Morphologie mathématique - I

Isabelle Bloch

`http://perso.telecom-paristech.fr/˜bloch`

Télécom ParisTech - CNRS LTCI

Paris - France

Quelques références

- M. Schmitt et J. Mattioli, *Morphologie mathématique*, Masson, Paris, 1994.
- J. Serra, *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Academic Press, New-York, 1982.
- J. Serra (Ed.), *Image Analysis and Mathematical Morphology, Part II: Theoretical Advances*, Academic Press, London, 1988.
- P. Soille, *Morphological Image Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

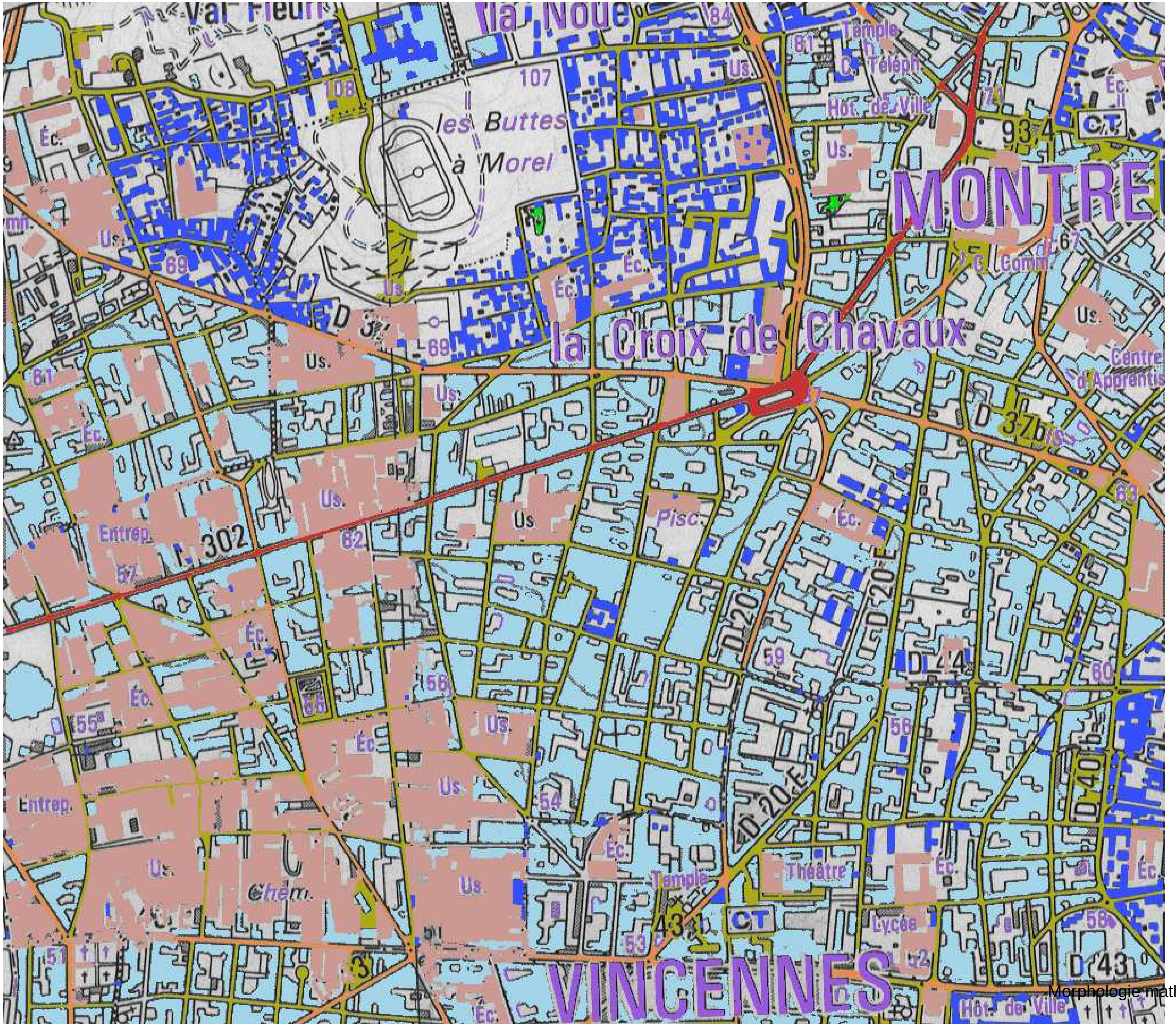
Introduction

- Origine : étude des milieux poreux
- Principe : étude des objets (images) à partir d'informations :
  - de taille, géométrie, topologie
  - de niveaux de gris ou couleurs
  - de voisinage
- Fondements mathématiques :
  - théorie des ensembles
  - topologie
  - géométrie
  - algèbre (théorie des treillis)
  - probabilités, ensembles fermés aléatoires
  - fonctions
- Caractéristiques principales des transformations :
  - non linéaires
  - non inversibles
  - fortes propriétés
  - algorithmes associés

Exemple

la Noue
les Buttes
à Morel
MONTRE
la Croix de Chavaux
Temple
Hôt. de Ville
C. Comm.
Centre
d'Apprentis
D 37bis
D 37
N 302
Entrep.
Pisc.
D 20
D 20 E
D 44
D 40b
D 39
D 43 E
D 43
Théâtre
Lycée
CT
VINCENNES

