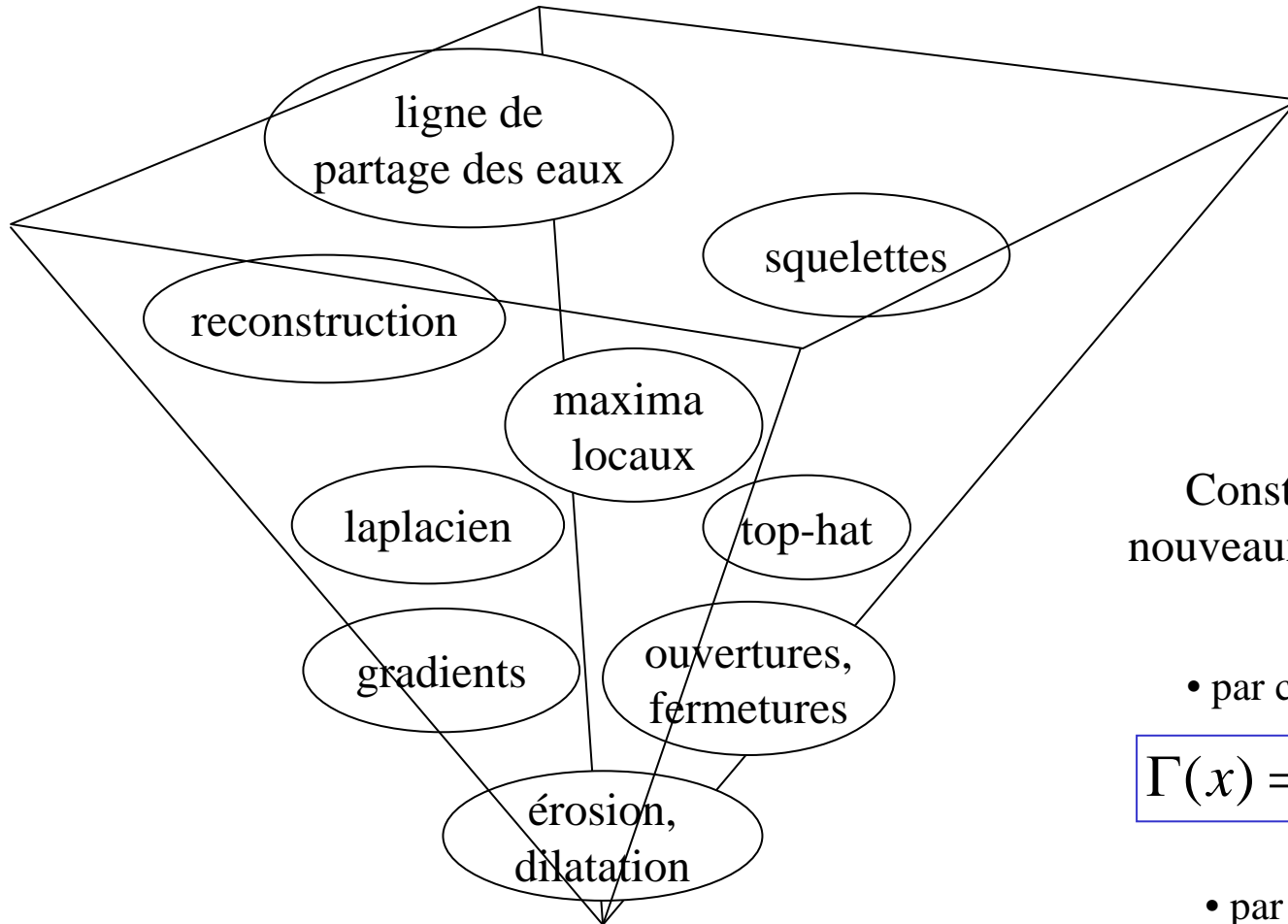


Taille, forme, orientation,...

Analyse quantitative, spatiale,...

# Construction des opérateurs de la morphologie mathématique

↑  
complexité,  
richesse des  
propriétés



Construction de  
nouveaux opérateurs :

- par composition

$$\Gamma(x) = \Phi(\Psi(x))$$

- par différence

$$\Lambda(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$$

# Opérations de Minkowski dans $\mathbf{R}^n$

## Définitions préliminaires

On se place ici dans  $E$  : l'ensemble des parties de  $\mathbf{R}^n$

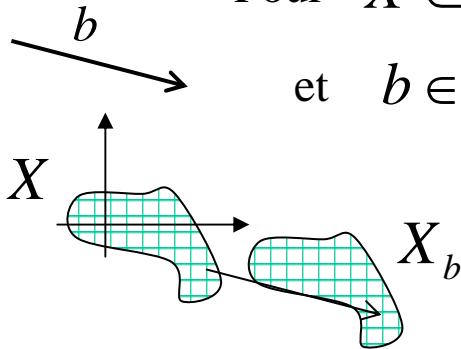
Pour  $X \subset \mathbf{R}^n$

et  $b \in \mathbf{R}^n$

on note

$$X_b = \{x + b; x \in X\}$$

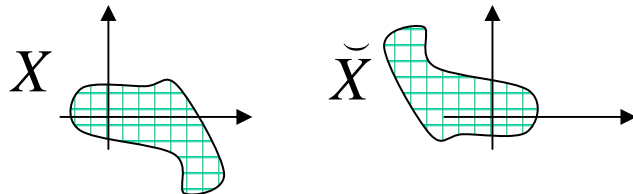
le *translaté* de  $X$  par  $b$ .



et on note

$$\check{X} = \{-x; x \in X\}$$

le *transposé* de  $X$ .

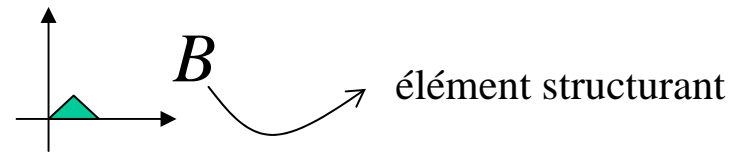


Rq: si  $X$  est symétrique alors  $X = \check{X}$

# L'addition de Minkowski

L'addition de Minkowski de  $X$  et  $B$  est définie par :

$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b$$



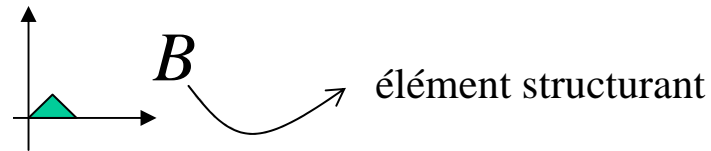
Rq :  $X \oplus B = B \oplus X$

C'est le lieu géométrique des points de  $B_x$  lorsque  $x$  parcourt  $X$



# La dilatation morphologique

La dilatation morphologique de  $X$  par  $B$  est définie par :  $\delta_B(X) = X \oplus \check{B}$



$$\begin{aligned} \delta_B(X) &= X \oplus \check{B} = \bigcup_{b \in \check{B}} X_b \\ &= \{z / \exists x \in X, \exists b \in B; z = x - b\} \\ &= \{z / \exists x \in X, \exists b \in B; z + b = x\} \\ &= \{z / B_z \cap X \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

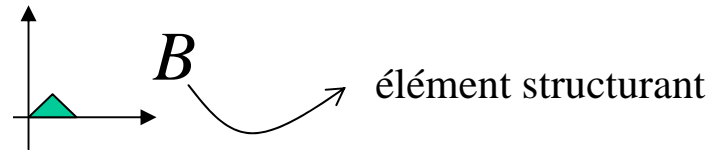
$$\delta_B(X) = \{z / B_z \cap X \neq \emptyset\}$$

C'est le lieu géométrique  
des points  $z$  tels que  $B_z$   
intersecte  $X$



# L'érosion morphologique

L'érosion morphologique de  $X$  par  $B$  est définie par le principe de dualité :  $\varepsilon_B(\overline{X}) = \overline{\delta_B(X)}$



$$\varepsilon_B(X) = \overline{\delta_B(\overline{X})} = \overline{\overline{X} \oplus \check{B}}$$

$$= \bigcup_{b \in \check{B}} \overline{X_b} = \bigcap_{b \in \check{B}} X_b$$

$$= X \ominus \check{B}$$

Soustraction de Minkowski

$$\varepsilon_B(X) = \bigcap_{b \in \check{B}} X_b = \{z / \forall b \in B, \exists x \in X; z + b = x\}$$

$$= \{z / B_z \subset X\}$$

$$\varepsilon_B(X) = \{z / B_z \subset X\}$$

C'est le lieu géométrique des points  $z$  tels que  $B_z$  est inclus dans  $X$

# Propriétés algébriques des opérateurs de base

## CROISSANCE

La dilatation et l'érosion sont des opérateurs *croissants*

$$X \subset Y \Rightarrow \delta_B(X) \subset \delta_B(Y)$$

$$X \subset Y \Rightarrow \varepsilon_B(X) \subset \varepsilon_B(Y)$$



L'érosion est *décroissante* par rapport à l'élément structurant :

$$B \subset B' \Rightarrow \varepsilon_B(X) \supset \varepsilon_{B'}(X)$$

## EXTENSIVITE

Si l'élément structurant  $B$  contient l'origine :

• La dilatation est *extensive*

$$X \subset \delta_B(X)$$

• L'érosion est *anti-extensive*

$$\varepsilon_B(X) \subset X$$

• La dilatation commute avec le *Sup*

$$\delta_B(X \cup Y) = \delta_B(X) \cup \delta_B(Y)$$

• L'érosion commute avec le *Inf*

$$\varepsilon_B(X \cap Y) = \varepsilon_B(X) \cap \varepsilon_B(Y)$$

On a les égalités :

$$\delta_{B \cup B'}(X) = \delta_B(X) \cup \delta_{B'}(X)$$

$$\varepsilon_{B \cup B'}(X) = \varepsilon_B(X) \cap \varepsilon_{B'}(X)$$



Mais  
seulement les  
inclusions :

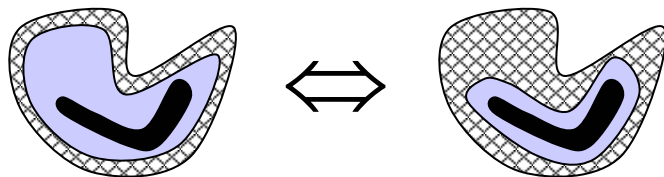
$$\delta_{B \cap B'}(X) \subset \delta_B(X) \cap \delta_{B'}(X)$$

$$\varepsilon_{B \cap B'}(X) \supset \varepsilon_B(X) \cup \varepsilon_{B'}(X)$$

$$\varepsilon_B(X \cup Y) \supset \varepsilon_B(X) \cup \varepsilon_B(Y)$$

# Propriétés algébriques des opérateurs de base

## PROPRIETE D'ADJONCTION



$$X \subset \varepsilon_B(Y) \Leftrightarrow \delta_{\bar{B}}(X) \subset Y$$

## CAS DEGENERES

élément structurant vide

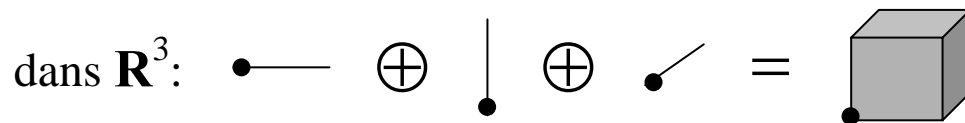
$$\varepsilon_{\emptyset}(X) = \mathbf{R}^n$$

$$\delta_{\emptyset}(X) = \emptyset$$

## ASSOCIATIVITE DE LA DILATATION

Application : Polyèdres de Steiner dans  $\mathbf{R}^n$ :

ex:



