

# *Reconstruction tomographique*

Isabelle Bloch

Isabelle.Bloch@telecom-paristech.fr

<http://perso.telecom-paristech.fr/bloch>

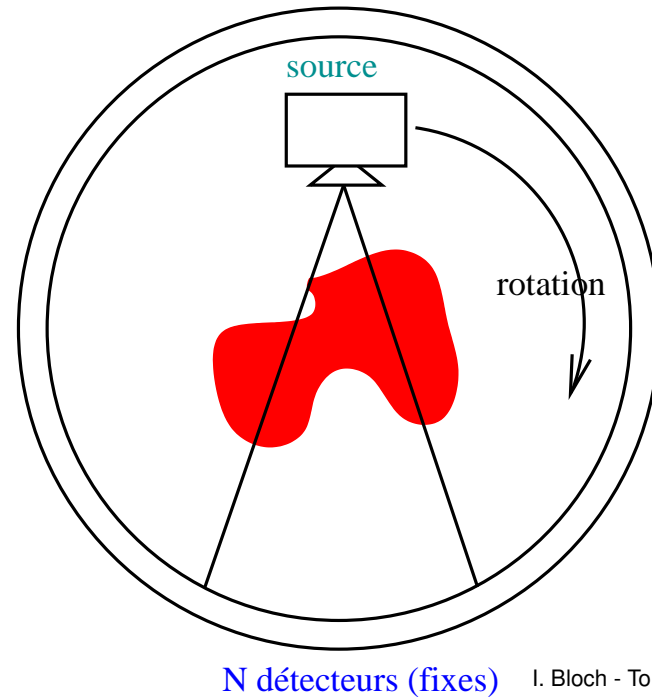
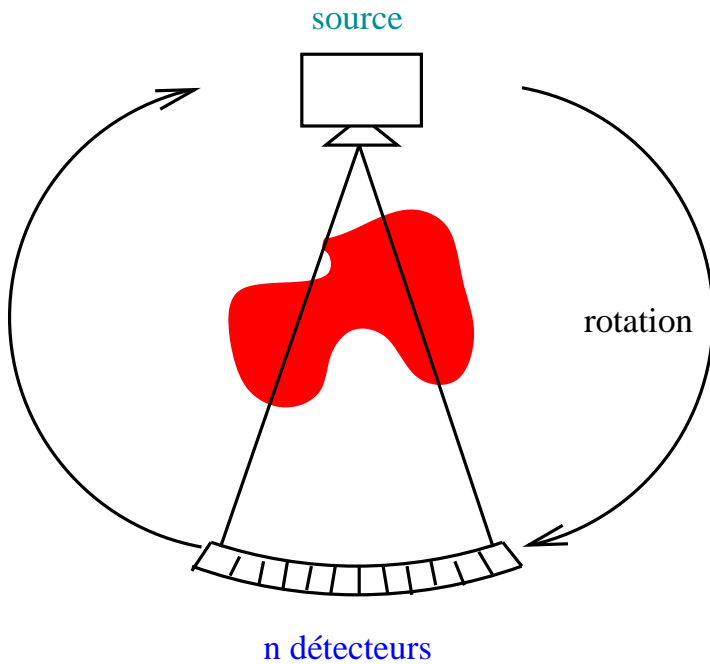
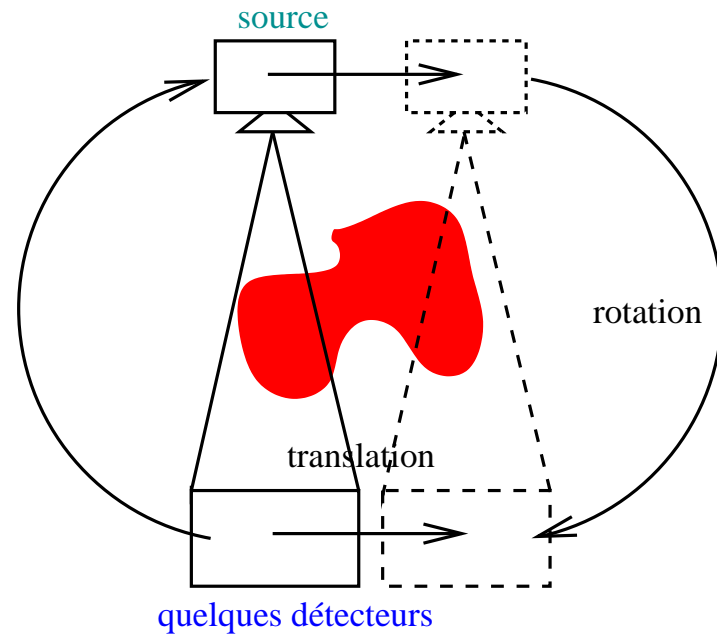
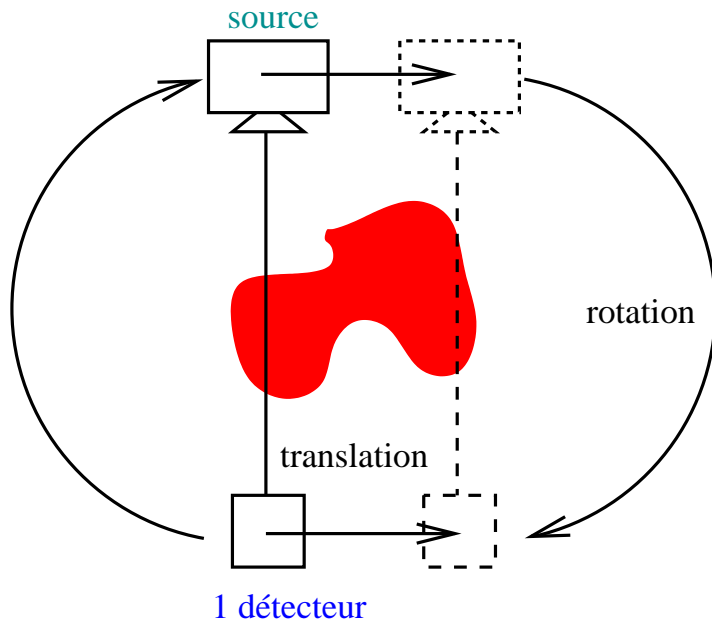
LTCI, Télécom ParisTech



# *Contenu du cours*

- Principe physique de la tomographie (à rayons X)
  - Atténuation
  - Projection
- Inversion : rétroprojection
- Méthodes analytiques
  - TF discrète
  - Déconvolution
- Méthodes algébriques
- Régularisation
- Extensions
  - Géométrie conique
  - Données incomplètes
  - 3D