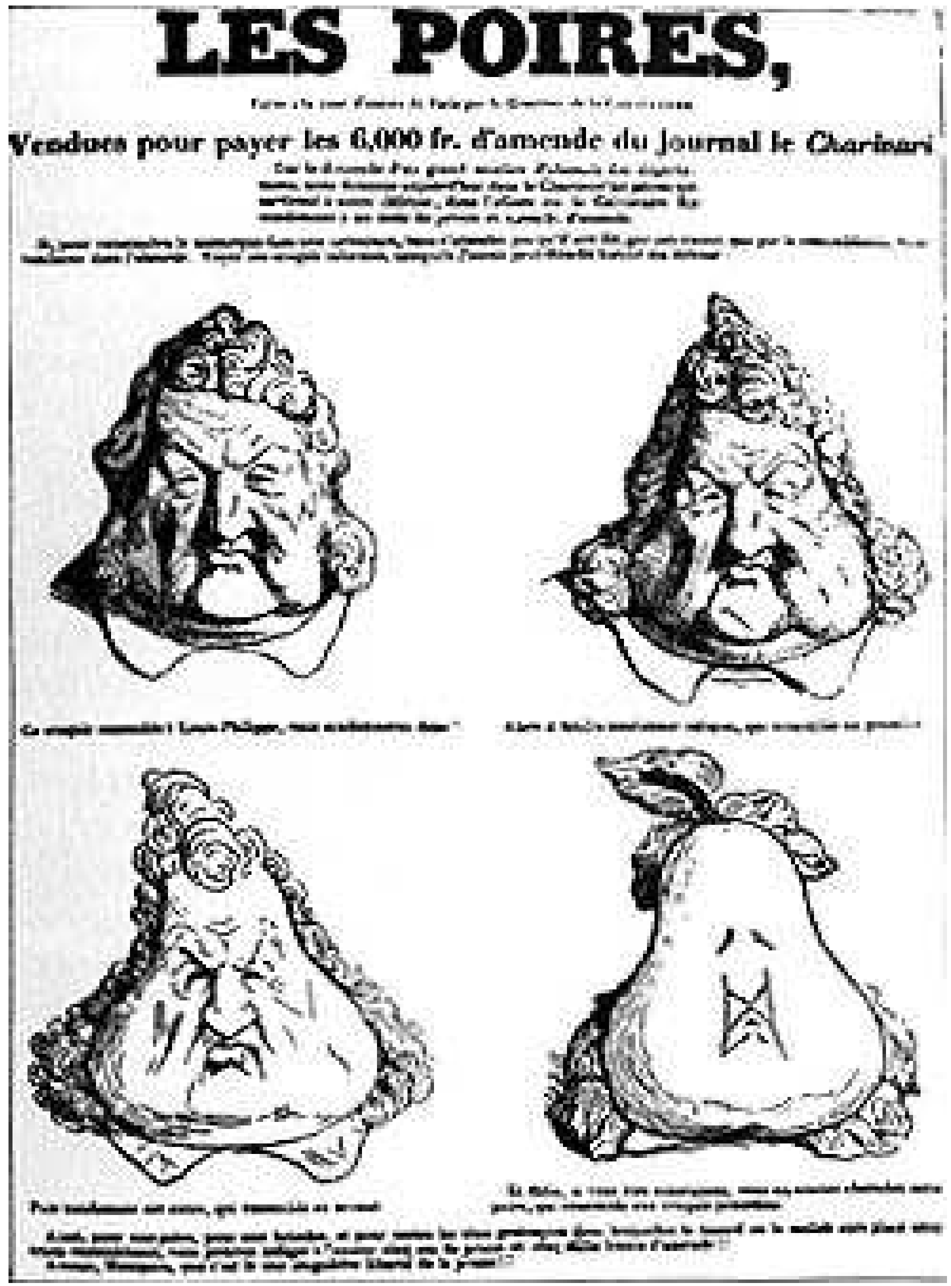
Exemple



la Noue
les Buttes
à Morel
107
108
MONTRE
la Croix de Chavaux
Temple
C. Téléph.
Hôt. de Ville
C.T.
93
D 37
D 37 bis
Centre d'Apprentis
Us.
Éc.
Entrep.
302
Pisc.
D 20
D 20 E
D 44
D 40 b
Théâtre
Temple
CT
Lycée
D 43
VINCENNES
Hôt. de Ville

Forme ou relations spatiales ?

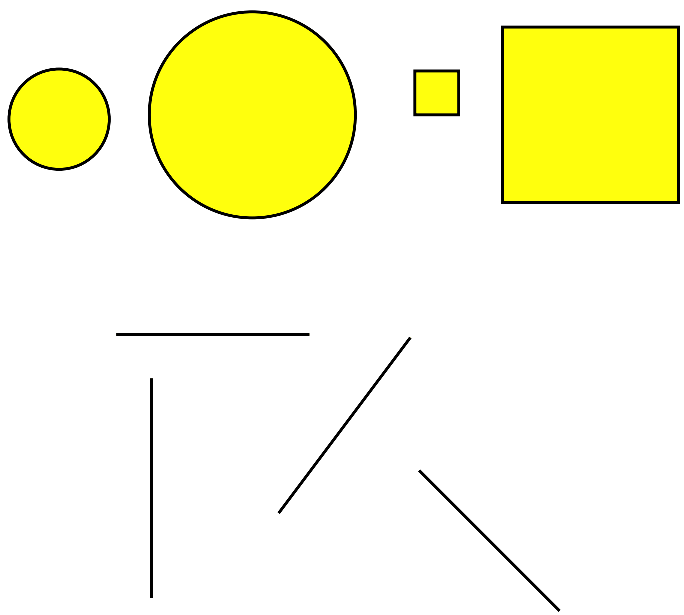
Simplifier et sélectionner l'information pertinente...



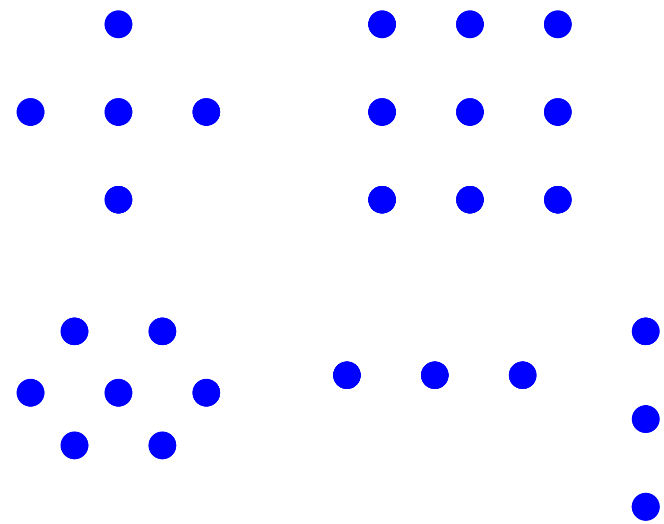
Elément structurant

- forme
- taille
- origine (pas nécessairement dans B)
- exemples :

Continu :



Discret :



Dilatation binaire

- Addition de Minkowski :

$$X \oplus Y = \{x + y \;/\; x \in X, y \in Y\}$$

- Dilatation binaire :

$$\begin{aligned} D(X,B) &= X \oplus \check{B} = \{x + y \;/\; x \in X, y \in \check{B}\} \;(ou \;= X \oplus B) \\ &= \bigcup_{x \in X} \check{B}_x = \{x \in \mathbb{R}^n \;/\; B_x \cap X \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

Dilatation binaire

- Addition de Minkowski :

$$X \oplus Y = \{x + y \ / \ x \in X, y \in Y\}$$

- Dilatation binaire :

$$\begin{aligned} D(X,B) &= X \oplus \check{B} = \{x + y \ / \ x \in X, y \in \check{B}\} \ (ou \ = X \oplus B) \\ &= \bigcup_{x \in X} \check{B}_x = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ B_x \cap X \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

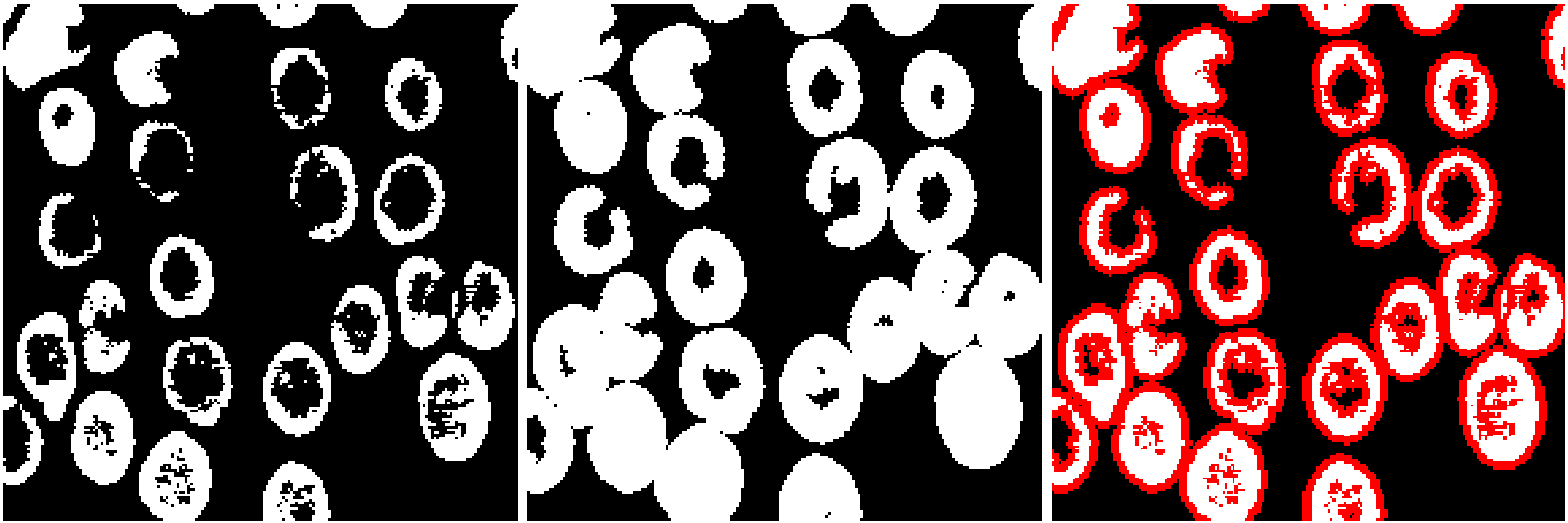
Propriétés de la dilatation :

- extensive ($X \subseteq D(X,B)$) si $O \in B$;
- croissante ($X \subseteq Y \Rightarrow D(X,B) \subseteq D(Y,B)$) ;
- $B \subseteq B' \Rightarrow D(X,B) \subseteq D(X,B')$;
- commute avec la réunion, pas avec l'intersection :

$$D(X \cup Y, B) = D(X,B) \cup D(Y,B), \quad D(X \cap Y, B) \subseteq D(X,B) \cap D(Y,B);$$

- propriété d'itération : $D[D(X,B),B'] = D(X, B \oplus B')$.