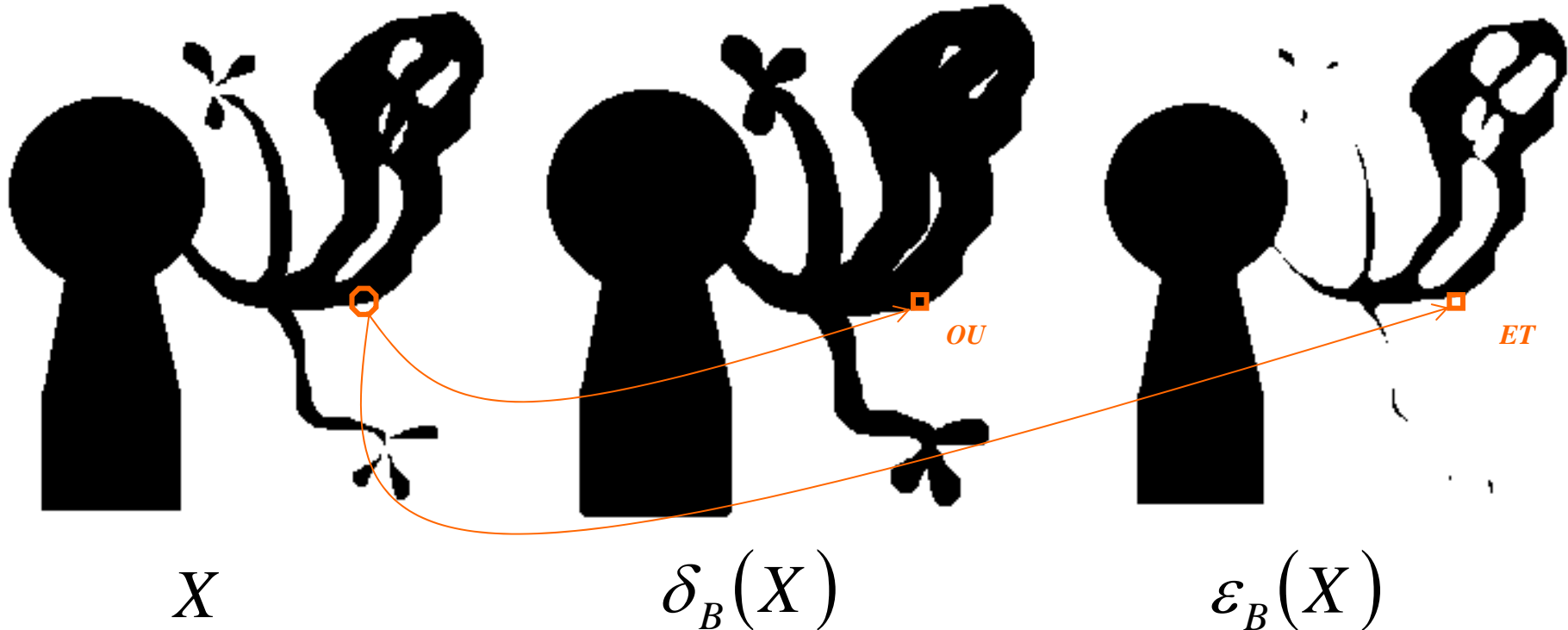
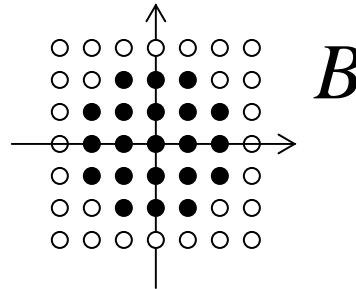
$$\delta_{B'}(\delta_B(X)) = \delta_{\delta_{B'}(B)}(X)$$

$$\varepsilon_{B'}(\varepsilon_B(X)) = \varepsilon_{\delta_{B'}(B)}(X)$$

Décomposition des  
éléments structurants  
convexes en sommes  
de segments

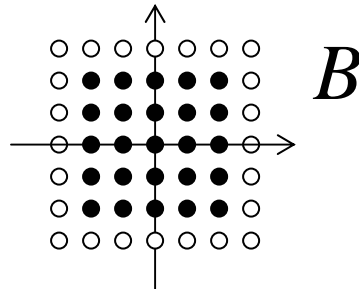
# Application aux images binaires

Le treillis est l'ensemble  
des parties de  $\mathbf{Z}^2$



# Implantation des opérateurs de base

Ex : élément structurant carré de coté  $c$ .



*Méthode triviale :*

```

DILATE (Image_IN X, Image_OUT Y, Elt_struct B) {
  Pour tout pixel  $p \in X$  {
     $Y(p) = 0$ ;
    Pour tout  $b \in B$  {
       $Y(p) = Y(p) \text{ OU } X(p-b)$ ;
    }
  }
}
    
```



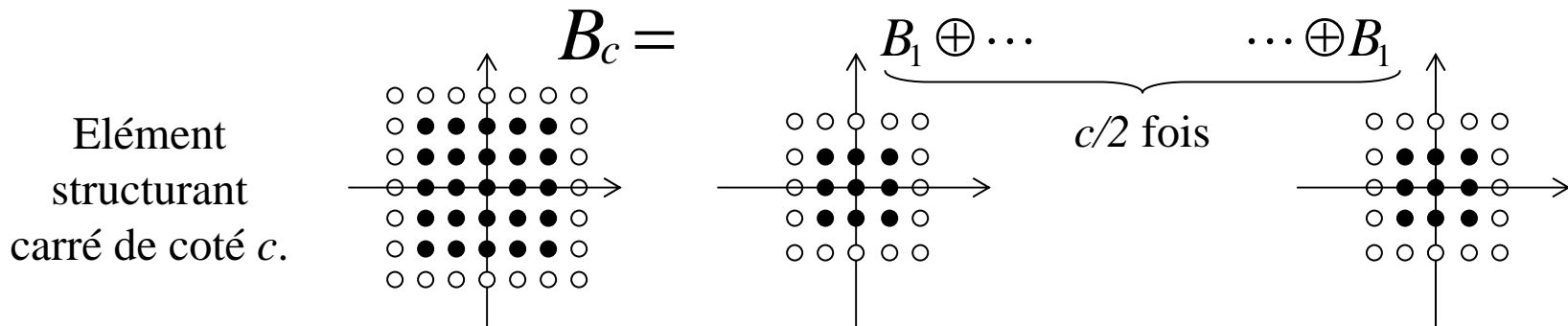
$X$



$\delta_B(X)$

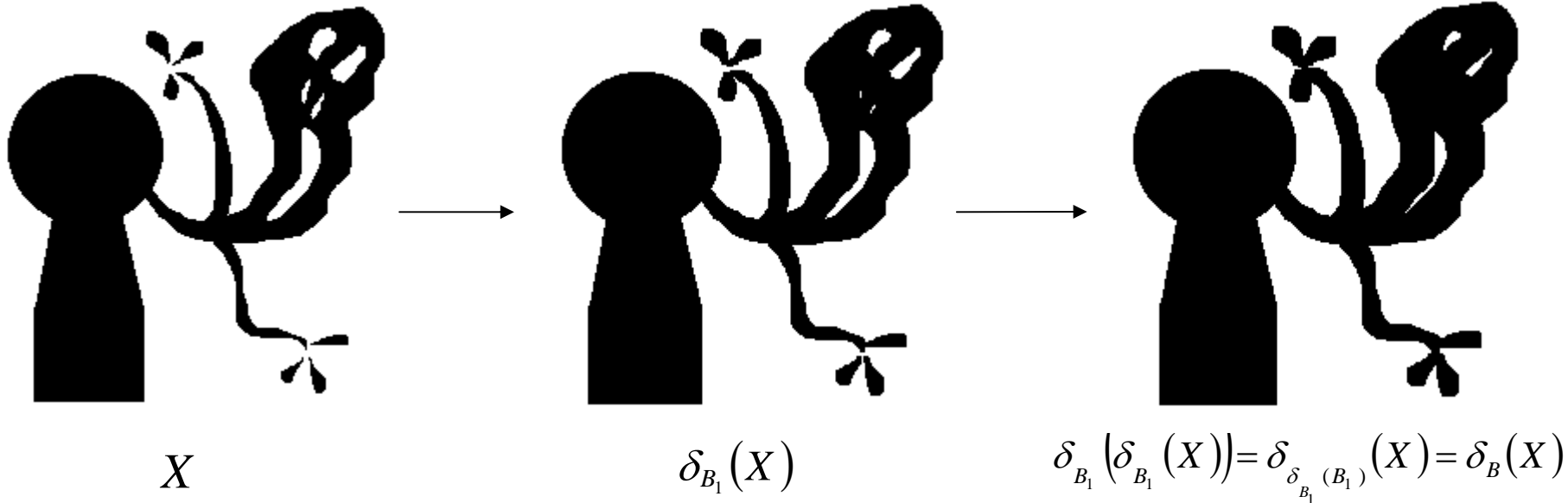
Complexité  
du calcul par  
pixel :  $c^2$

# Implantation des opérateurs de base



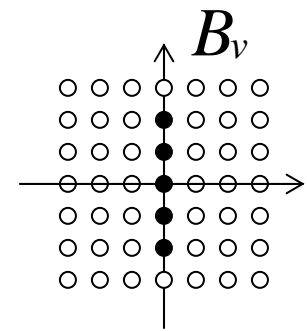
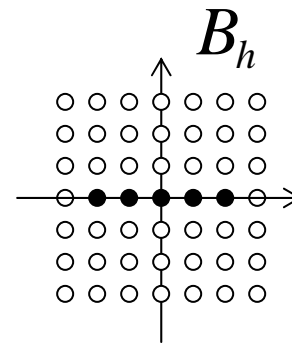
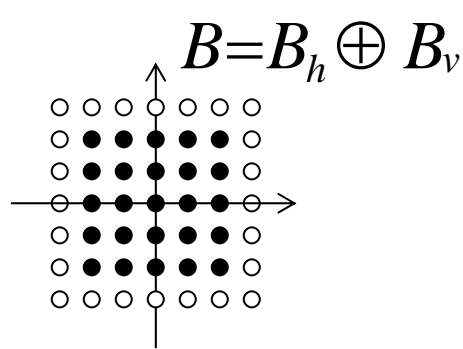
(associativité de la dilatation)

Complexité du calcul par pixel :  $4c$



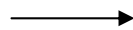
# Implantation des opérateurs de base

Élément  
structurant  
carré de coté  $c$ .