# Systemes d'acquisition : 4 generations



# Principe physique de la tomographie à rayons X

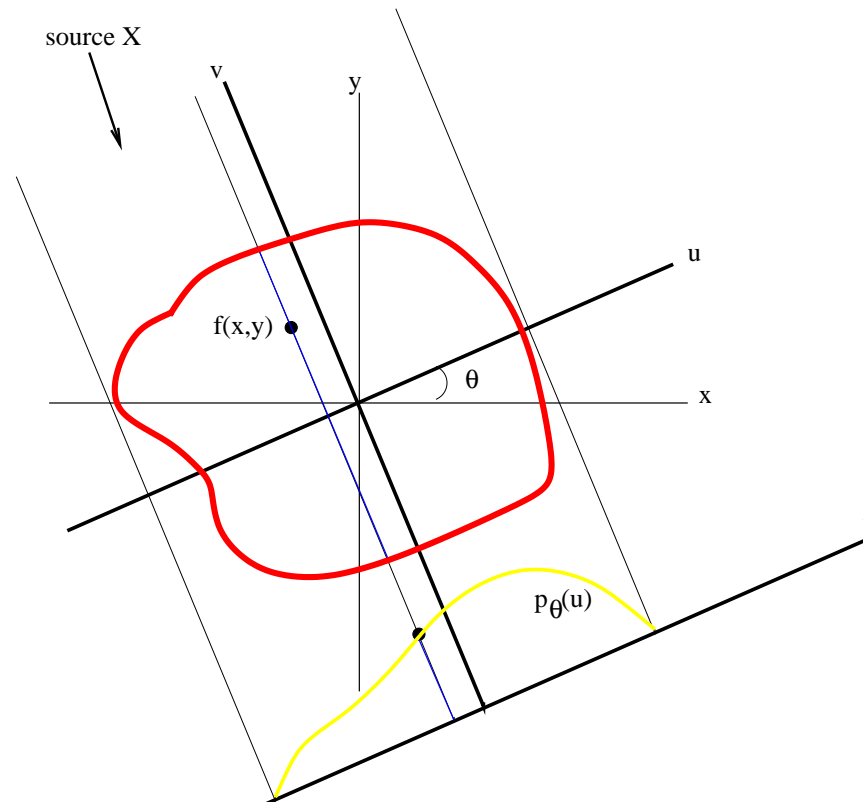
## Atténuation

Faisceau de rayons X monochromatique :

$$I = I_0 \exp\left(-\int_{-\infty}^{+\infty} f dv\right)$$

$f(x, y)$  = atténuation au point  $(x, y)$  = fonction à reconstruire

## Principe d'acquisition



# *Autres modalités*

- médecine nucléaire (SPECT, TEP)
- tomographie d'impédance électrique
- ...

Principes physiques différents, mais problèmes de reconstruction similaires

# Transformation de Radon

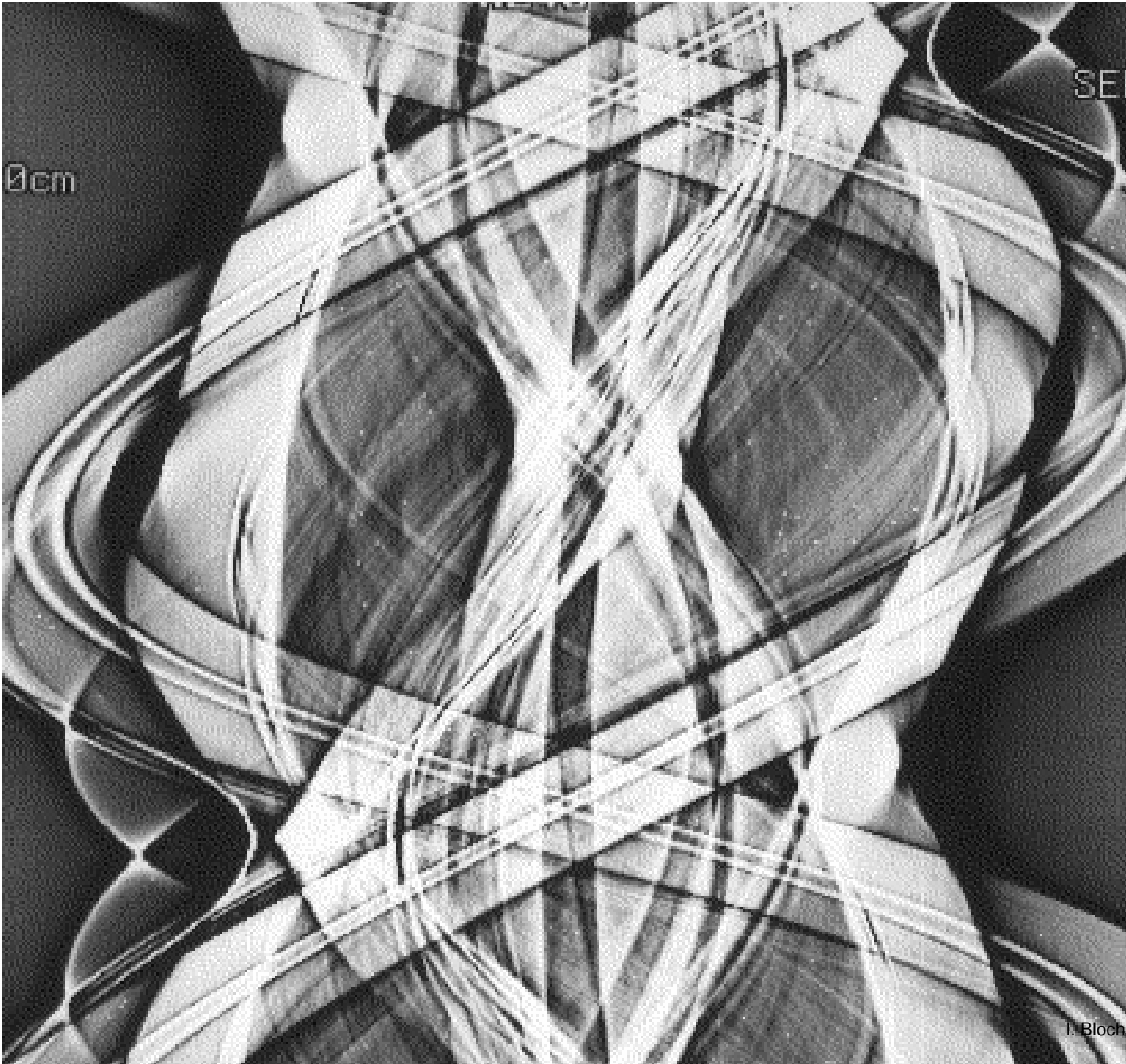
$$\begin{aligned} R[f](u, \theta) &= p_\theta(u) \\ &= \int_{D_\theta} f(u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta) dv \end{aligned}$$

$$\text{Rq : } p_\theta(u) = p_{\theta+\pi}(-u)$$

Reconstruction :

$$\{p_\theta(u), \theta \in [0, \pi[, u \in \mathbb{R}\} \rightarrow \{f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