Exemple de dilatation



Erosion binaire

$$
\begin{aligned}
E(X,B) &= \{x \in \mathbb{R}^n \;/\; B_x \subseteq X\} \\
&= \{x \;/\; \forall y \in B, x + y \in X\} = X \ominus \check{B}
\end{aligned}
$$

Erosion binaire

$$\begin{aligned} E(X,B) &= \{x \in \mathbb{R}^n \;/\; B_x \subseteq X\} \\ &= \{x \;/\; \forall y \in B, x+y \in X\} = X \ominus \check{B} \end{aligned}$$

Propriétés de l'érosion :

- dualité de l'érosion et de la dilatation par rapport à la complémentation :

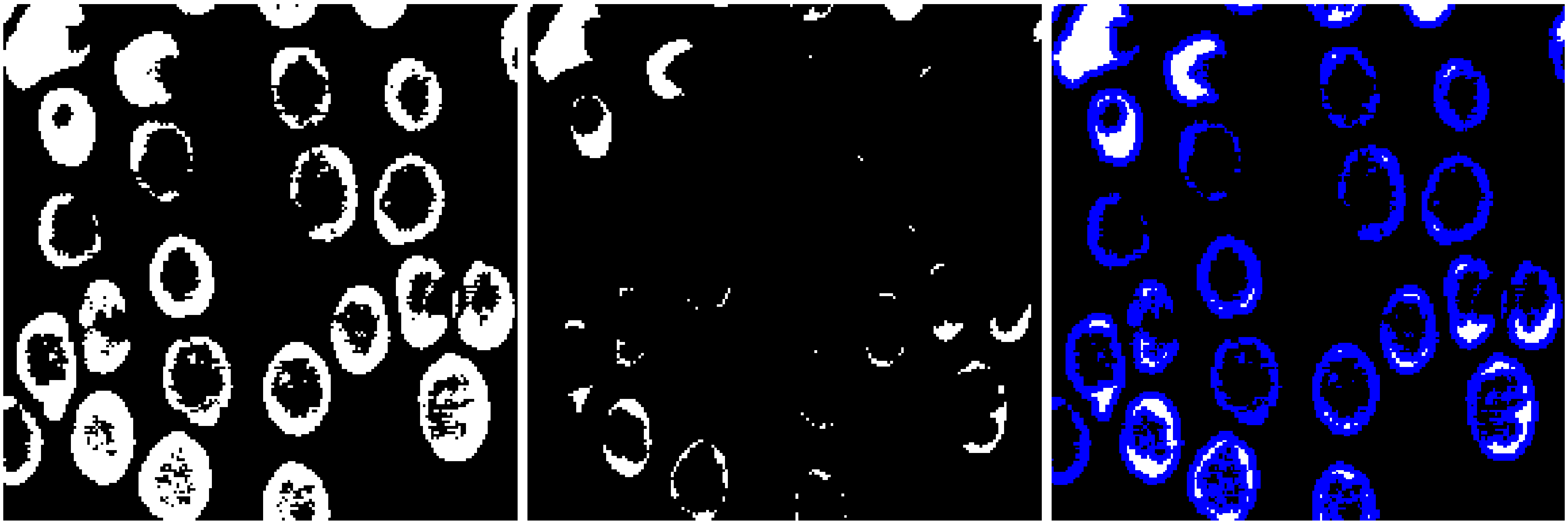
$$E(X,B) = [D(X^C, B)]^C$$

- anti-extensive ($E(X,B) \subseteq X$) si $O \in B$;
- croissante ($X \subseteq Y \Rightarrow E(X,B) \subseteq E(Y,B)$) ;
- $B \subseteq B' \Rightarrow E(X,B') \subseteq E(X,B)$;
- commute avec l'intersection, pas avec la réunion :

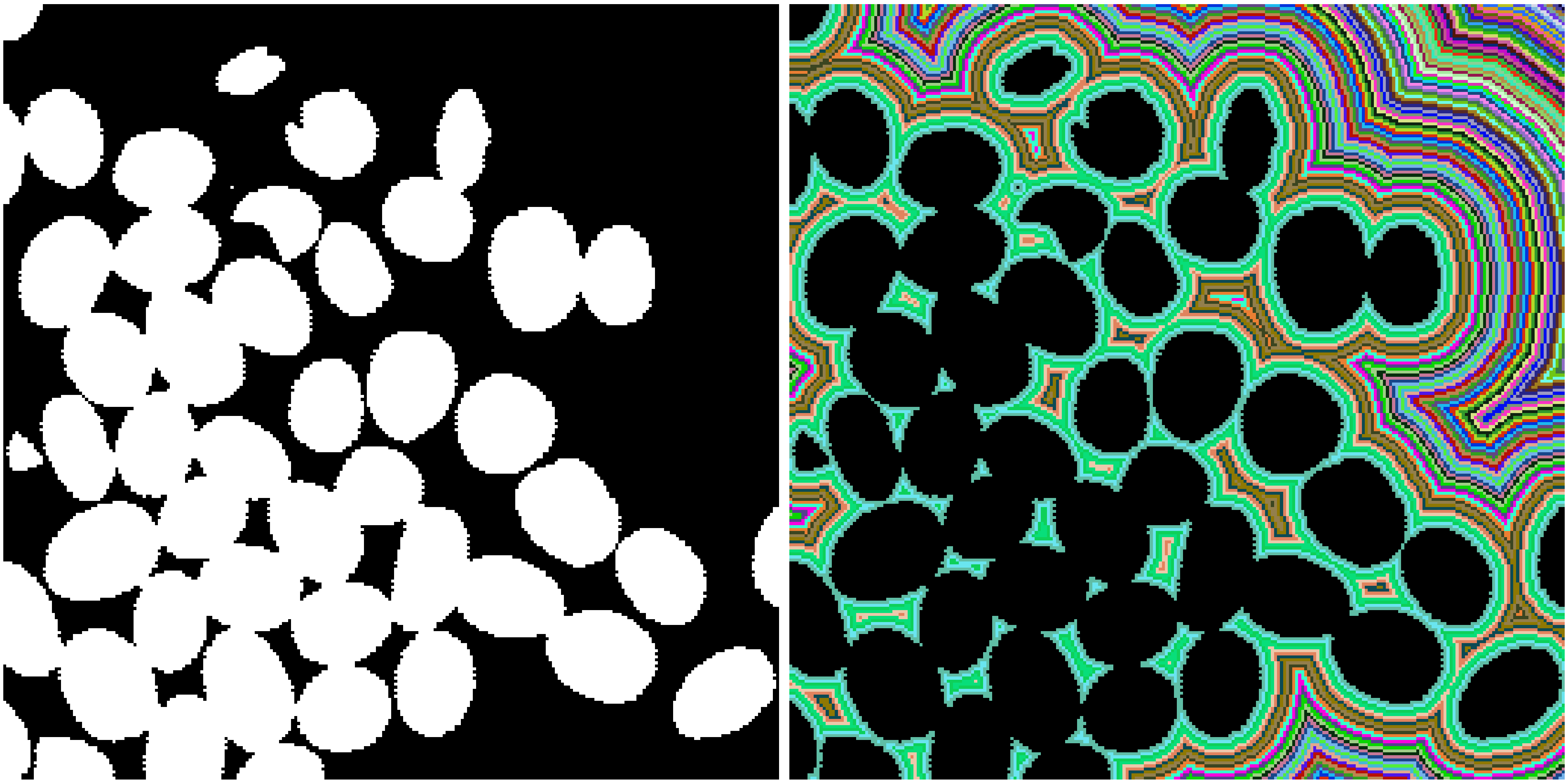
$$E[(X \cap Y), B] = E(X,B) \cap E(Y,B), \quad E[(X \cup Y), B] \supseteq E(X,B) \cup E(Y,B);$$

- propriété d'itération : $E[E(X,B),B'] = E(X, B \oplus B')$.
- $D[E(X,B),B'] \subseteq E[D(X,B'),B]$.