(décomposition des polyèdres de Steiner)

Complexité du calcul par pixel :  $2c$



$X$

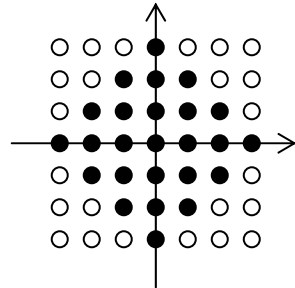
$\delta_{B_h}(X)$

$\delta_{B_v}(\delta_{B_h}(X)) = \delta_{\delta_{B_h}(B_v)}(X) = \delta_B(X)$

# Erosions binaires et distances discrètes

Pour les ensembles (images binaires), dans le cas où l'élément structurant est une boule d'une distance discrète, il est avantageux de calculer l'érodé *par seuillage de la transformée en distance* :

ex :



distance de la 4-connexité

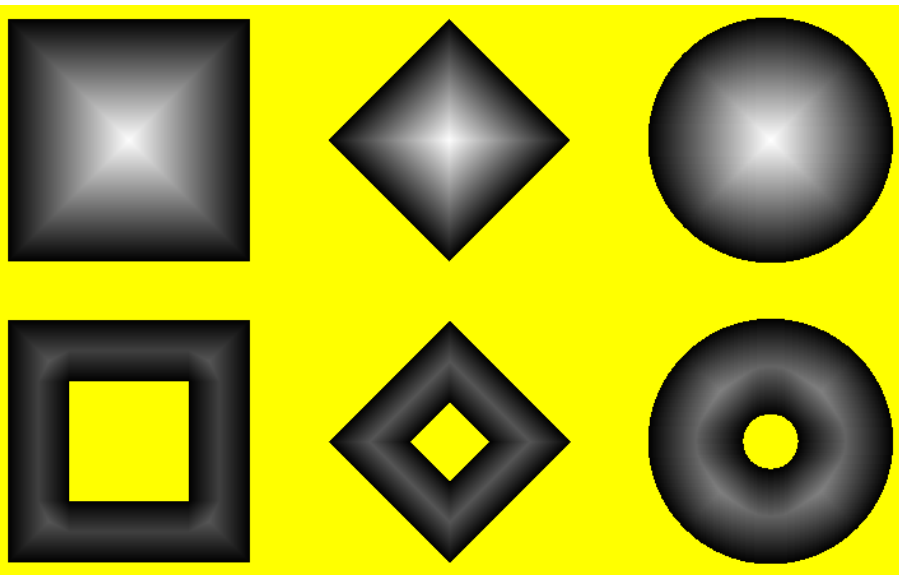
$$d_4(a, b) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$$

en effet :  $p \in \mathcal{E}_{B_\lambda}(X) \Leftrightarrow F_X^d(p) \geq \lambda$

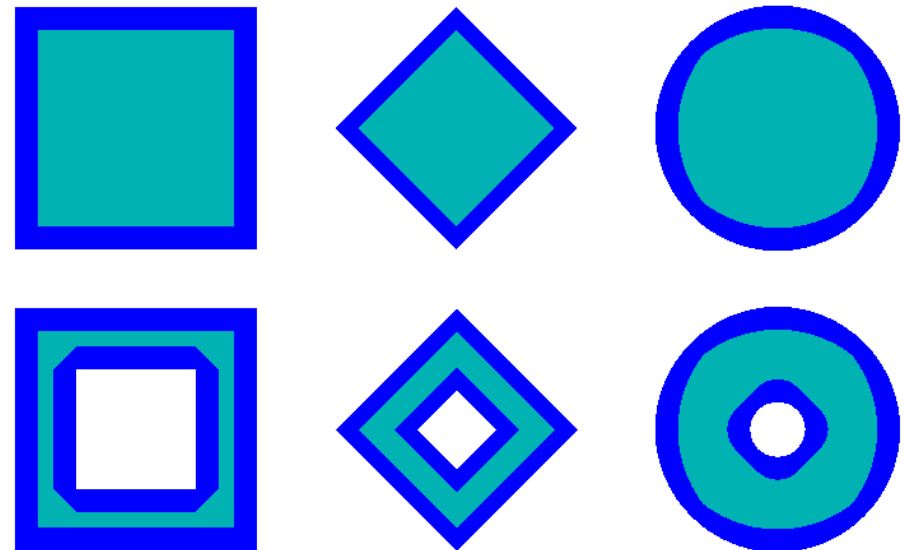
transformée en distance  $d$  de l'ensemble  $X$  :

$$F_X^d : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{N}$$

$$p \mapsto d(p, X^c)$$



Transformée en distance  $d_4$

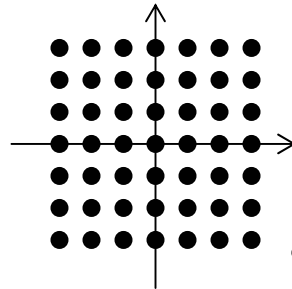


Erosion par une boule de  $d_4$



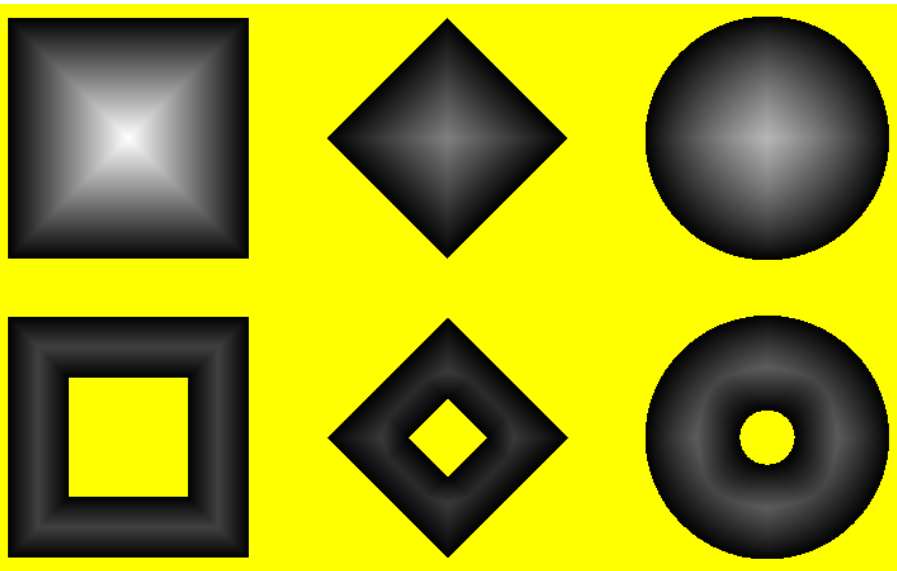
# Erosions binaires et distances discrètes

ex :

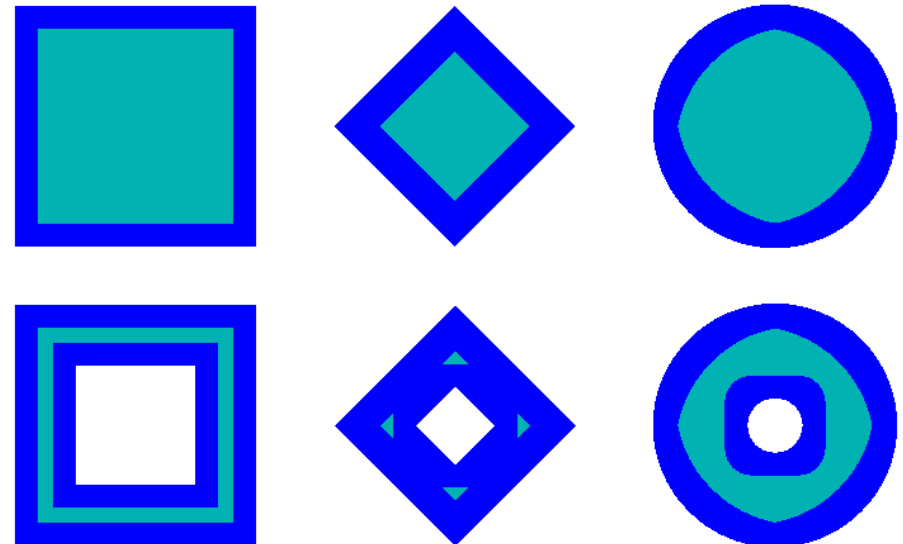


distance de la  
8-connexité

$$d_8(a,b) = \max(|x_a - x_b|, |y_a - y_b|)$$



Transformée en distance  $d_8$

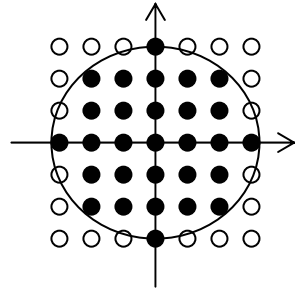


Erosion par une boule de  $d_8$

# Erosions binaires et distances discrètes

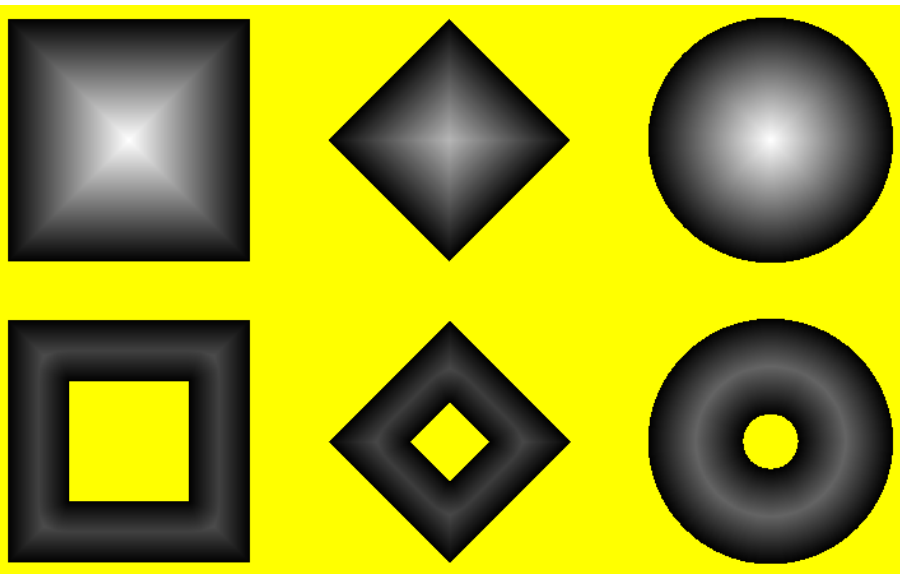
ex :

distance euclidienne (ou pseudo-euclidienne)