# Sinogramme



# Rétroprojection

- d'une projection :

$$h_{\theta}(x, y) = p_{\theta}(x \cos \theta + y \sin \theta)$$

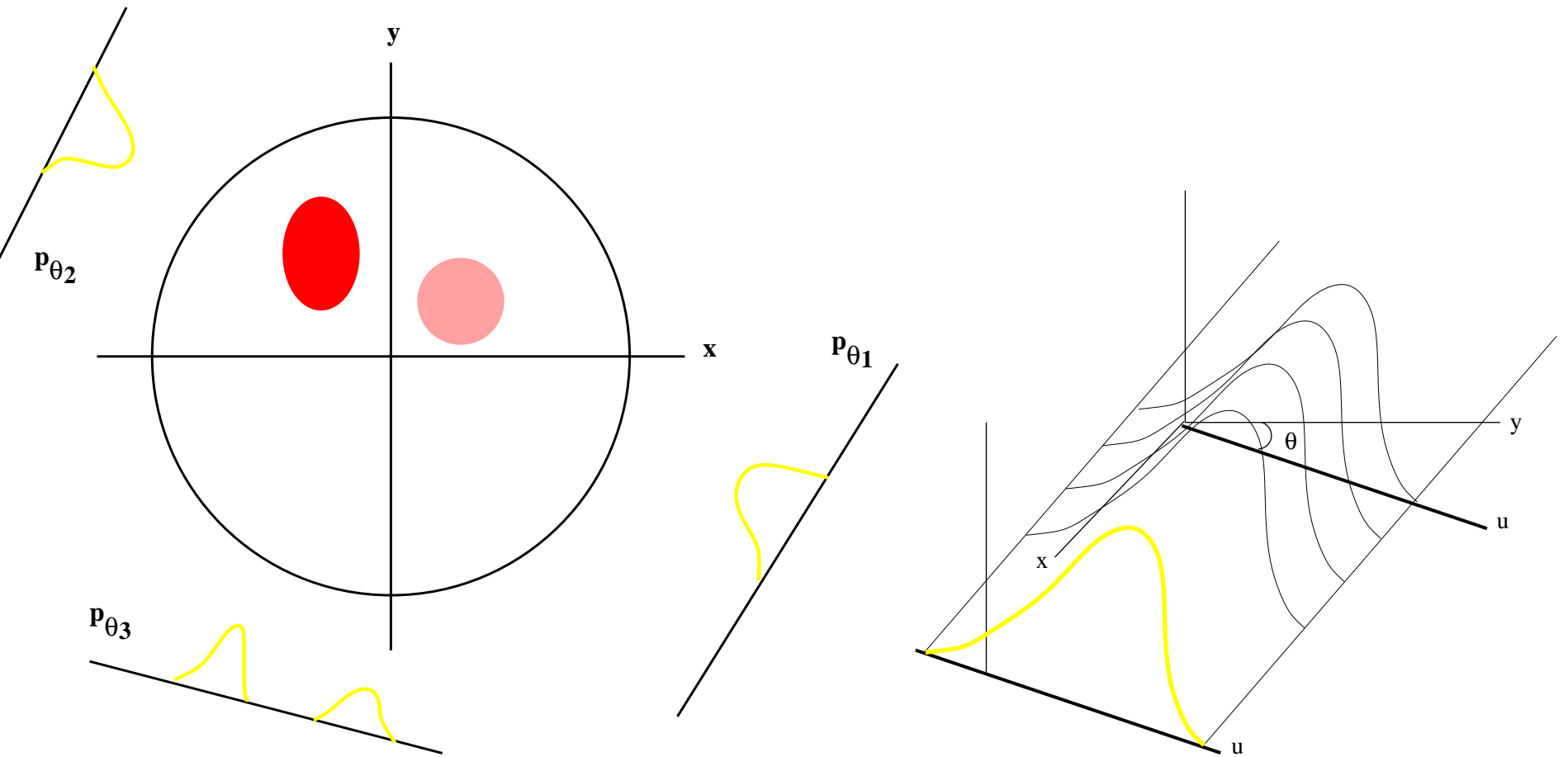
(valeur en  $(x, y)$  de la projection d'angle  $\theta$   
au point sur lequel se projette  $(x, y)$ )

- de toutes les projections :

$$B[p](x, y) = \int_0^{\pi} p_{\theta}(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta$$



# Rétroprojection

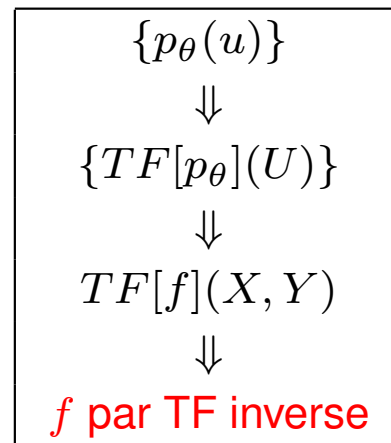


# *Inversion*

Théorème de projection

$$TF[p_\theta](U) = TF[f](U \cos \theta, U \sin \theta)$$

⇒ schéma de reconstruction :



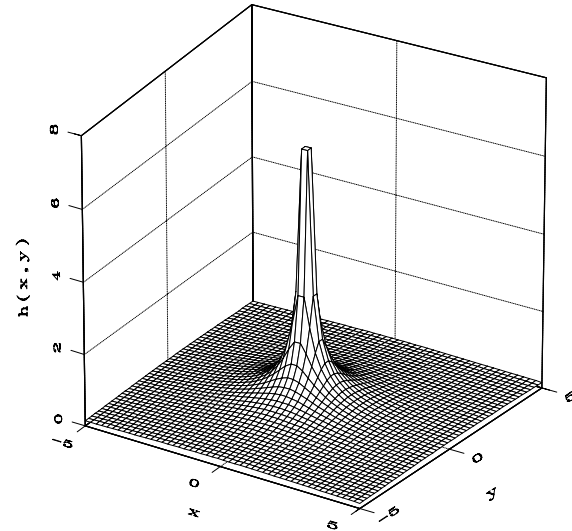
= Inversion directe (TF 1D + TFI 2D)

# Inversion

## Théorème de rétroprojection

$$B[p](x, y) = (f * h)(x, y)$$

$$\text{avec } h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



⇒ reconstruction par déconvolution :

$$f = TFI [ TF(B[p]) \cdot \rho ]$$

$$\text{avec } \rho(X, Y) = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

(filtrage et TF 2D)

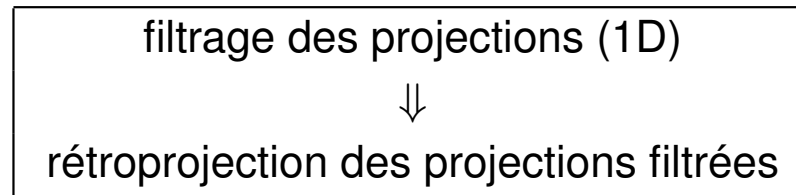
# Inversion

Rétroprojection filtrée

$$f = B[\tilde{p}]$$

$$\text{avec } \tilde{p}_\theta = TFI [ TF[p_\theta](U) \cdot |U| ]$$

⇒ schéma de reconstruction :