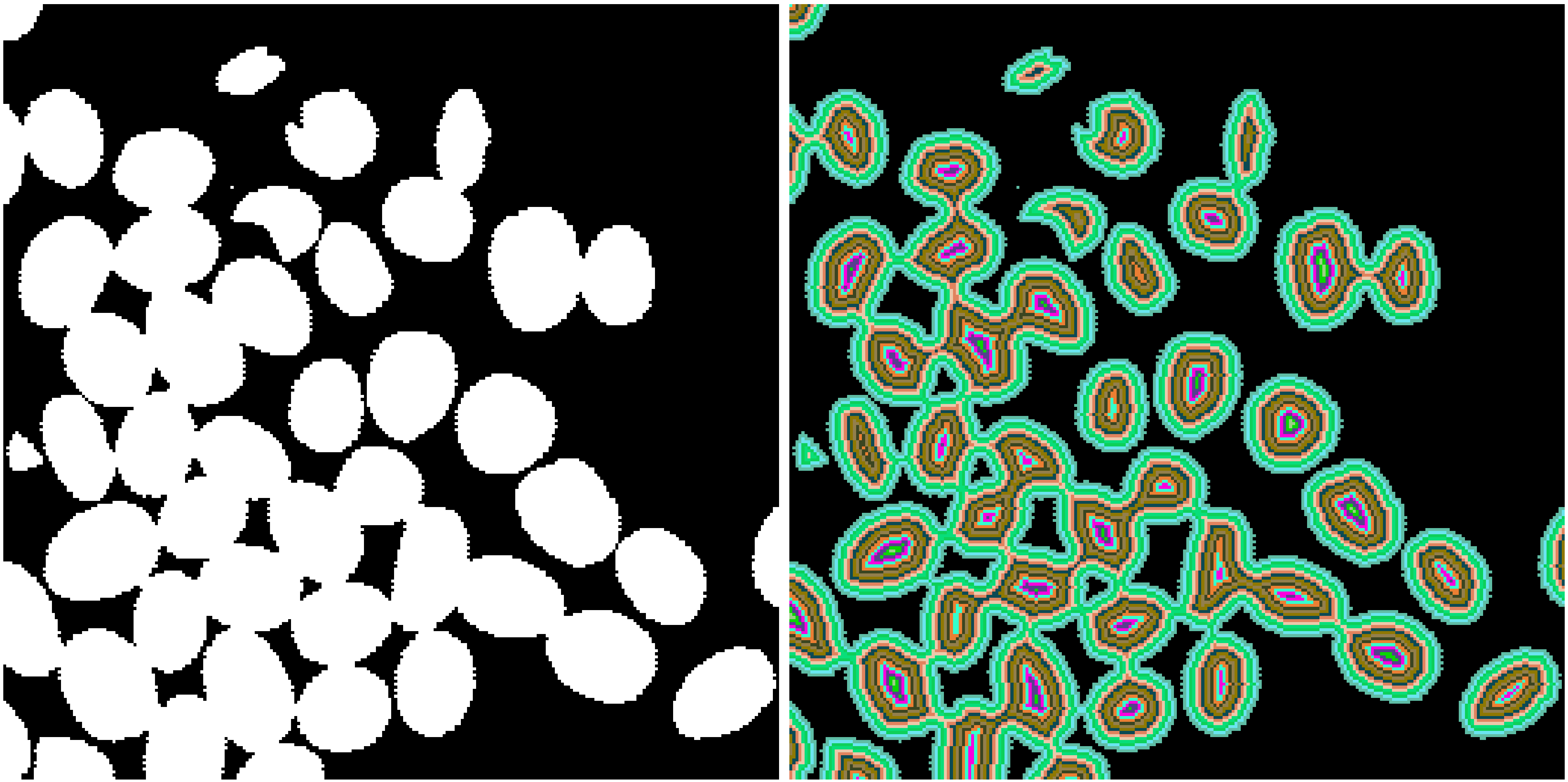
Exemple d'érosion



Liens avec les distances



Liens avec les distances



Ouverture binaire

$$\boxed{X_B = D[E(X,B),\check{B}]}$$

Ouverture binaire

$$\boxed{X_B = D[E(X,B),\check{B}]}$$

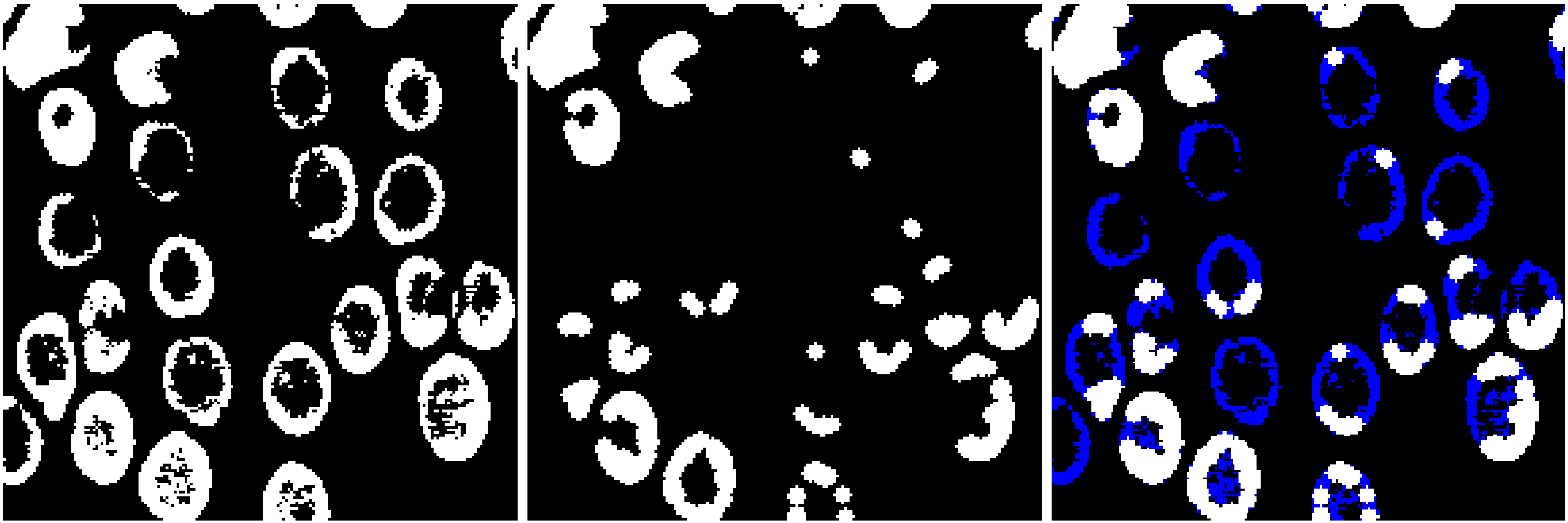
Propriétés de l'ouverture :

- anti-extensive ($X \supseteq X_B$) ;
- croissante ($X \subseteq Y \Rightarrow X_B \subseteq Y_B$) ;
- idempotente ($(X_B)_B = X_B$).

$\Rightarrow$ Filtre morphologique

- $B \subseteq B' \Rightarrow X_{B'} \subseteq X_B$;
- $(X_n)_{n'} = (X_{n'})_n = X_{\max(n,n')}$.