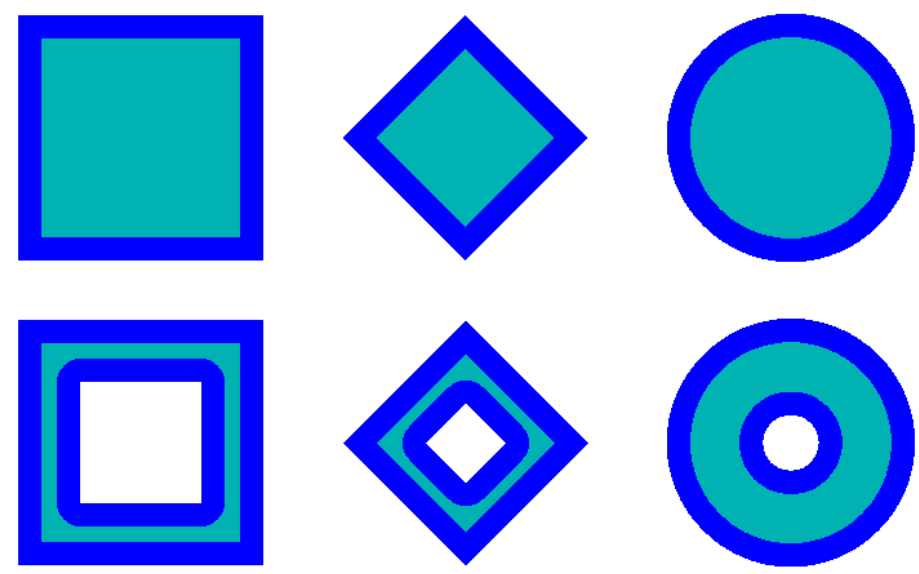


Grâce aux techniques de calcul récursif de la transformée en distance, la complexité du calcul par pixel devient constante :  $(O(1))$

$$d_e(a,b) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

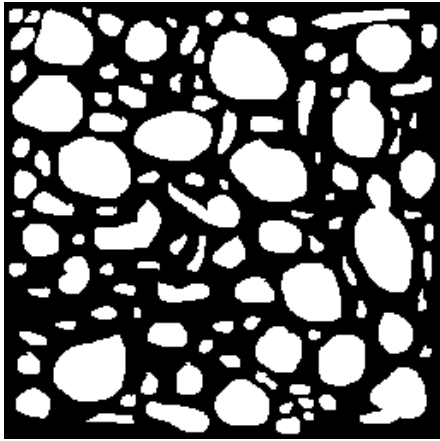


Transformée en distance *pseudo-euclidienne*

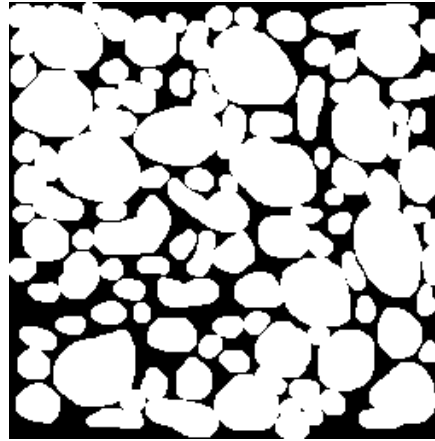


Erosion par une boule *pseudo-euclidienne*

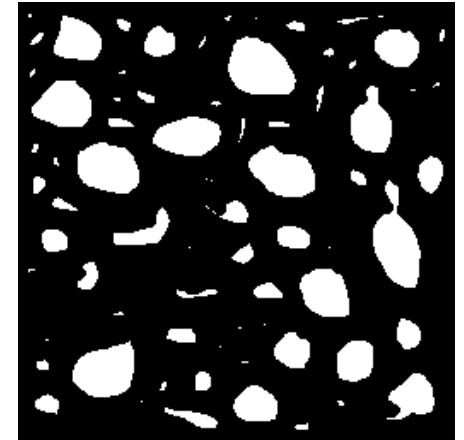
# Conclusions sur les opérateurs de base



Originale



Dilatée



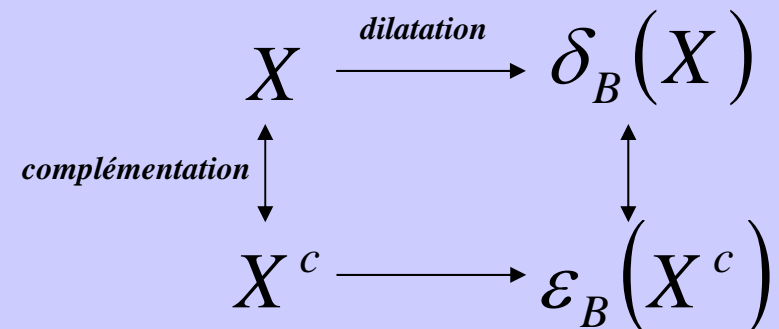
Erodée

- *La dilatation fait disparaître les petits trous et les petits détroits, et fait grossir les objets.*
- *L'érosion fait disparaître les petits objets et les petits isthmes, et amincit les objets restants.*



Dilatation et érosion sont des opérations *non réversibles*.

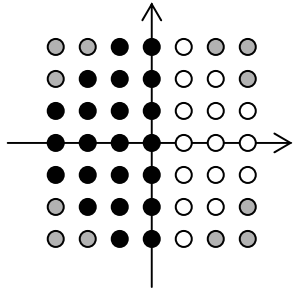
Dilatation et érosion sont des opérations *duales, pas inverses* !



# Transformées en tout-ou-rien

Les transformées en tout-ou-rien (*Hit-or-Miss Transform*) unifient et généralisent érosions et dilatations.

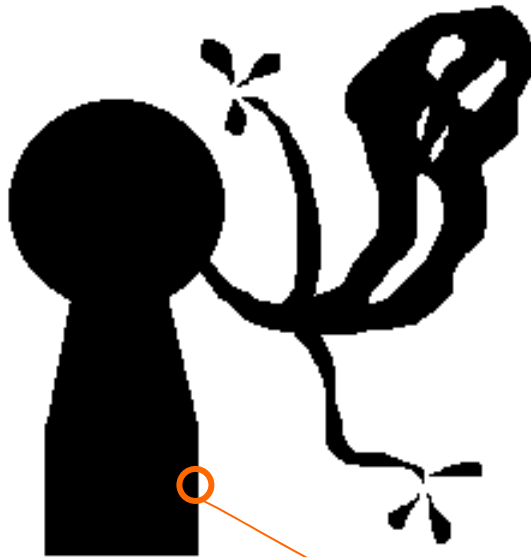
$H$  •



$M$  ○

$$X \circledast (H, M) = \varepsilon_H(X) \cap \varepsilon_M(X^c)$$

Application : Recherche de configurations



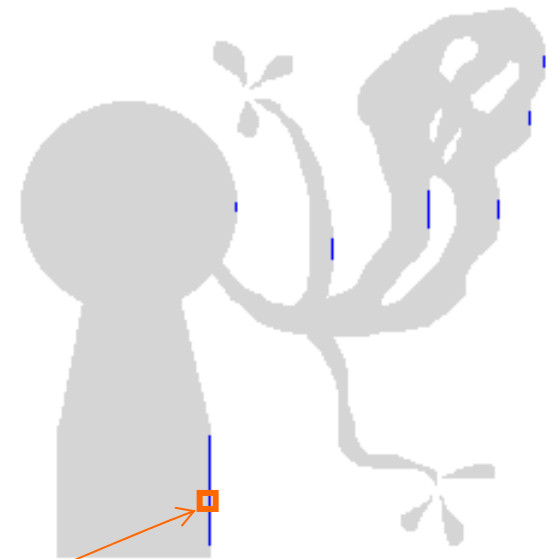
$X$



$\varepsilon_H(X)$



$\varepsilon_M(X^c)$



$X \circledast (H, M)$

# Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

On se place à présent dans le cadre des fonctions :  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$

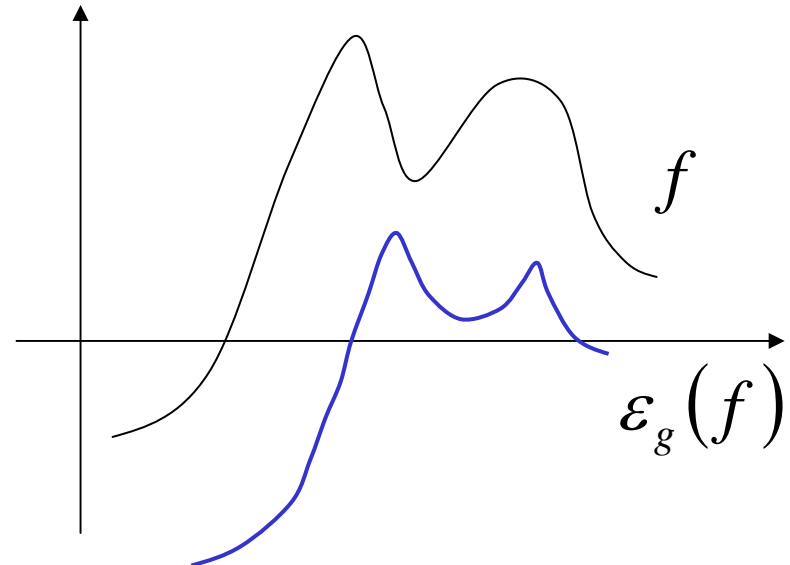
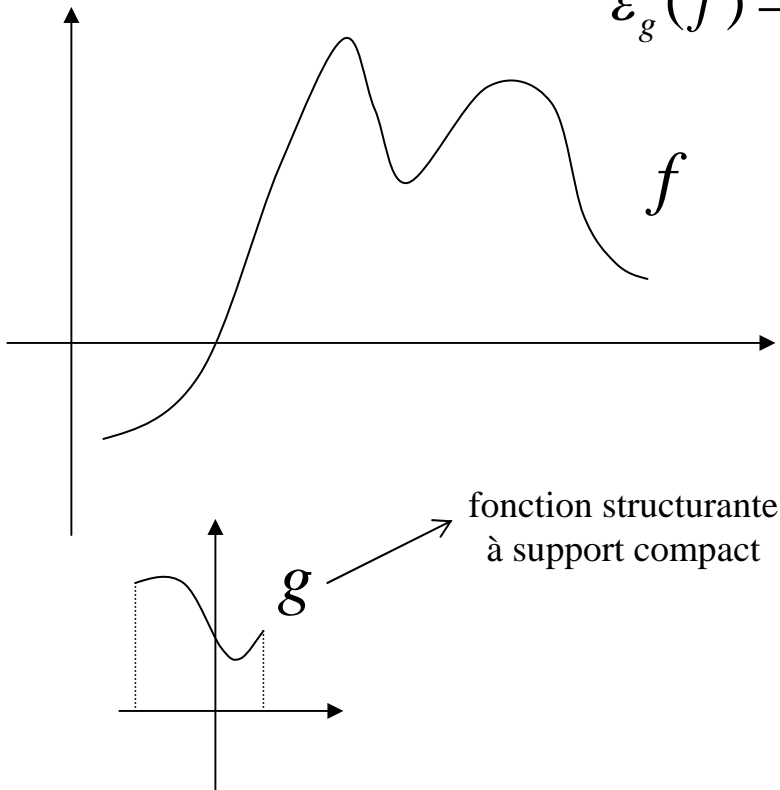
La dilatation et l'érosion fonctionnelles sont respectivement définies par :