En pratique : filtrage par  $H(U) = |U| \cdot W(U)$

$W(U)$  : passe-bas

⇒ compromis résolution spatiale / bruit

# Discrétisation

- Cas continu idéal :
  - domaine  $\mathbb{R}^2$
  - fonction  $f$  continue
  - $p_\theta$  continues, connues  $\forall \theta \in [0, \pi[$
- En pratique :
  - $p_\theta$  pour un nombre fini de  $\theta_k$  (système d'acquisition)
  - $p_{\theta_k}$  connues aux points discrets  $u_l$  (détecteurs)
  - $f$  reconstruite en un nombre fini de points (algorithmes numériques)

reconstruction :

$$\begin{aligned} & \{p_{\theta_k}(u_l), 0 \leq l < NP, 0 \leq k < M\} \\ \rightarrow & \{f(x_i, y_j), 0 \leq i < N, 0 \leq j < N\} \end{aligned}$$

avec :

$$\theta_k = k\Delta\theta \quad u_l = ld$$

$$x_i = i\Delta x \quad y_j = j\Delta y$$

$$\left(\Delta\theta = \frac{\pi}{M}\right)$$

# *Deux classes de méthodes discrètes*

- analytiques :
  - opérateurs discrets
  - discrétisation des formules d'inversion
- algébriques :
  - discrétisation de l'équation de projection
  - résolution d'un système linéaire

# Discrétisation des méthodes analytiques

## Discrétisation des opérateurs

- TFD :

$$F_k = \sum_{l=0}^{N-1} f_l \exp\left(\frac{-2\pi}{N} lk\right)$$

recouvrement de spectre  $\Rightarrow$  Shannon  
 $\Rightarrow$  spectre limité

- Rétroprojection discrète :

$$B[p](x_i, y_j) = \frac{\pi}{M} \sum_{k=0}^{M-1} p_{\theta_k} (x_i \cos \theta_k + y_j \sin \theta_k)$$

$$x_i \cos \theta_k + y_j \sin \theta_k \neq u_l$$

$\Downarrow$

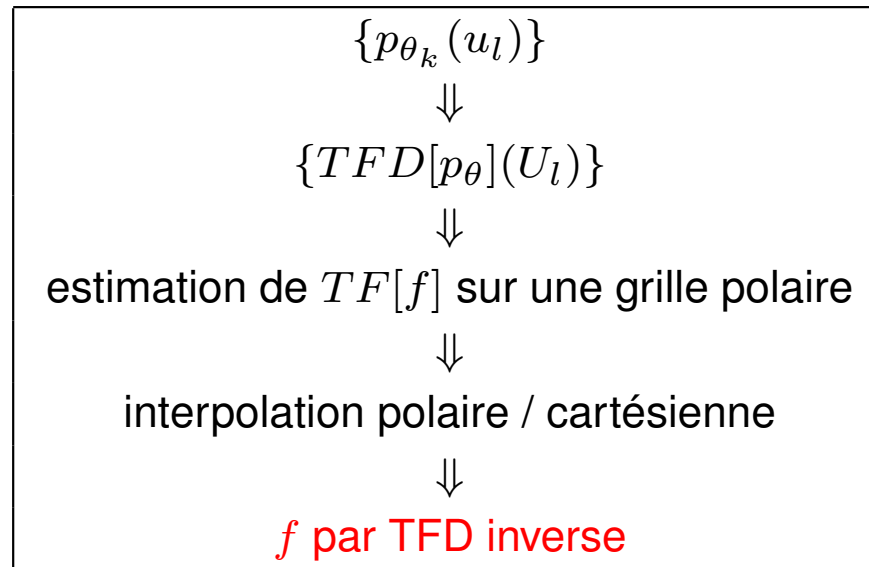
interpolation  
ou pré-interpolation des  $p_{\theta}$

# Discrétisation des méthodes analytiques

Reconstruction par inversion directe

$$TFD[p_{\theta_k}](U_l) = TFD[f](U_l \cos \theta_k, U_l \sin \theta_k)$$

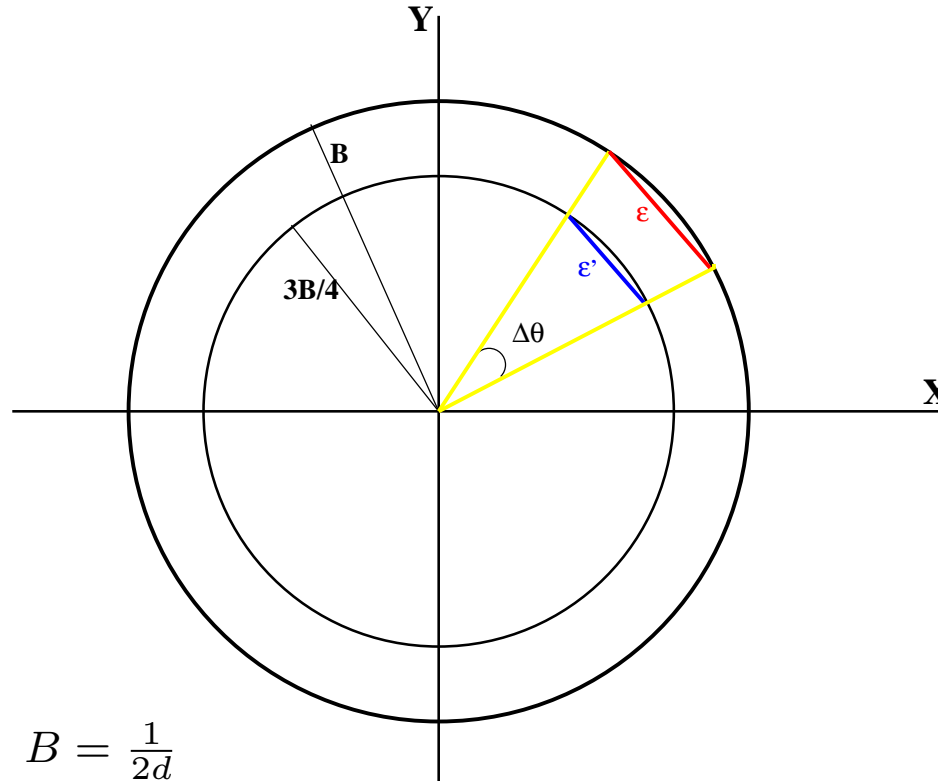
⇒ schéma de reconstruction :





# Discrétisation des méthodes analytiques

## Echantillonnage



Projections :  $d \Rightarrow B = \frac{1}{2d}$

Plan de Fourier :

- radial :  $\rho = \frac{2B}{NP} = \frac{1}{dNP}$
- azimutal :  $\varepsilon = \rho \Rightarrow \Delta\theta = \frac{2}{NP}$
- ou :  $\varepsilon' = \rho_{3B/4} = \frac{3}{4}B\Delta\theta = \frac{2B}{NP} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{8}{3NP}$   
 $\Rightarrow M(\text{nombre de projections})$