Exemple d'ouverture



Fermeture binaire

$$\boxed{X^B = E[D(X,B),\check{B}]}$$

Fermeture binaire

$$\boxed{X^B = E[D(X,B),\check{B}]}$$

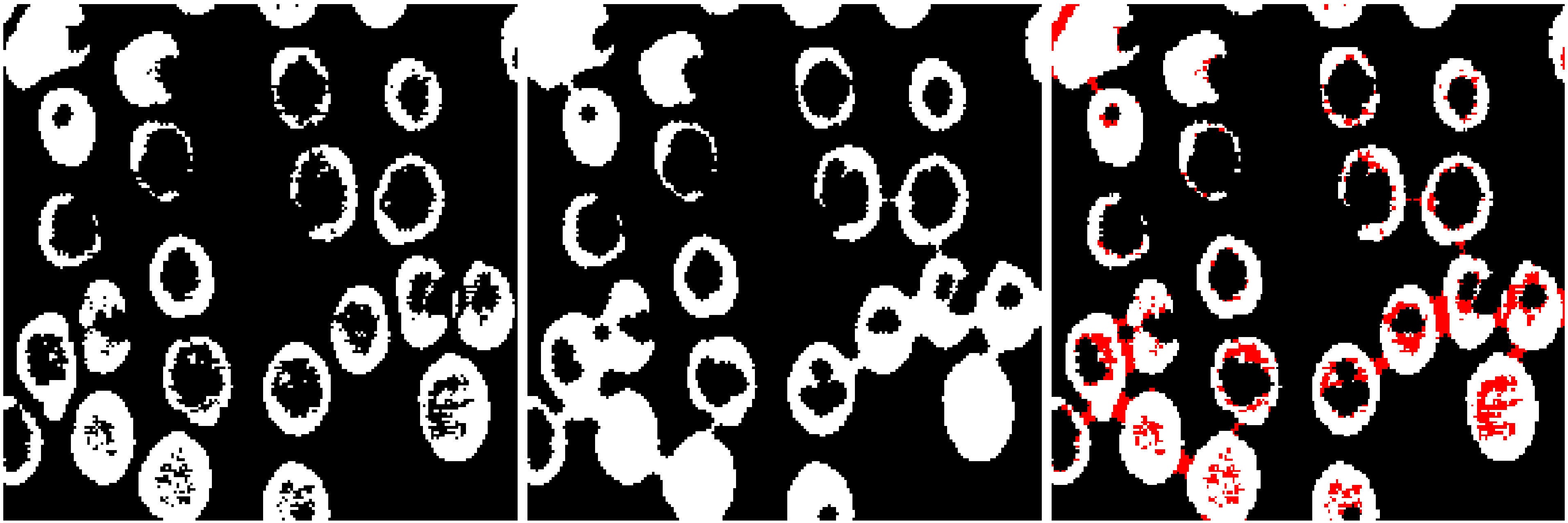
Propriétés de la fermeture :

- extensive ($X \subseteq X^B$) ;
- croissante ($X \subseteq Y \Rightarrow X^B \subseteq Y^B$) ;
- idempotente ($(X^B)^B = X^B$).

$\Rightarrow$ Filtre morphologique

- $B \subseteq B' \Rightarrow X^B \subseteq X^{B'}$;
- $(X^n)^{n'} = (X^{n'})^n = X^{\max(n,n')}$;
- $X^B = [(X^C)_B]^C$.

Exemple de fermeture



Des ensembles aux fonctions

- sous-graphe d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ = sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$
- seuils d'une fonction = ensembles
- équivalents fonctionnels d'opérations binaires :

$$\begin{array}{ccl} \cup & \rightarrow & \sup / \vee \\ \cap & \rightarrow & \inf / \wedge \\ \subseteq & \rightarrow & \leq \\ \supseteq & \rightarrow & \geq \end{array}$$

Dilatation d'une fonction par un élément structurant plan

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad D(f,B)(x) = \sup\{f(y) \ / \ y \in B_x\}}$$

Dilatation d'une fonction par un élément structurant plan

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad D(f,B)(x) = \sup\{f(y) \;/\; y \in B_x\}}$$

Propriétés de la dilatation fonctionnelle :

- extensivité si $O \in B$;
- croissance ;
- $D(f \vee g, B) = D(f,B) \vee D(g,B)$;
- $D(f \wedge g, B) \leq D(f,B) \wedge D(g,B)$.

Exemple de dilatation fonctionnelle

Erosion d'une fonction

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad E(f,B)(x) = \inf\{f(y) \;/\; y \in B_x\}}$$

Erosion d'une fonction

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad E(f,B)(x) = \inf\{f(y)\ /\ y \in B_x\}}$$

Propriétés de l'érosion fonctionnelle :

- les dilatation et érosion fonctionnelles sont des opérations duales ;
- anti-extensivité si $O \in B$;
- croissance ;
- $E(f \vee g, B) \geq E(f,B) \vee E(g,B)$;
- $E(f \wedge g, B) = E(f,B) \wedge E(g,B)$.

Exemple d'érosion fonctionnelle

Ouverture fonctionnelle

$$\boxed{f_B = D[E(f, B), \check{B}]}$$

Ouverture fonctionnelle

$$\boxed{f_B = D[E(f,B),\check{B}]}$$

Propriétés de l'ouverture fonctionnelle :

- anti-extensive ;
- croissante ;
- idempotente.

$\Rightarrow$ filtre morphologique

Exemple d'ouverture fonctionnelle

Fermeture fonctionnelle

$$\boxed{f^B = E[D(f, B), \check{B}]}$$

Fermeture fonctionnelle

$$\boxed{f^B = E[D(f,B), \check{B}]}$$

Propriétés de la fermeture fonctionnelle :

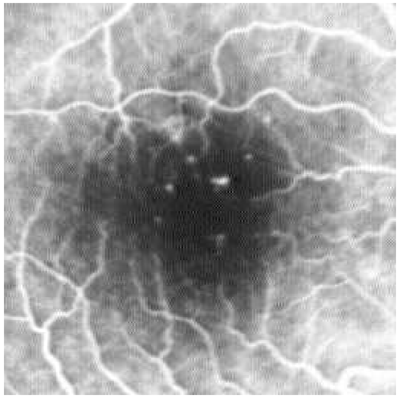
- extensive ;
- croissante ;
- idempotente.

$\Rightarrow$ filtre moprphologique

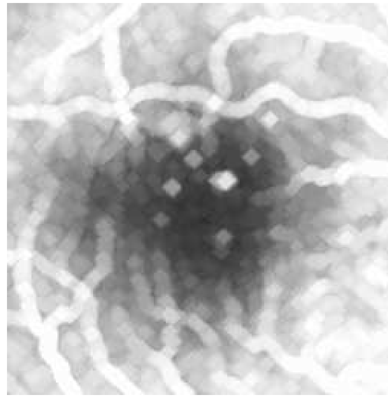
- dualité entre ouverture et fermeture

Exemple de fermeture fonctionnelle

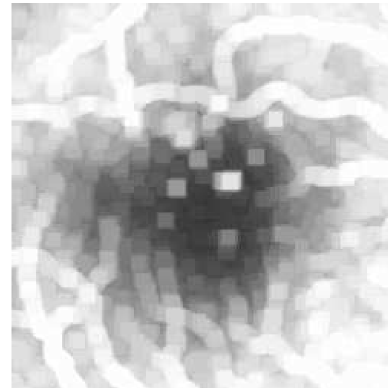
Exemple



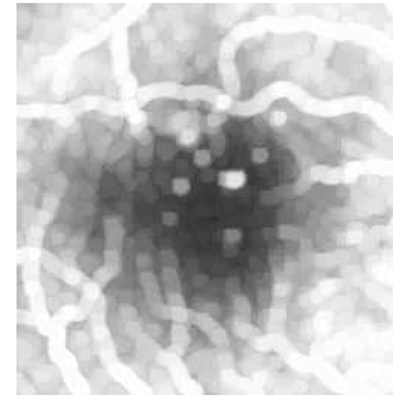
(a)



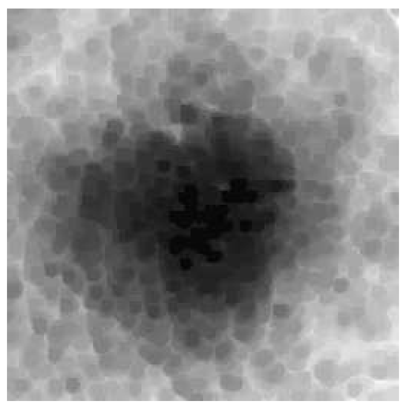
(b)



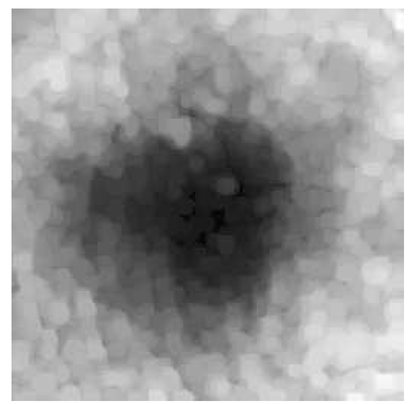
(c)



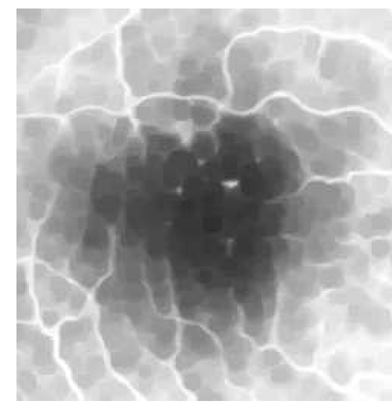
(d)



(e)



(f)



(g)

(a) Image originale. Dilatation de taille 4 par (b) l'élément structurant de la 4-connexité, (c) l'élément structurant de la 8-connexité, (d) une approximation discrète d'un disque. (e) Erosion de taille 4 par l'élément de la 4-connexité. (f) Ouverture de taille 4 correspondante. (g) Fermeture de taille 4.