$$\delta_g(f) = f \oplus \check{g}$$

$$\varepsilon_g(f) = f \ominus \check{g}$$

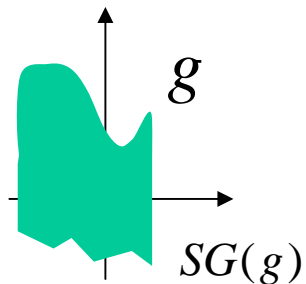
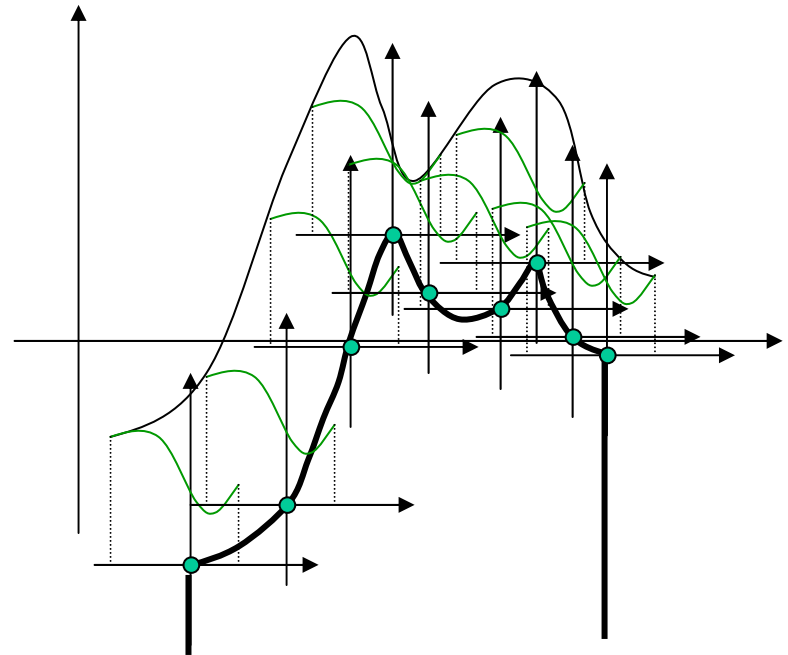
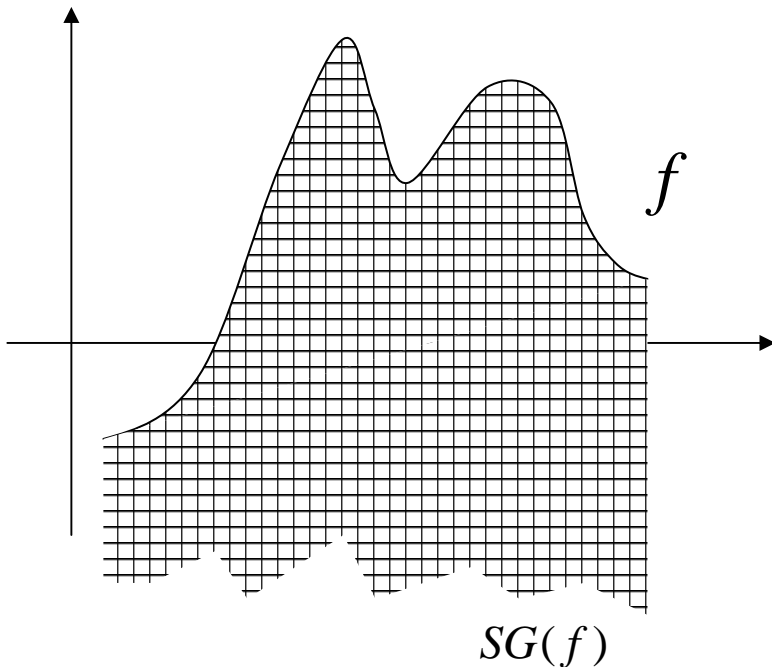
$$\delta_g(f)(x) = \sup_{y \in \mathbf{R}^n} \{f(y) + g(y - x)\}$$

$$\varepsilon_g(f)(x) = \inf_{y \in \mathbf{R}^n} \{f(y) - g(y - x)\}$$



# Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

A toute fonction  $f$  on associe son *sous-graphe* :  $SG(f) = \{(x, t) \in \mathbf{R}^n \times \overline{\mathbf{R}} / t \leq f(x)\}$



# Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

*Interprétation ensembliste :*

$$SG(\varepsilon_g(f)) = \mathbf{\epsilon}_{SG(g)}(SG(f))$$

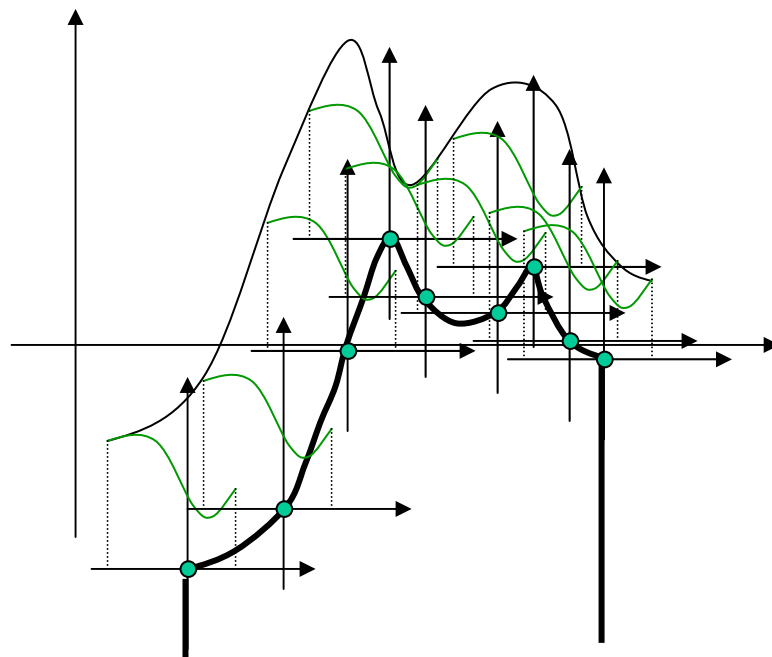
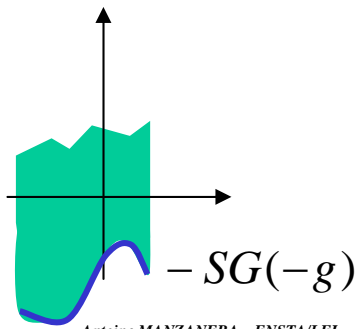
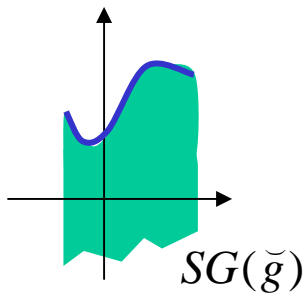
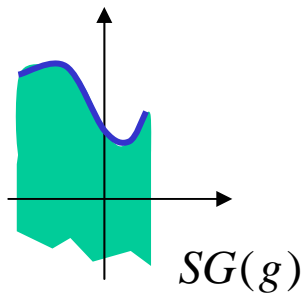
$$SG(\delta_g(f)) = \mathbf{\delta}_{-SG(-g)}(SG(f))$$

fonctionnel

ensembliste

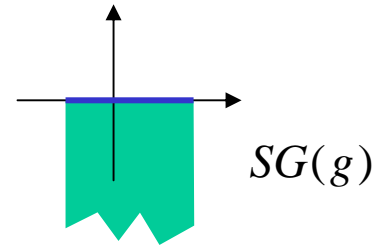


$$-g \neq \check{g}$$



# Cas des éléments structurants plans

Élément structurant plan =  
fonction structurante nulle sur un  
support compact K



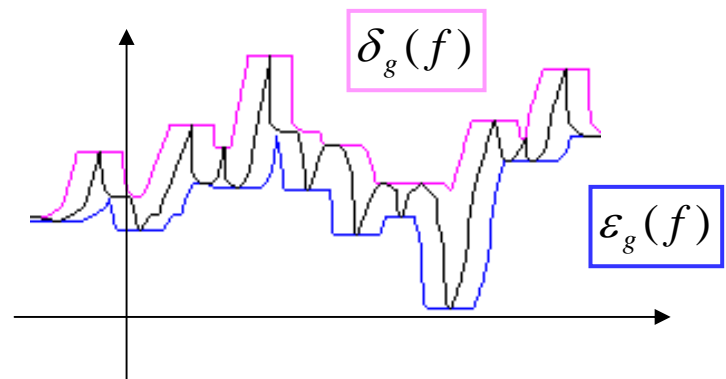
L'expression algébrique des  
opérateurs de base devient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_g(f)(x) &= \inf_{\substack{y \in \mathbf{R}^n \\ y-x \in K}} \{f(y)\} \\ &= \inf_{y \in K_x} \{f(y)\} \end{aligned}$$

ex:



$$\delta_g(f)(x) = \sup_{y \in K_x} \{f(y)\}$$





# Propriétés des opérateurs de base dans le cadre fonctionnel

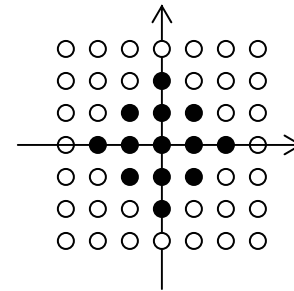
Identiques au cas ensembliste, en remplaçant :

$$\begin{aligned} \subset &\rightarrow \leq \\ \cup &\rightarrow \vee \\ \cap &\rightarrow \wedge \end{aligned}$$

$f \leq f' \Rightarrow \delta_g(f) \leq \delta_g(f')$ $f \leq f' \Rightarrow \varepsilon_g(f) \leq \varepsilon_g(f')$ $g \leq g' \Rightarrow \varepsilon_g(f) \geq \varepsilon_{g'}(f)$	<p>Si <math>O \in \text{Supp}(g)</math> :</p> $f \leq \delta_g(f)$ $\varepsilon_g(f) \leq f$	$\delta_g(f \vee f') = \delta_g(f) \vee \delta_g(f')$ $\varepsilon_g(f \wedge f') = \varepsilon_g(f) \wedge \varepsilon_g(f')$
$\delta_{g \vee g'}(f) = \delta_g(f) \vee \delta_{g'}(f)$ $\varepsilon_{g \vee g'}(f) = \varepsilon_g(f) \wedge \varepsilon_{g'}(f)$		$\delta_{g \wedge g'}(f) \leq \delta_g(f) \wedge \delta_{g'}(f)$ $\varepsilon_{g \wedge g'}(f) \geq \varepsilon_g(f) \vee \varepsilon_{g'}(f)$ $\varepsilon_g(f \vee f') \geq \varepsilon_g(f) \vee \varepsilon_g(f')$
$f \leq \varepsilon_g(f') \Leftrightarrow \delta_{\bar{g}}(f) \leq f'$		$\delta_{g'}(\delta_g(f)) = \delta_{\delta_{g'}(g)}(f)$ $\varepsilon_{g'}(\varepsilon_g(f)) = \varepsilon_{\delta_{g'}(g)}(f)$

# Application aux images numériques

Le treillis est l'ensemble  
des fonctions de  $\mathbf{Z}^2$  dans  $\mathbf{Z}$