# *Discrétisation des méthodes analytiques*

## Reconstruction par déconvolution 2D

- rétroprojection discrète de toutes les projections
- déconvolution par TFD
  - sur image plus grande (repliement de spectre)
  - filtre + fenêtre (données bruitées)

# Discrétisation des méthodes analytiques

Reconstruction par rétroprojection discrète

Filtrage des projections :

$$B = \frac{1}{2d}$$

↓

$$TF(k)(U) = \begin{cases} |U| & \text{si } |U| < B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Ramachandran et Lakshminarayanan :

$$TF(\hat{k})(U) = |U| \text{Rect}_B(U)$$

$$\Rightarrow \hat{k}(u) = 2B^2 \left( \frac{\sin(2\pi Bu)}{2\pi Bu} \right) - B^2 \left( \frac{\sin(\pi Bu)}{\pi Bu} \right)^2$$

$$\Rightarrow k\left(\frac{m}{2B}\right) = \begin{cases} B^2 & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{si } m \text{ pair et } \neq 0 \\ \frac{-4B^2}{m^2\pi^2} & \text{si } m \text{ impair} \end{cases}$$

# Discrétisation des méthodes analytiques

## Reconstruction par rétroprojection discrète

- Shepp et Logan :

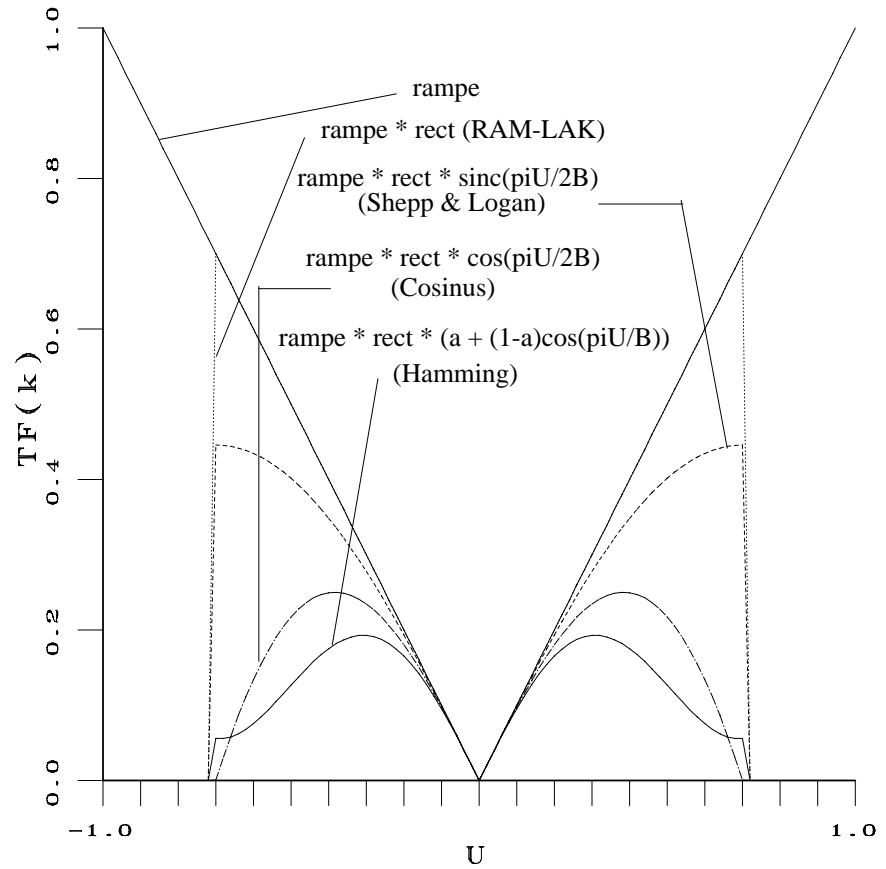
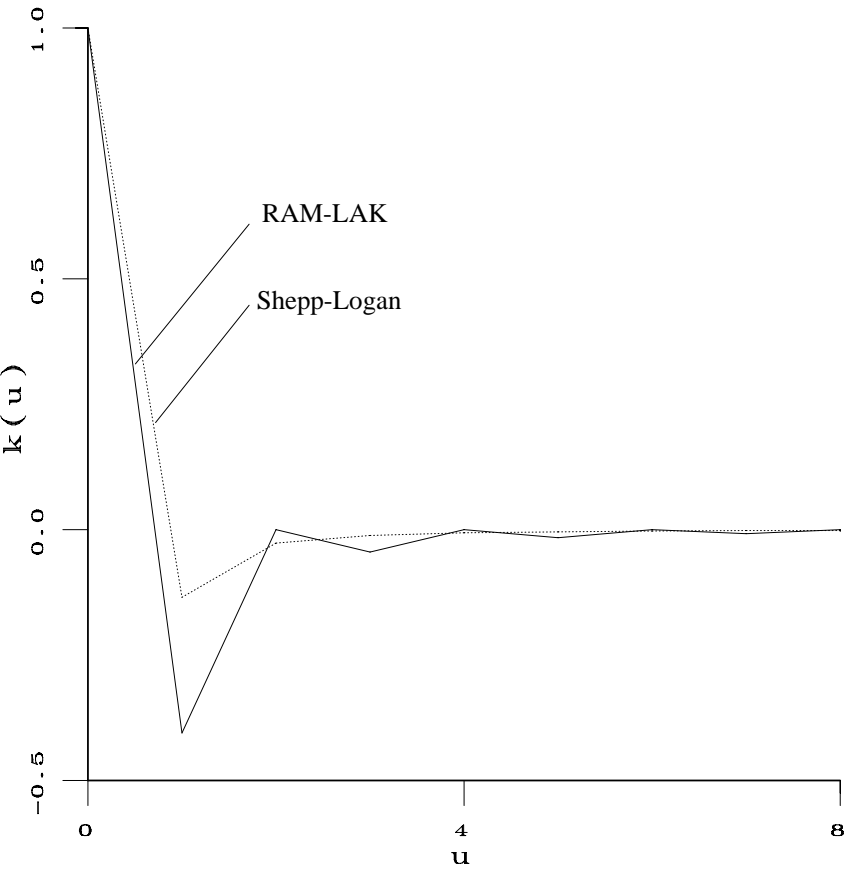
$$TF(\hat{k})(U) = |U| \text{Rect}_B(U) \frac{\sin\left(\frac{\pi U}{2B}\right)}{\frac{\pi U}{2B}}$$

$$\Rightarrow k\left(\frac{m}{2B}\right) = \frac{-4B^2}{\pi^2(4m^2 - 1)}$$

- Autres fenêtres : cosinus, Hamming, etc.
- Mise en œuvre :
  - convolution discrète
  - ou dans le domaine de Fourier (FFT)
- Avantages :
  - traitements 1D
  - traitement de chaque projection dès qu'elle est acquise