Eléments structurants fonctionnels

Dilatation :

$$D(f,g)(x) = \sup_y \{f(y) + g(y-x)\}$$

Erosion :

$$E(f,g)(x) = \inf_y \{f(y) - g(y-x)\}$$

Elément structurant plan :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur un compact } B \\ -\infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Quelques applications de la dilatation et de l'érosion

Quelques applications de la dilatation et de l'érosion

Rehaussement de contraste

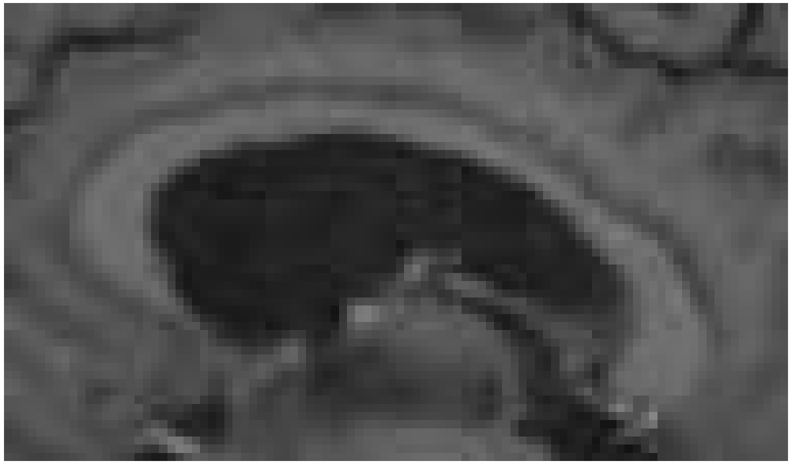
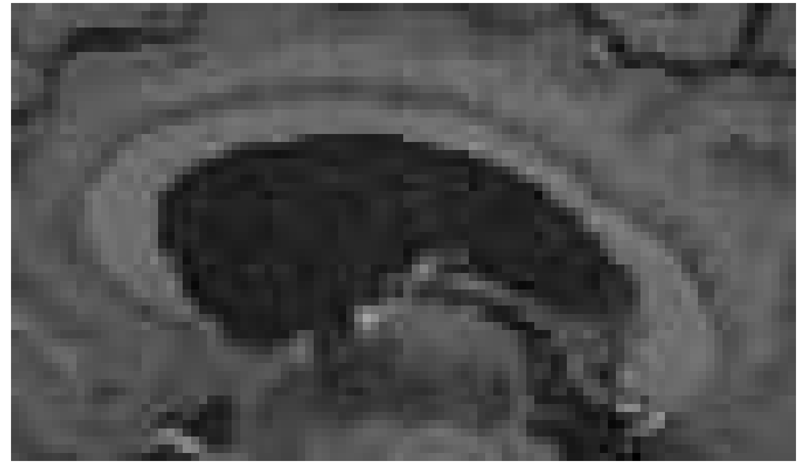
Quelques applications de la dilatation et de l'érosion

Rehaussement de contraste : ES 15, $\alpha = \beta = 0.2$, $\alpha = \beta = 0.3$, $\alpha = \beta = 0.5$

Quelques applications de la dilatation et de l'érosion

Rehaussement de contraste : ES 30, $\alpha = \beta = 0.2$, $\alpha = \beta = 0.3$, $\alpha = \beta = 0.5$

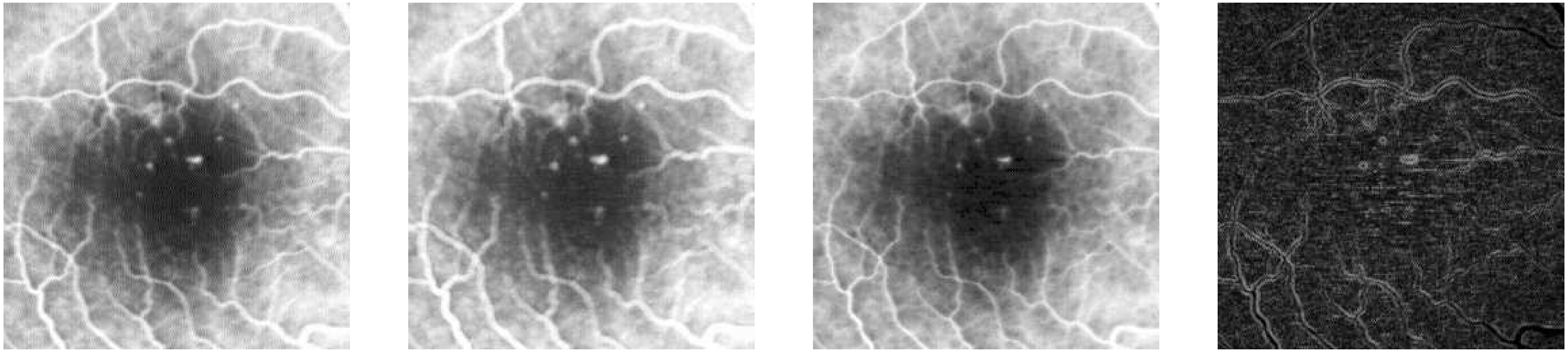
Quelques applications de la dilatation et de l'érosion

Quelques applications de la dilatation et de l'érosion

Gradient morphologique : $\boxed{D_B(x) - E_B(x)}$

Quelques applications de la dilatation et de l'érosion



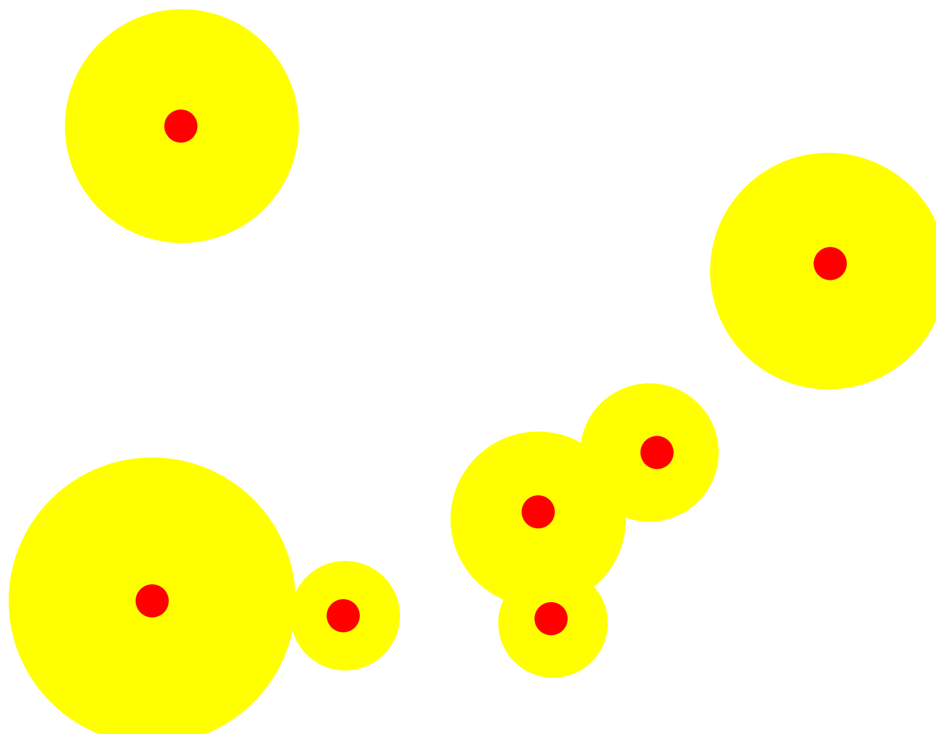
Quelques applications de la dilatation et de l'érosion

Erodé ultime :

$$EU(X) = \cup_n \{E(X, B_n) \setminus R[E(X, B_{n+1}); E(X, B_n)]\}$$

- $E(X, B_n)$: l'érodé de X de taille n
- $R[Y; Z]$: composantes connexes de Z qui ont une intersection non vide avec Y

= ensemble des maxima régionaux de la fonction distance $d(x, X^C)$.