$B$

élément  
structurant plan  
 $\cong$   
ensemble



$X$



$\delta_B(X)$



$\varepsilon_B(X)$

# Premiers opérateurs par différence

*Opérateur par différence :*

$$\Lambda(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$$

Cas ensembliste

$$\Lambda(X) = \Phi(X) \setminus \Psi(X)$$

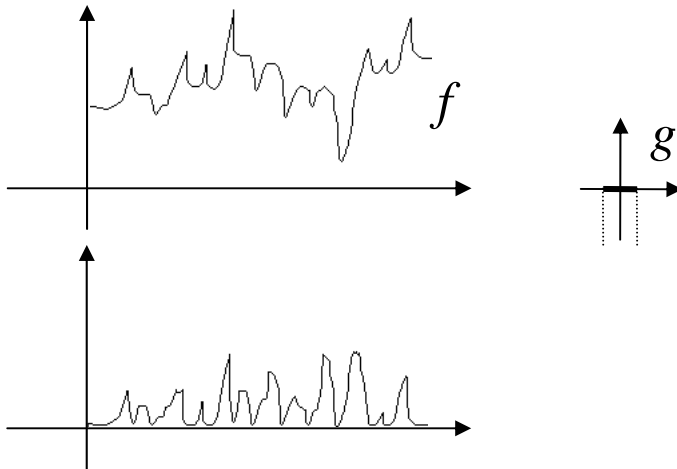
Cas fonctionnel

$$\Lambda(f) = \Phi(f) - \Psi(f)$$

**Gradient intérieur**

$$g_y^-(x)$$

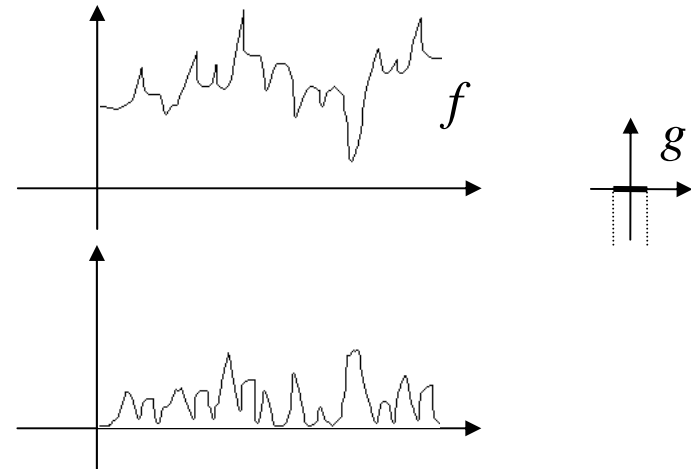
$$\Phi(x) = x \quad \Psi(x) = \varepsilon_y(x)$$



**Gradient extérieur**

$$g_y^+(x)$$

$$\Phi(x) = \delta_y(x) \quad \Psi(x) = x$$

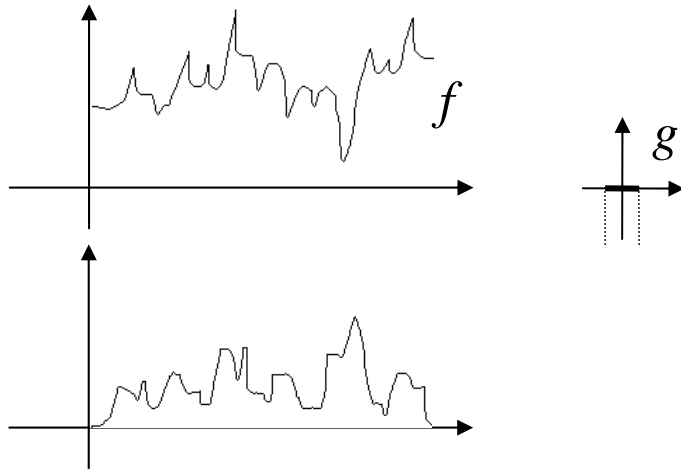


# Premiers opérateurs par différence

## Gradient morphologique (symétrisée)

$$g_y^m(x)$$

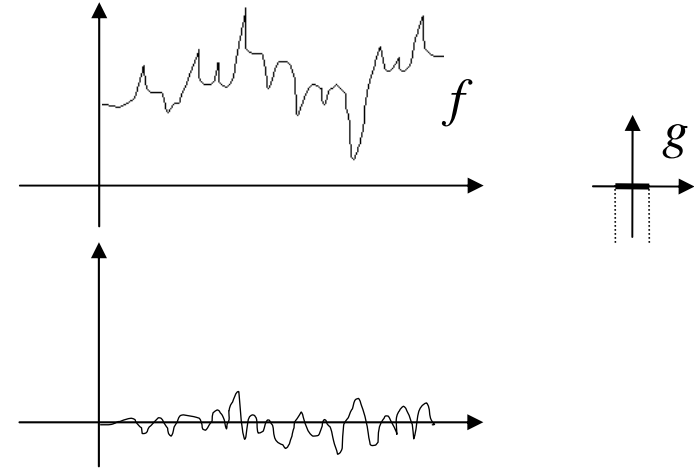
$$\Phi(x) = \delta_y(x) \quad \Psi(x) = \varepsilon_y(x)$$



## Laplacien morphologique

$$\lambda_y(x)$$

$$\Phi(x) = g_y^+(x) \quad \Psi(x) = g_y^-(x)$$

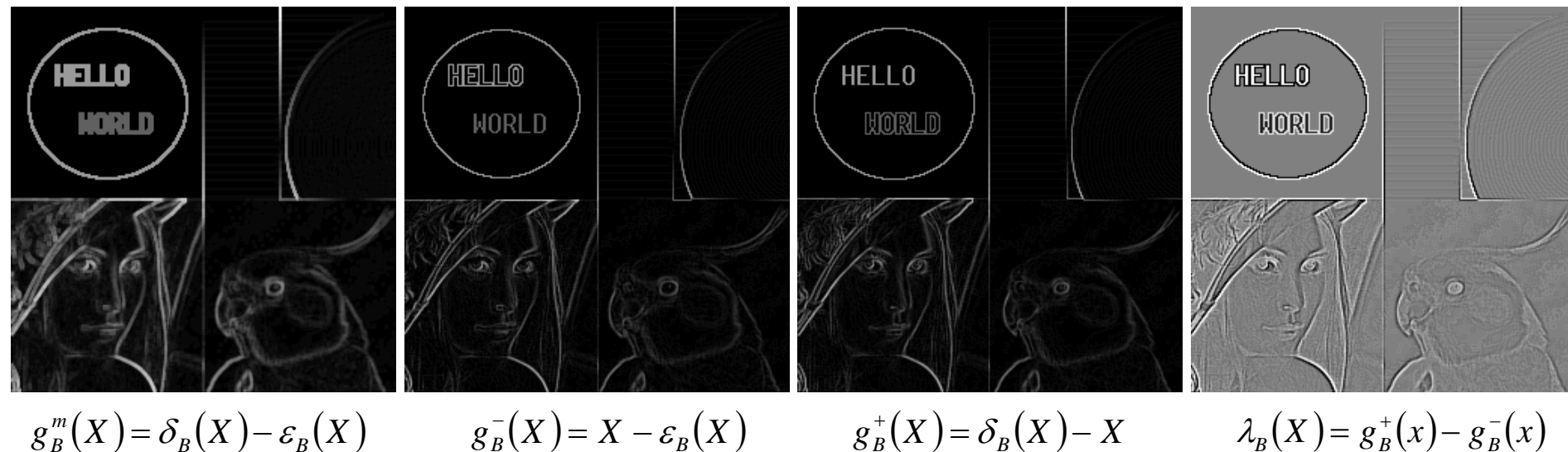
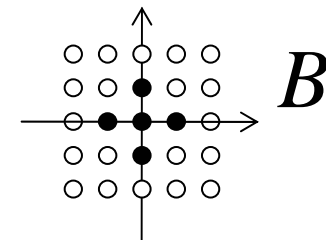
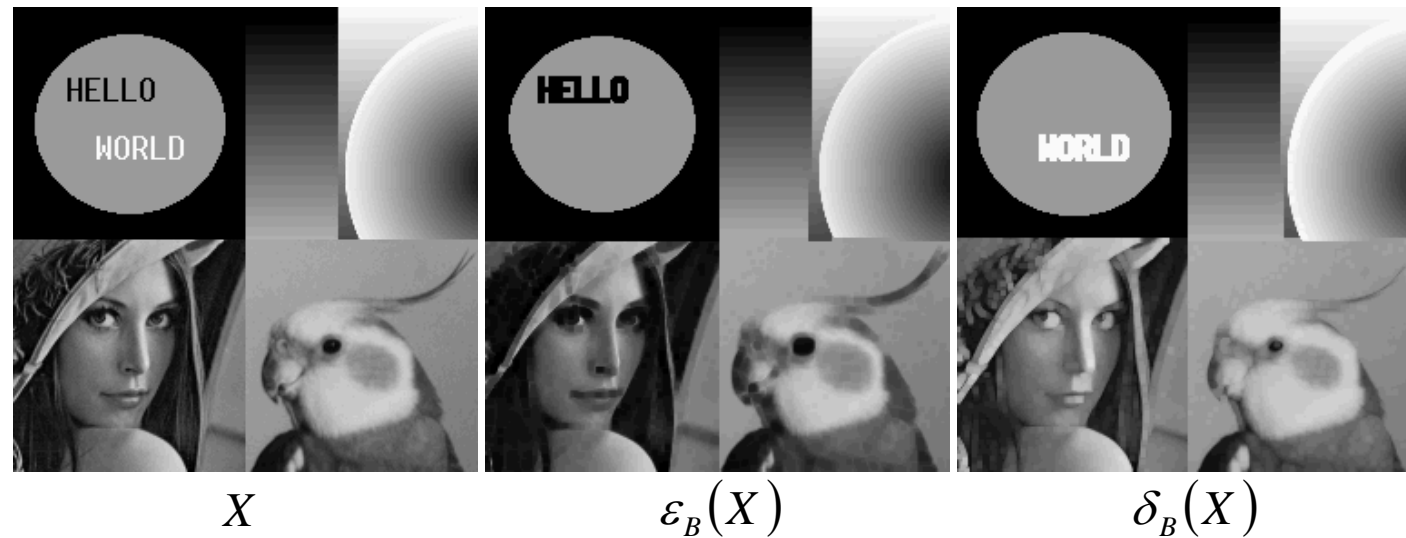


Rq : dans le cas de fonctions de  $\mathbf{R}^2$  dans  $\mathbf{R}$ , en prenant pour élément structurant une boule euclidienne centrée sur l'origine, le gradient morphologique et le laplacien morphologique tendent respectivement vers le module du gradient et le laplacien euclidiens lorsqu'ils sont définis, quand le rayon de la boule tend vers zéro :

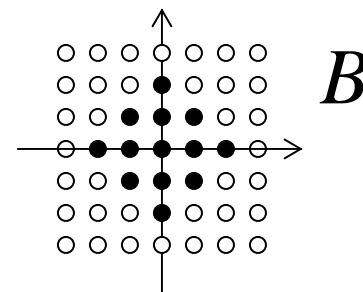
$$\|\nabla I\| = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial x}(u, v)\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}(u, v)\right)^2}$$

$$\Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(u, v) + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}(u, v)$$

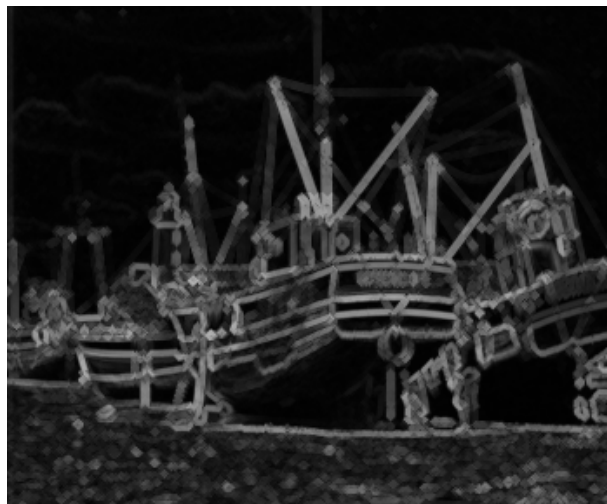
# Gradients et laplacien : images numériques