# Discretisation des méthodes analytiques

## Reconstruction par rétroprojection discrète



# Méthodes algébriques de reconstruction

$f$  sous la forme :

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n f_i \varphi_i(x, y)$$

Base la plus utilisée : celle des pixels

$$\varphi_i(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) = \text{pixel } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

⇓

$$p_j = \sum_{i=1}^n R_{ji} f_i$$

⇓

$$p = Rf$$

avec  $p_j = p_{\theta_k}(u_l)$  et  $R_{ji} = \int \varphi_i(u_l \cos \theta_k - v \sin \theta_k, u_l \sin \theta_k + v \cos \theta_k) dv$

# Méthodes algébriques de reconstruction

- $p$  : vecteur de mesures

taille  $m = M \times NP = \text{nbre projections} \times \text{nbre de points / proj.}$

- $f$  : vecteur des valeurs recherchées en chaque pixel

taille  $n = N \times N = \text{nbre pixels}$

- $R$  : matrice de projection

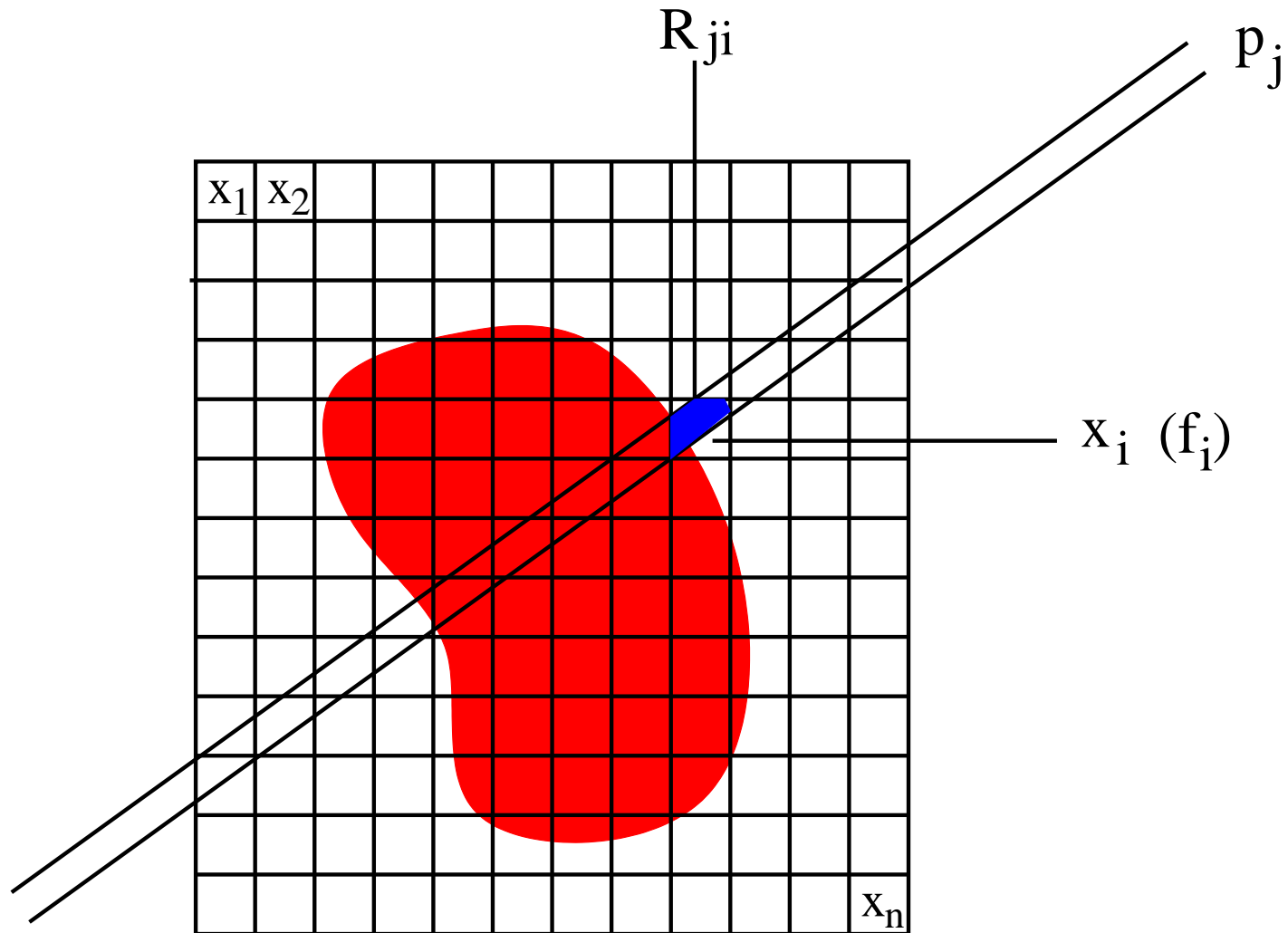
taille  $m \times n$   
ne dépend que de l'acquisition

$$R_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si le rayon } j \text{ rencontre le pixel } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ou mieux :

$$R_{ji} \propto \text{surface de recouvrement rayon } j / \text{pixel } i$$

# Méthodes algébriques de reconstruction





# Méthodes algébriques de reconstruction

Problèmes liés à l'inversion directe :