Filtres alternés séquentiels

$$\boxed{(...(((f_{B_1})^{B_1})_{B_2})^{B_2})..._{B_n})^{B_n}}$$

Filtres alternés séquentiels

$$\boxed{(...(((f_{B_1})^{B_1})_{B_2})^{B_2})..._{B_n})^{B_n}}$$

Filtres alternés séquentiels

$$\boxed{(\ldots(((f_{B_1})^{B_1})_{B_2})^{B_2})\ldots_{B_n})^{B_n}}$$

Chapeau haut-de-forme

$$\boxed{f - f_B}$$

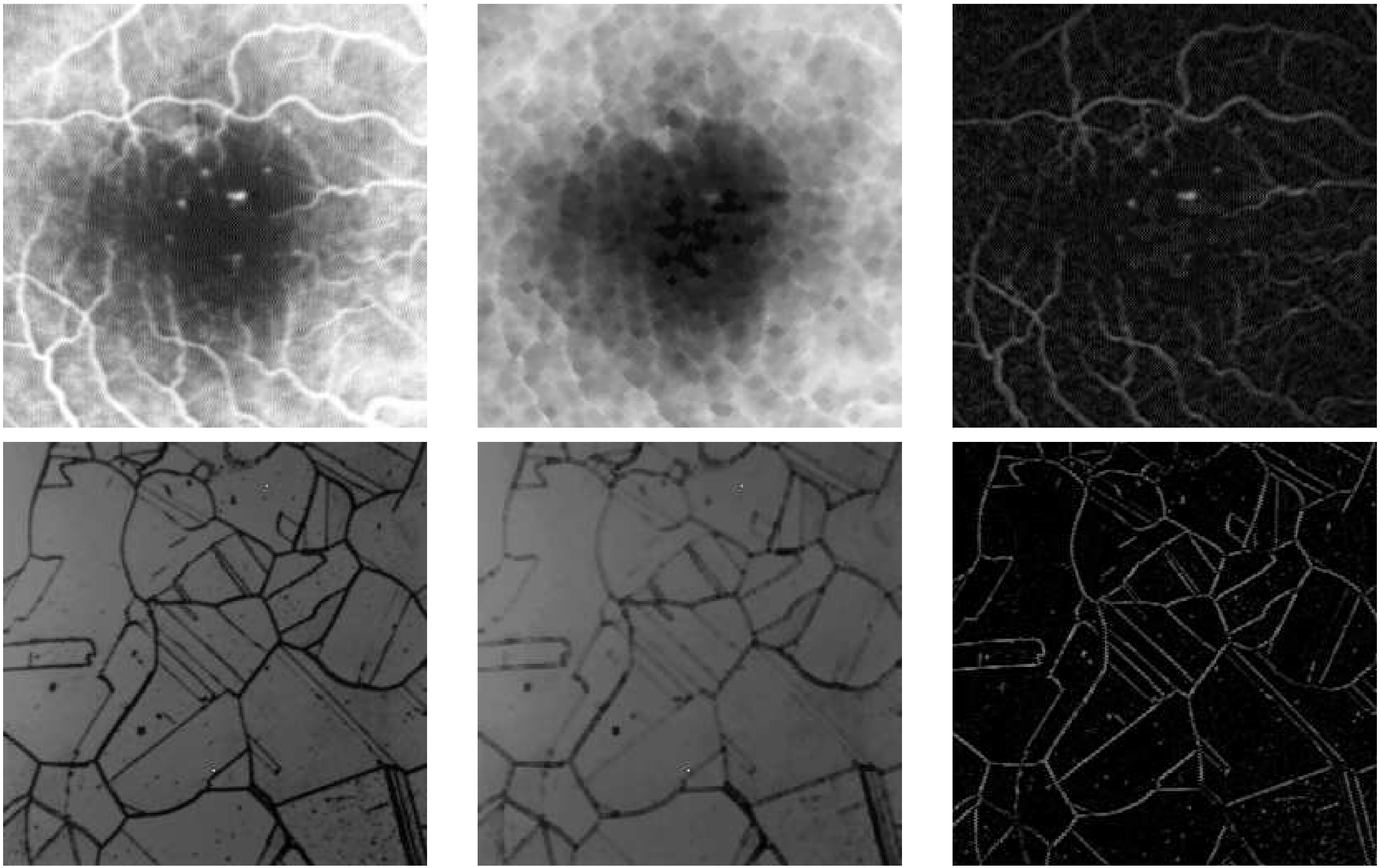
Chapeau haut-de-forme

$\boxed{f - f_B}$

Chapeau haut-de-forme

$\boxed{f - f_B}$

Chapeau haut-de-forme : autres exemples



Choix de l’élément structurant

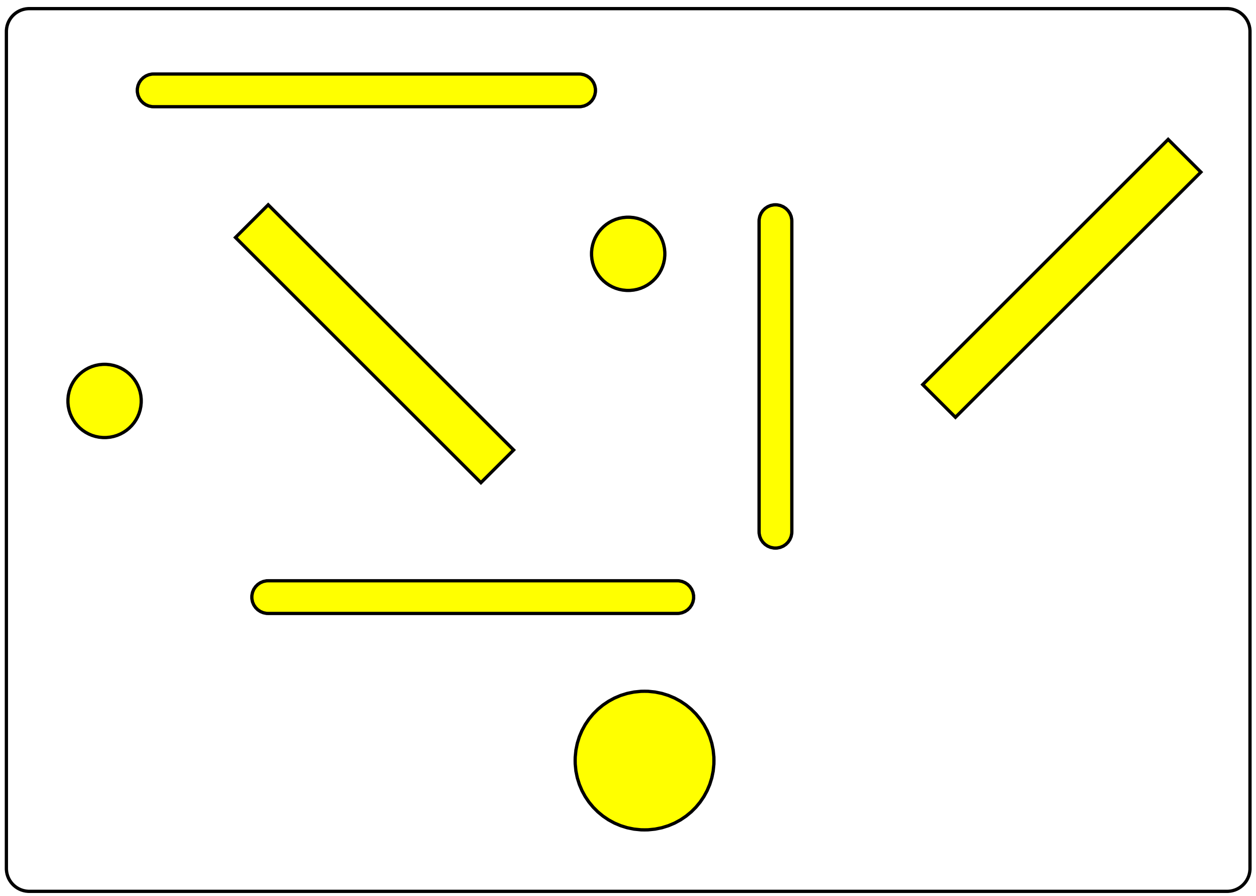
- fonction de ce que l’on veut supprimer / garder
- forme
- taille

Exemple : ouverture par un disque ou par des segments ?