# Gradients et laplacien : images numériques



$X$



$g_B^m(X)$

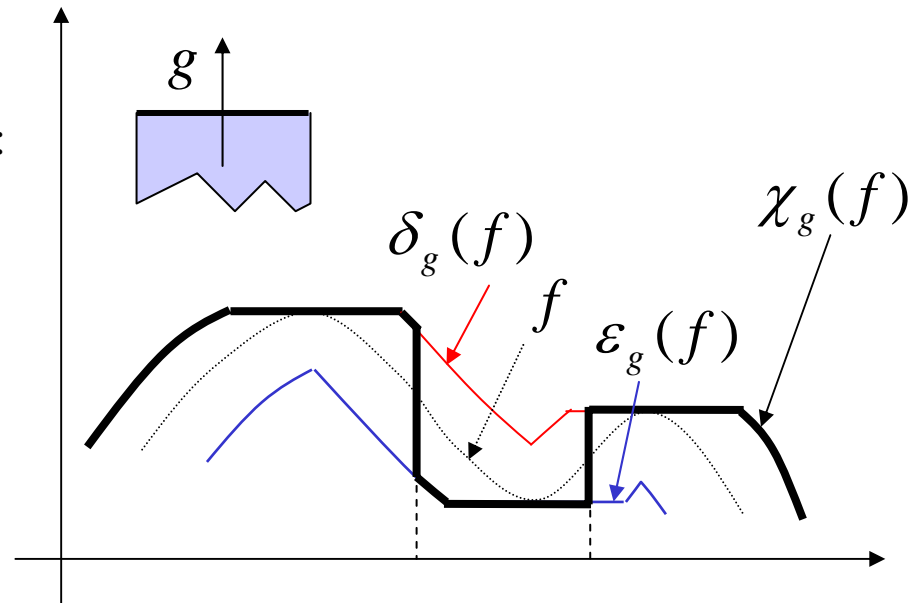


$\lambda_B(X)$

# Augmentation de contraste morphologique

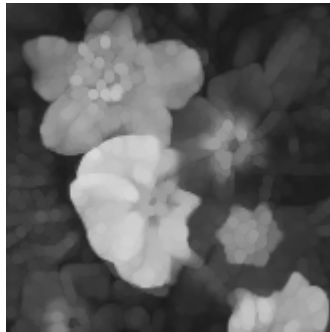
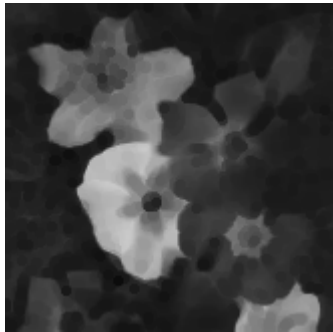
Le filtre rehausseur de contraste est défini par :

$$\begin{cases} \chi_g(f) = \delta_g(f) & \text{si } (\delta_g(f) - f) < (f - \varepsilon_g(f)) \\ \chi_g(f) = \varepsilon_g(f) & \text{si } (\delta_g(f) - f) > (f - \varepsilon_g(f)) \end{cases}$$



*erodé*

*dilaté*



$\varepsilon_g(f)$

$\delta_g(f)$

*image originale*

*image rehaussée*

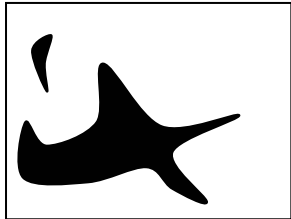


$f$

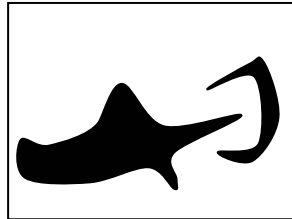
$\chi_g(f)$

# Ouvertures et fermetures morphologiques

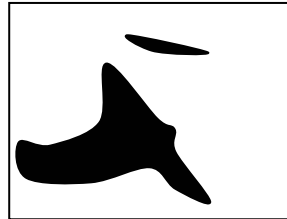
Problème Min/Max : étant donné  $Y \in E$ ,  $B \in E$ ,  
trouver le plus petit  $X \in E$  tel que :  $Y = \varepsilon_B(X)$



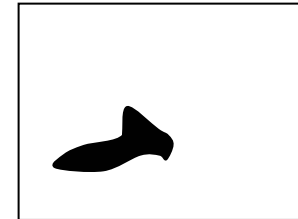
$X_1$



$X_2$



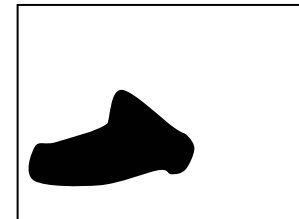
$X_3$



$$\begin{aligned} Y &= \varepsilon_B(X_1) \\ &= \varepsilon_B(X_2) \\ &= \varepsilon_B(X_3) \end{aligned}$$

**REPONSE :** C'est le dilaté de  $Y$  par le transposé de  $B$ :

$$\delta_{\check{B}}(Y) = Y \oplus B$$



On note :

$$\gamma_B(X) = X \circ B = \delta_{\check{B}}(\varepsilon_B(X)) = (X \ominus \check{B}) \oplus B$$

l'ouverture morphologique de  $X$  par  $B$ .

et son dual :

$$\varphi_B(X) = X \bullet B = \varepsilon_{\check{B}}(\delta_B(X)) = (X \oplus \check{B}) \ominus B$$

la fermeture morphologique de  $X$  par  $B$ .



# Propriétés algébriques des ouvertures et fermetures

## CROISSANCE

$$x \leq y \Rightarrow \begin{cases} \gamma_B(x) \leq \gamma_B(y) \\ \varphi_B(x) \leq \varphi_B(y) \end{cases}$$

## IDEMPOTENCE

$$\gamma_B(\gamma_B(x)) = \gamma_B(x)$$

$$\varphi_B(\varphi_B(x)) = \varphi_B(x)$$

dém:  $\delta_{\bar{B}}(\varepsilon_B(x)) \leq x \leq \varepsilon_{\bar{B}}(\delta_B(x))$

donc  $\delta_{\bar{B}}\varepsilon_B \leq id_E \leq \varepsilon_{\bar{B}}\delta_B$  et  $\delta_B\varepsilon_{\bar{B}} \leq id_E \leq \varepsilon_B\delta_{\bar{B}}$

$\downarrow$   $\varepsilon_B\delta_{\bar{B}}\varepsilon_B \leq \varepsilon_B$        $\downarrow$   $\varepsilon_B \leq \varepsilon_B\delta_{\bar{B}}\varepsilon_B$

donc  $\varepsilon_B = \varepsilon_B\delta_{\bar{B}}\varepsilon_B$

et donc  $\delta_{\bar{B}}\varepsilon_B = \delta_{\bar{B}}\varepsilon_B\delta_{\bar{B}}\varepsilon_B$

## EXTENSIVITE

L'ouverture est anti-extensive :  $\gamma_B(x) \leq x$   
 La fermeture est extensive :  $x \leq \varphi_B(x)$

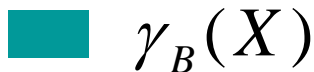
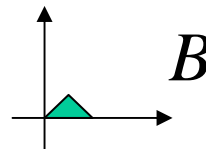
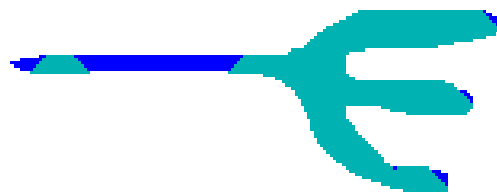
dém: Dans la propriété d'adjonction :  
 $x \leq \varepsilon_B(y) \Leftrightarrow \delta_{\bar{B}}(x) \leq y$   
 $x = \varepsilon_B(y)$  donne  $\delta_{\bar{B}}(\varepsilon_B(y)) \leq y$   
 et  $y = \delta_B(x)$  donne  $x \leq \varepsilon_{\bar{B}}(\delta_B(x))$

## PROPRIETE MIN/MAX

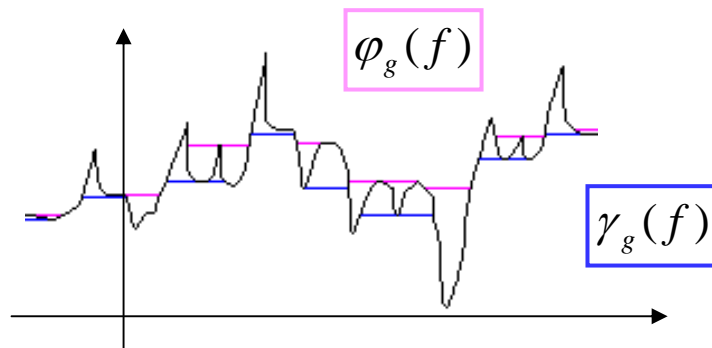
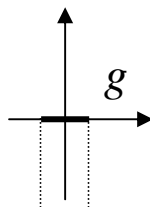
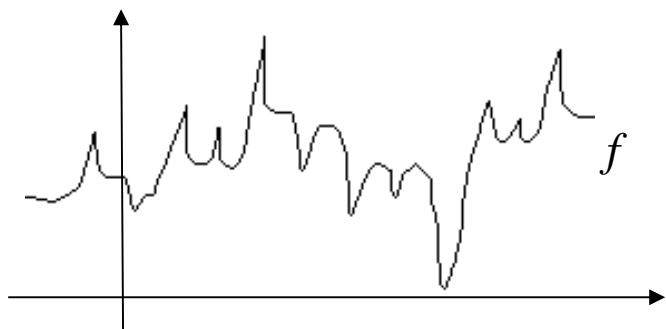
Soient  $x, x'$ , et  $y$  tels que :  $\begin{cases} y = \varepsilon_B(x) = \varepsilon_B(x') \\ \text{et} \\ x = \delta_{\bar{B}}(y) \end{cases}$

alors  $x = \delta_{\bar{B}}(y) = \delta_{\bar{B}}(\varepsilon_B(x))$   
 $= \delta_{\bar{B}}(\varepsilon_B(x')) = \gamma_B(x') \leq x'$

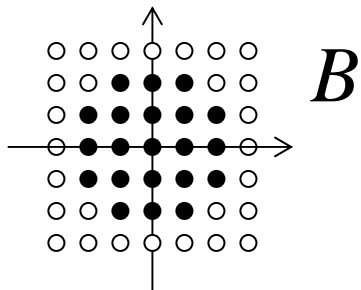
# Ouvertures et fermetures : ensembles et fonctions



C'est le lieu géométrique des points de  $B_z$  tels que  $B_z$  est inclus dans  $X$



# Ouvertures et fermetures : images binaires



- l'ouverture élimine les petites composantes, et ouvre les petits isthmes.
- la fermeture bouche les petites trous, et ferme les petits détroits.