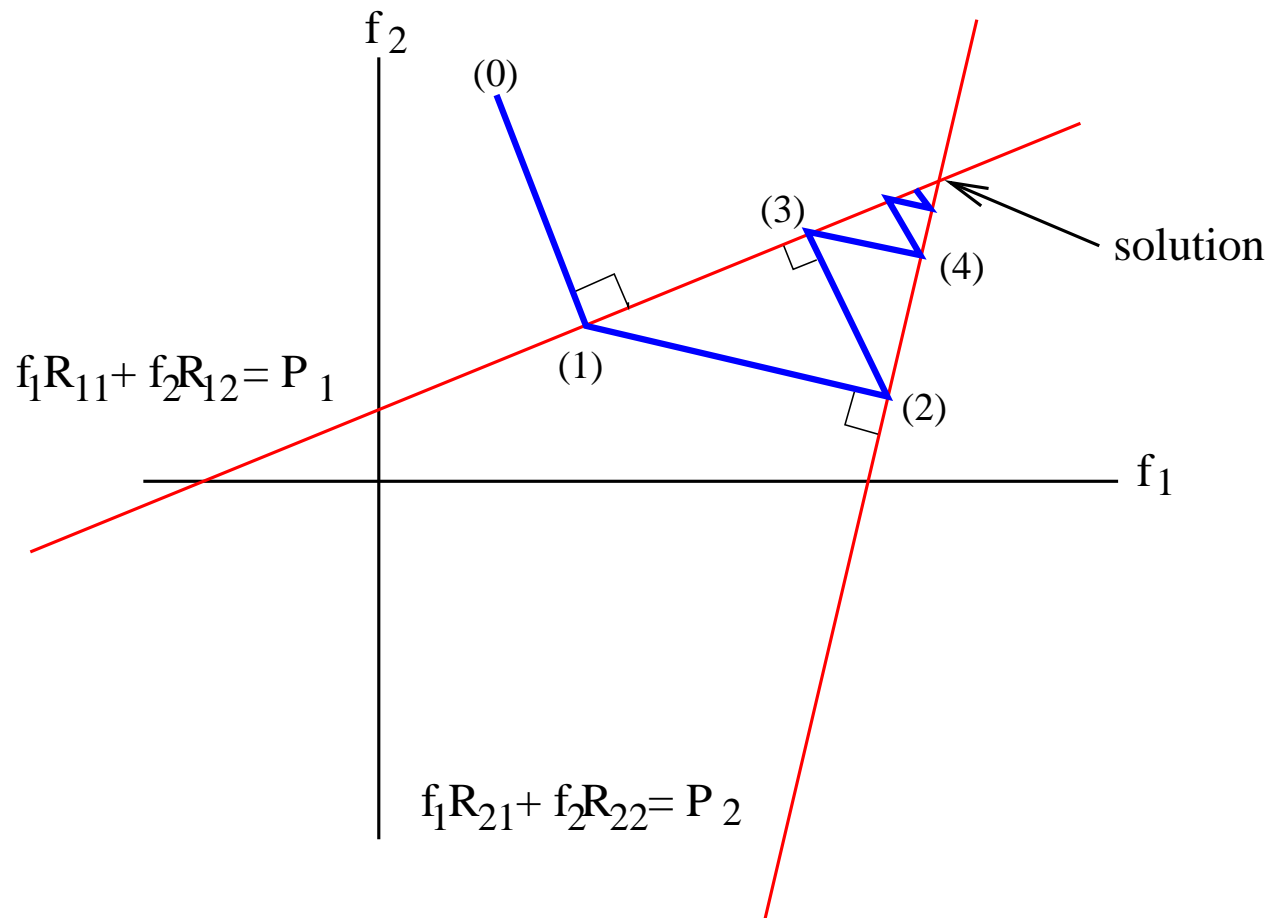
- Taille de la matrice ( $250000 \times 250000$  au moins)
- Matrice très creuse (aussi un avantage)
- Bruit



méthodes itératives

- ART : correction des  $f_i$  en utilisant une projection à chaque fois
- SIRT : correction de chaque  $f_i$  en utilisant tous les rayons passant par  $x_i$

# ART

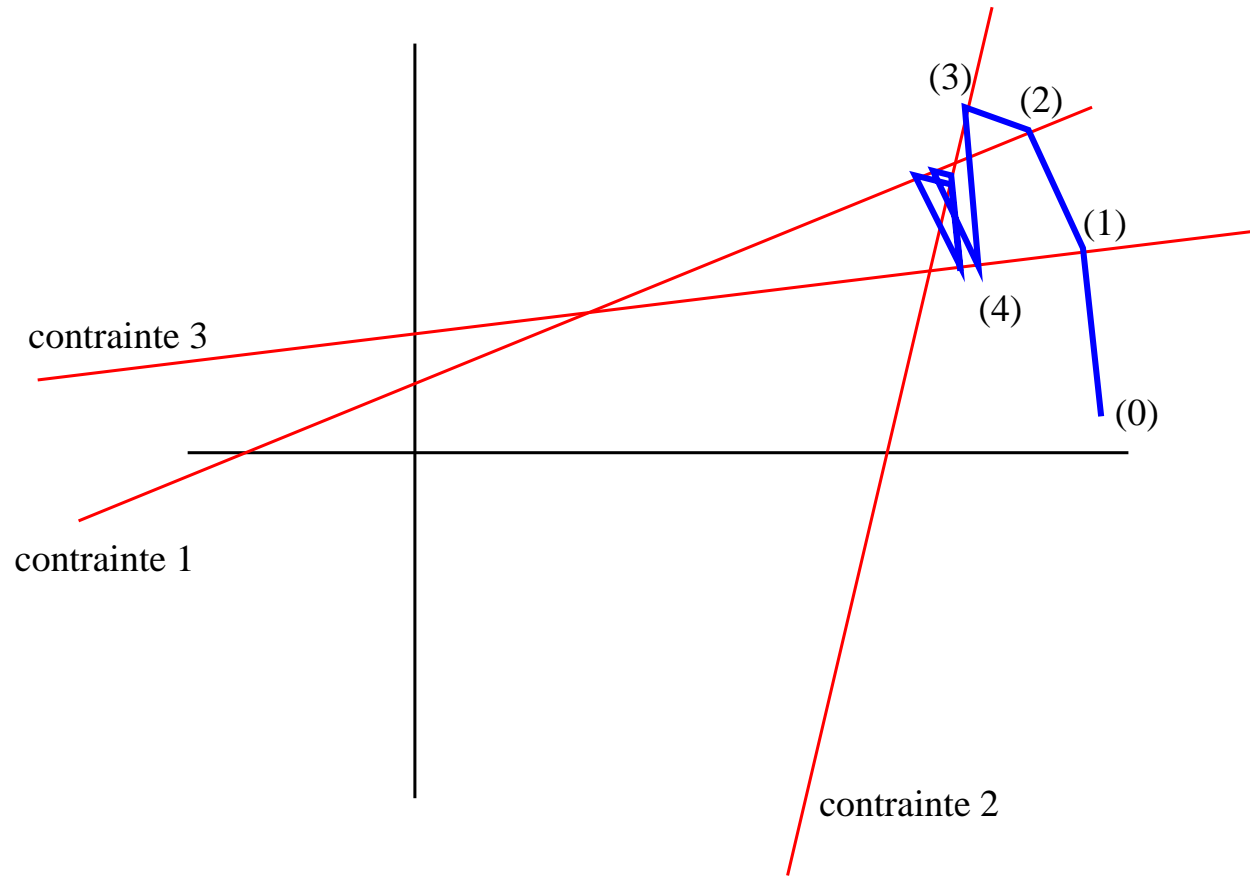


$$f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} + R_{ji} \frac{p_j - R_j f^{(k-1)}}{\|R_j\|^2}$$