Choix de l'élément structurant

- fonction de ce que l'on veut supprimer / garder
- forme
- taille

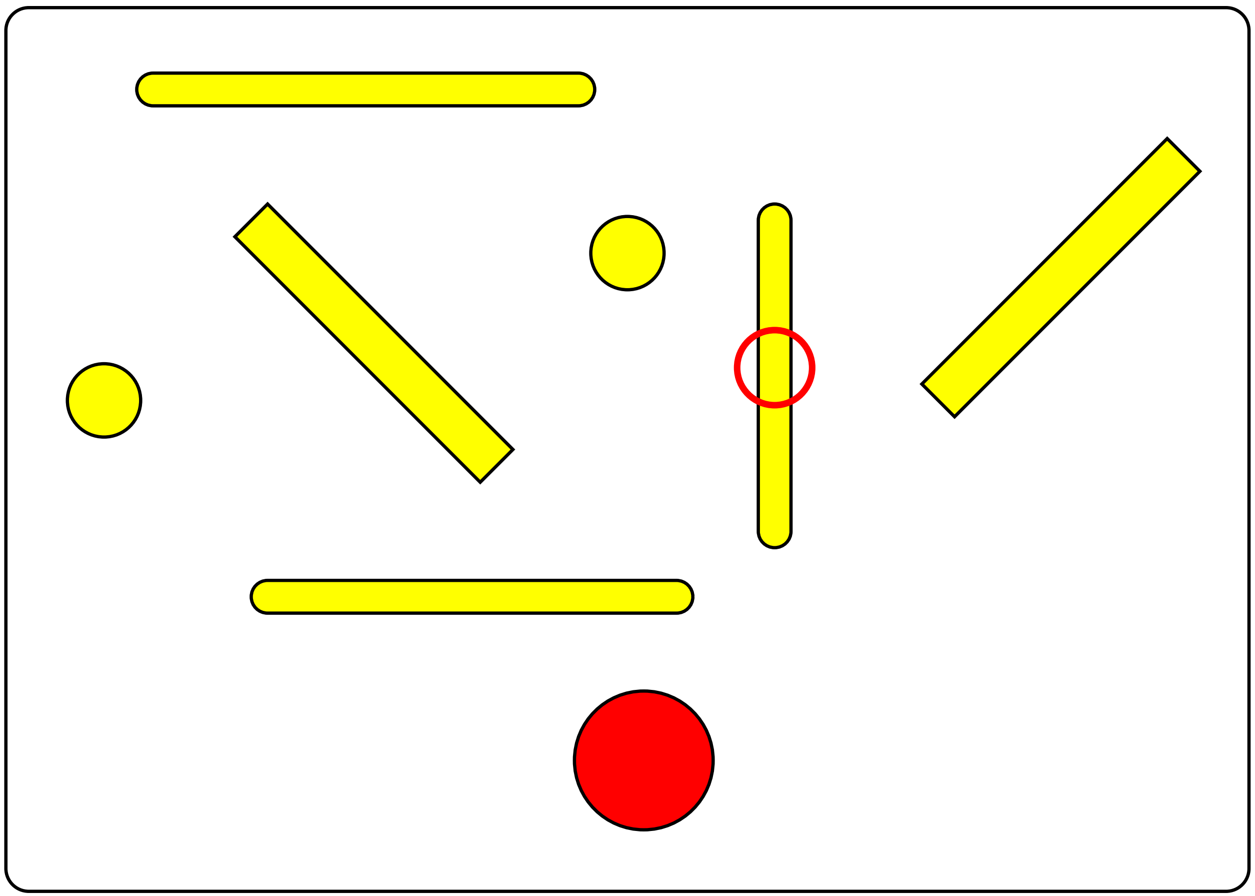
Exemple : ouverture par un disque ou par des segments ?



Choix de l'élément structurant

- fonction de ce que l'on veut supprimer / garder
- forme
- taille

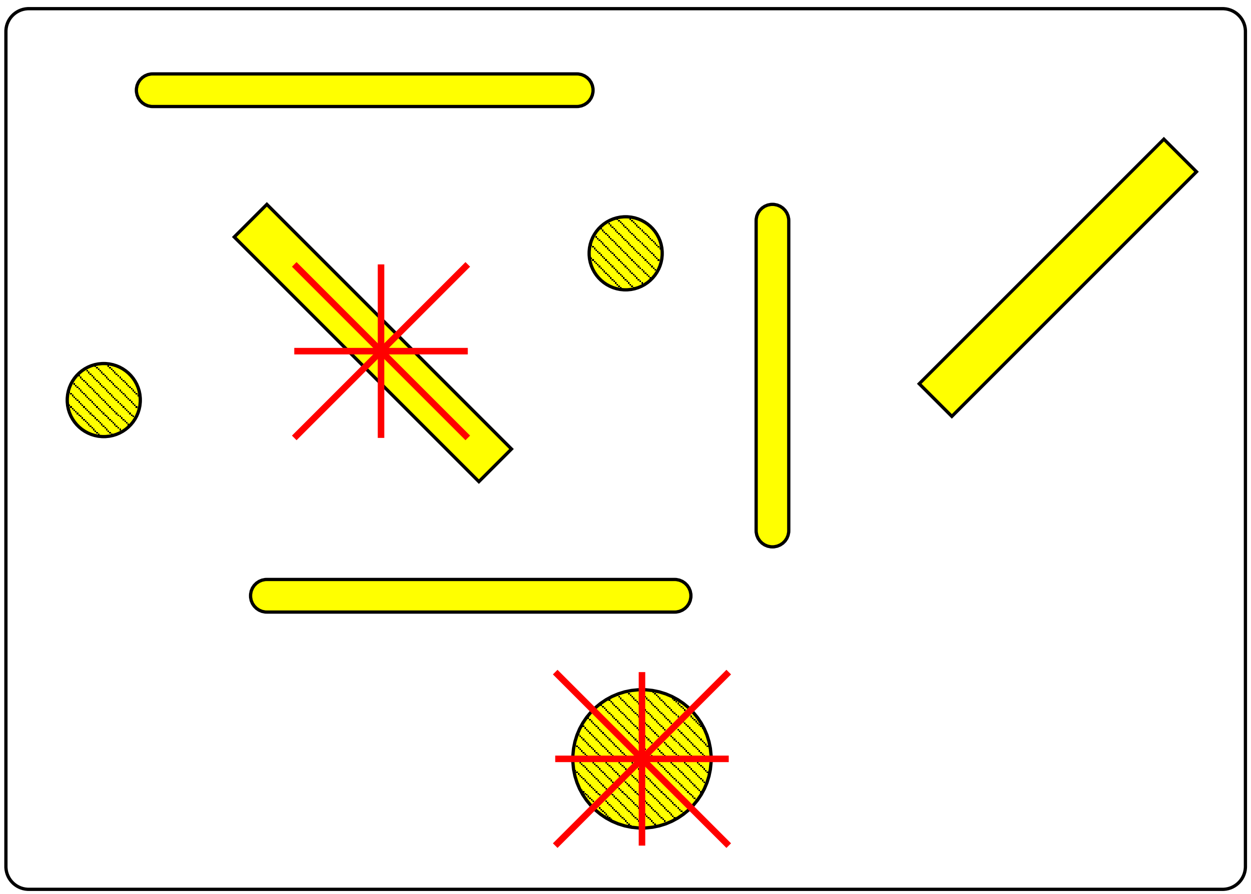
Exemple : ouverture par un disque ou par des segments ?



Choix de l'élément structurant

- fonction de ce que l'on veut supprimer / garder
- forme
- taille

Exemple : ouverture par un disque ou par des segments ?



Rq : une réunion d'ouvertures est une ouverture

Fonctions vectorielles (images en couleur)

- Problème principal : choix d'un ordre
- max (ou min) composante par composante : pas de bonnes propriétés

Dilatation