$X$

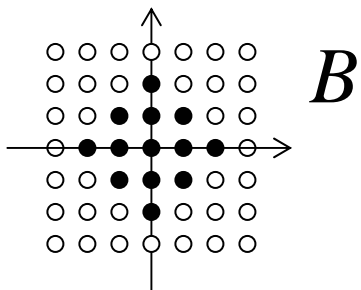


$\gamma_B(X)$



$\varphi_B(X)$

# Ouvertures et fermetures : images numériques



$\varepsilon_B(X)$



$\delta_B(X)$



$X$



$\gamma_B(X)$



$\varphi_B(X)$

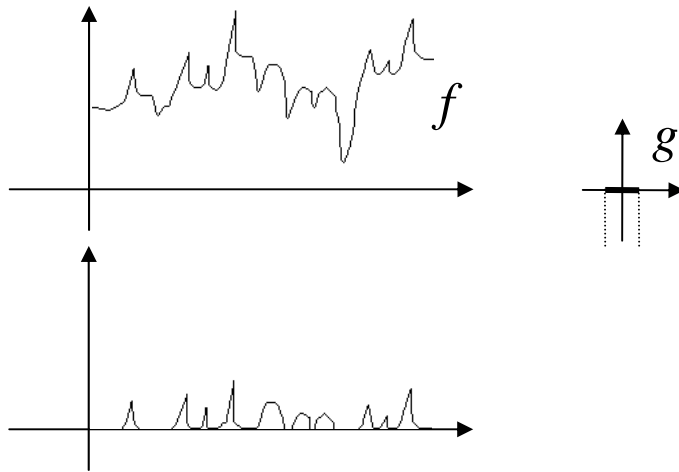
# Opérateurs obtenus par différence d'ouvertures et fermetures

*Opérateur par différence :*

$$\Lambda(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$$

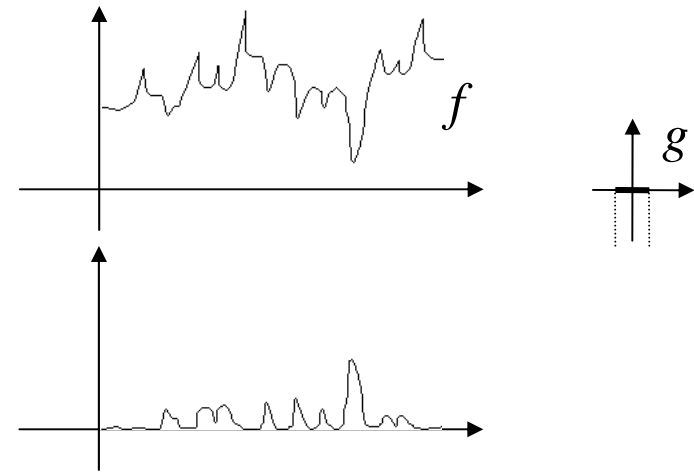
**Top-hat**

$$\Phi(x) = x \quad \Psi(x) = \gamma_y(x)$$

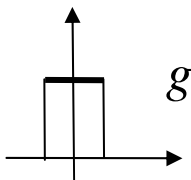


**Top-hat conjugué**

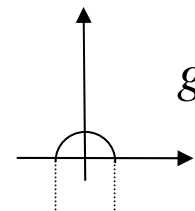
$$\Phi(x) = \varphi_y(x) \quad \Psi(x) = x$$



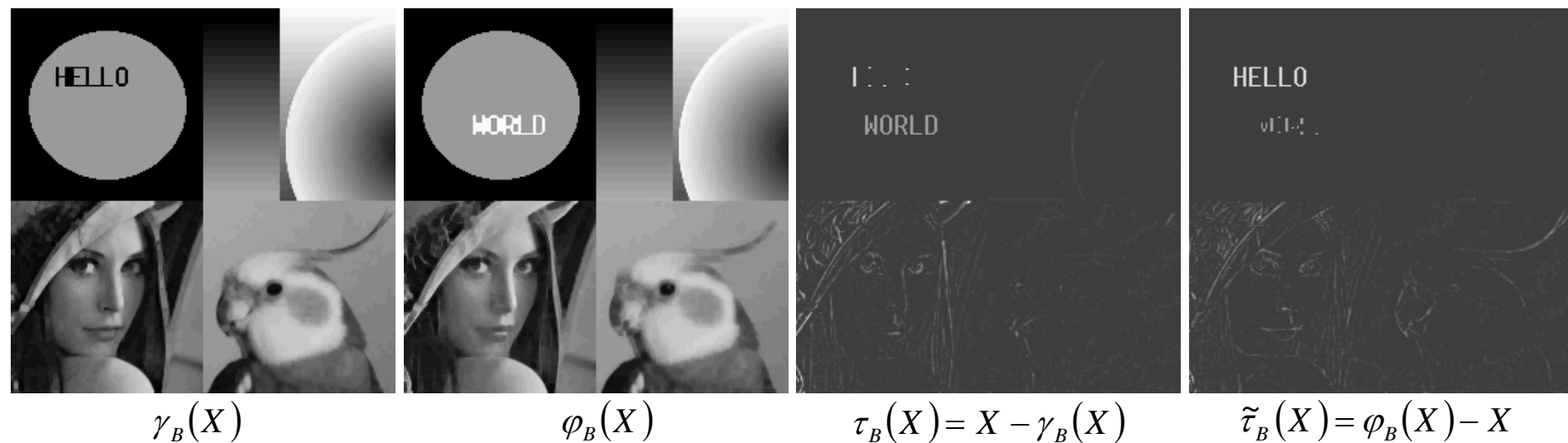
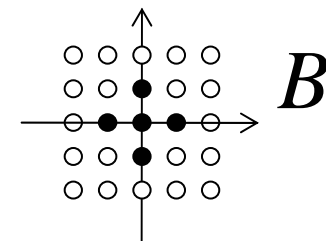
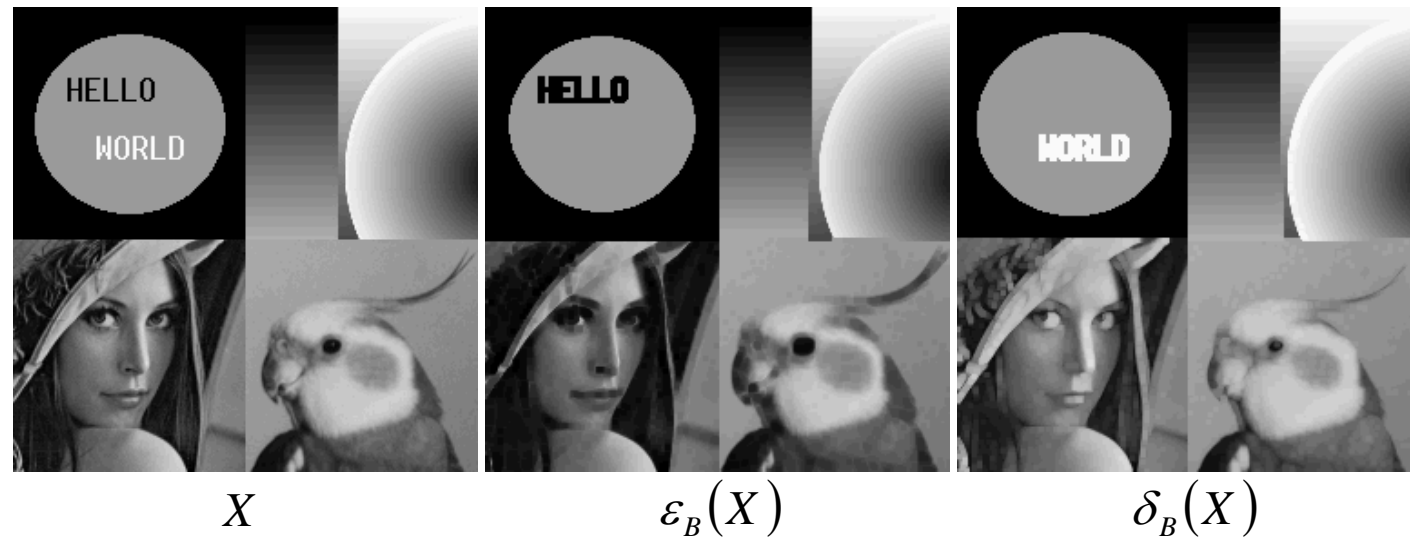
Top-hat



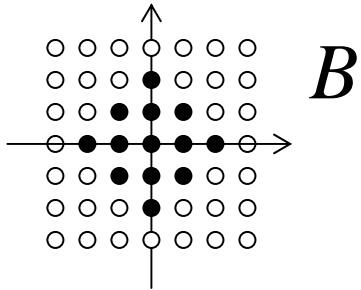
Rolling ball



# Top Hat : images numériques



# Top Hat : images numériques



$\gamma_B(X)$



$\varphi_B(X)$



$X$



$\tau_B(X)$



$\tilde{\tau}_B(X)$

# Ouvertures et fermetures algébriques

Les ouvertures et fermetures algébriques généralisent les ouvertures et fermetures morphologiques.

- Une **ouverture algébrique** est un filtre morphologique anti-extensif.
- Une **fermeture algébrique** est un filtre morphologique extensif.

PROPRIETE

- Un sup d'ouvertures morphologiques est une ouverture algébrique
- Un inf de fermetures morphologiques est une fermeture algébrique

ex :

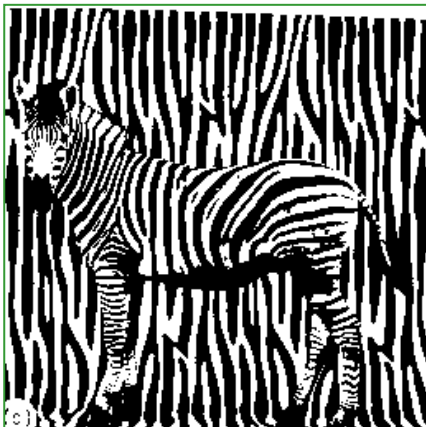
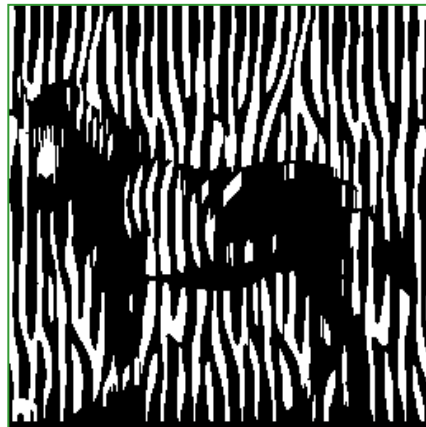
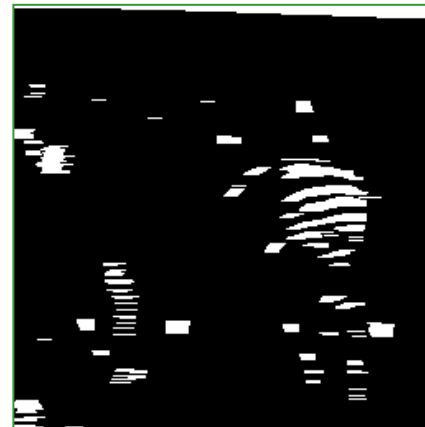


Image originale



Ouverture morphologique par un segment vertical



Ouverture morphologique par un segment horizontal



Ouverture algébrique par union des deux ensembles