$$j = k[m] + 1$$

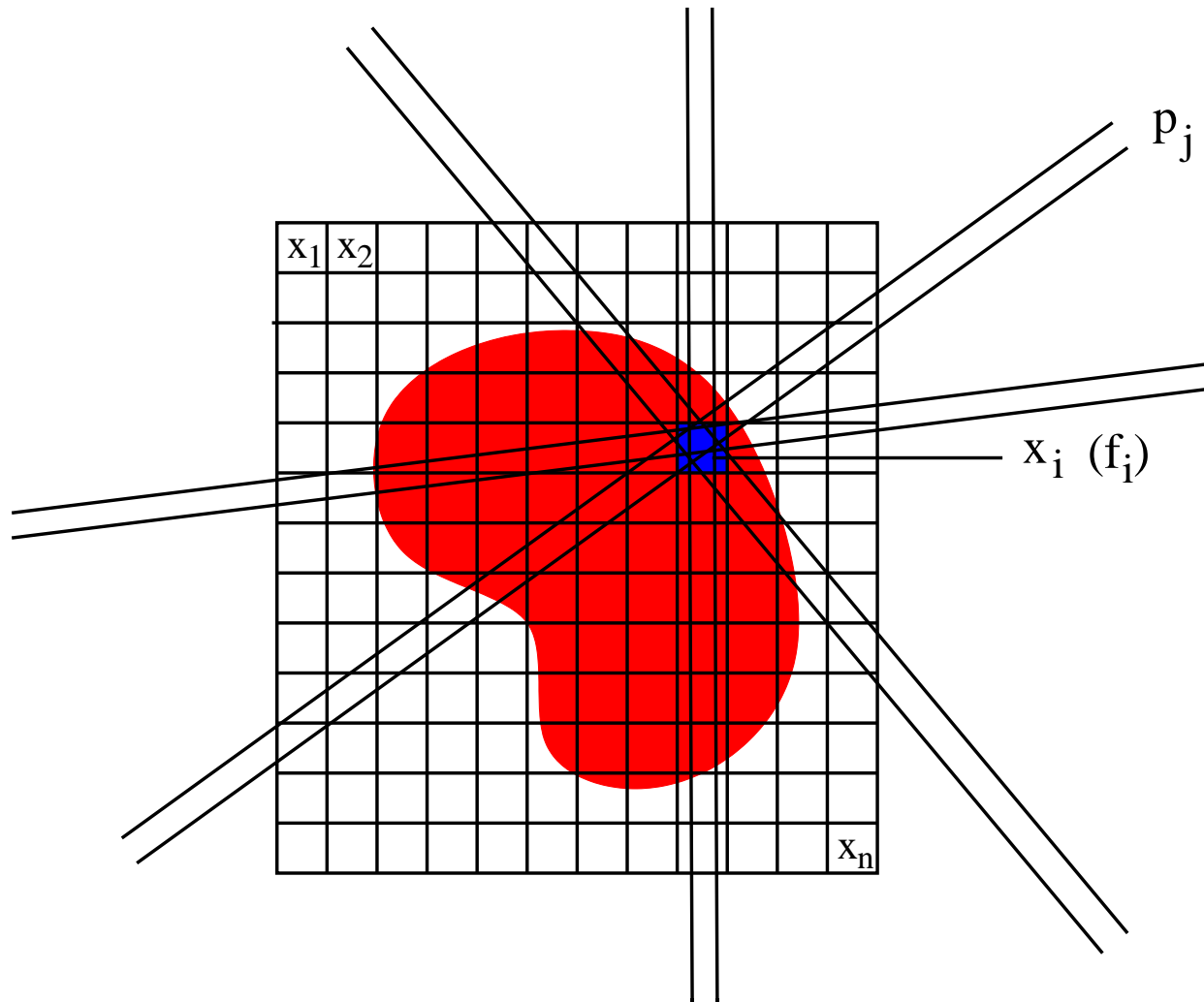
# ART

Cas bruité : pas de solution unique



⇒ oscillations

# SIRT



$$f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} + \frac{\sum_j p_j}{\sum_j \sum_i R_{ji}} - \frac{\sum_j R_j f^{(k-1)}}{\sum_j \|R_j\|^2}$$

# Limites

- limites physiques :
  - faisceau non monochromatique, non infiniment fin
  - durcissement du faisceau
  - phénomène de diffusion
  - mouvements du patient
- données incomplètes :
  - faible nombre de projections (cœur)
  - données bruitées

⇒ problème mal posé

# *Problème bien posé*

- au moins une solution pour chaque ensemble de données
- la solution est unique
- la solution dépend continûment des données

en tomographie : **problème mal posé** (données restreintes, bruitées)



**Régularisation**

# Moindres carrés

$$Rf = p$$

tel que  $R^{-1}$  n'existe pas ou n'est pas continu



Approximation telle que :

$$\min C(RF, p)$$

$C$  : critère d'écart

Solution des moindres carrés :

$$f = (R^t R)^{-1} R^t p$$

si  $R$  de rang  $n$   
sinon infinité de solutions  
⇒ celle de norme minimale

Mais peut être instable

# Analyse de la stabilité

$\sigma_k^2$  : valeurs propres de  $R^t R$  et de  $RR^t$  ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots \geq 0$ )

$$RR^t p_k = \sigma_k^2 p_k, \quad R^t R f_k = \sigma_k^2 f_k$$

avec, pour  $\sigma_k \neq 0$  :  $p_k = \sigma_k^{-1} R f_k$ ,  $f_k = \sigma_k^{-1} R^t p_k$

$$\begin{aligned} f &= (R^t R)^{-1} R^t p = (R^t R)^{-1} R^t \left( \sum_k \langle p \cdot p_k \rangle p_k \right) \\ &= (R^t R)^{-1} \left( \sum_k \langle p \cdot p_k \rangle \sigma_k f_k \right) = \sum_k \langle p \cdot p_k \rangle \sigma_k^{-1} f_k \end{aligned}$$

Donnée bruitées  $\Rightarrow$  mesures  $p + b$

$\Downarrow$

$$f = \sum_k \langle p \cdot p_k \rangle \sigma_k^{-1} f_k + \sum_k \langle b \cdot p_k \rangle \sigma_k^{-1} f_k$$

bruit haute fréquence  $\Rightarrow$  forts coeff. sur les petites valeurs propres (grandes valeurs de

$\sigma_k^{-1}$ ) – cf. restauration

$\Rightarrow$  instabilité



# Stabilisation de la solution (régularisation)

- **troncature** du développement (cf. restauration par la méthode SVD)
- **amortissement** :

$$f = \sum_k w_k \sigma_k^{-1} \langle p \cdot p_k \rangle f_k$$

- solution stable + **contraintes de douceur**

$$\min J(f) = \|Rf - p\|^2 + \gamma \Gamma(f)$$

ex. :  $\Gamma(f) = \|f\|^2 \Rightarrow$

$$f = (R^t R + \gamma I)^{-1} R^t p$$

$$\Rightarrow f = \sum_k \frac{\sigma_k}{\sigma_k^2 + \gamma} \langle p \cdot p_k \rangle f_k$$

- compromis précision / stabilité
- introduction d'infos a priori

# Géométrie divergente

- **Négliger la divergence** : approximation parallèle  
⇒ erreur d'approximation négligeable si angle < 15 degrés
- **Réorganiser les données en projections parallèles**
- **Reformaliser le problème** :
  - théorème de projection non généralisable  
⇒ pas de reconstruction directe
  - adaptation du théorème de rétroprojection  
⇒ même algorithme
  - correction des formules de rétroprojection filtrée  
⇒ algorithmes un peu différents
  - méthodes algébriques : adaptation de la matrice  $R$

## Autres méthodes :

- statistiques
- 3D
- structurelles
- ...