Exercices sur la morphologie mathématique

Isabelle Bloch

Octobre 2006

1 Propriétés d'opérations morphologiques

1.1 Exercice 1

Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ?

		vraie	fausse
1	l'érosion d'une fonction est croissante par rapport à la fonction à éroder	◯	◯
2	l'érosion d'une fonction est croissante par rapport à l'élément structurant	◯	◯
3	l'érosion d'une image à niveaux de gris bouche des « vallées »	◯	◯
4	un filtre alterné séquentiel est croissant	◯	◯
5	un filtre alterné séquentiel est idempotent	◯	◯
6	un filtre alterné séquentiel est extensif	◯	◯
7	un ensemble convexe est invariant par fermeture par un élément structurant compact convexe	◯	◯
8	un ensemble convexe est invariant par ouverture par un élément structurant compact convexe	◯	◯
9	le squelette par amincissement préserve la topologie	◯	◯
10	le squelette par axe médian (centres des boules maximales) préserve la topologie	◯	◯

1.2 Exercice 2

Soient γ_1 et γ_2 des ouvertures algébriques (croissantes, idempotentes et anti-extensives). Montrer l'équivalence entre :

1. $\gamma_1 \leq \gamma_2$
2. $\gamma_1\gamma_2 = \gamma_2\gamma_1 = \gamma_1$
3. $Inv(\gamma_1) \subseteq Inv(\gamma_2)$ où Inv désigne le domaine d'invariance.

Indication : on montrera que $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$. On rappelle qu'une ouverture γ s'exprime à partir de son domaine d'invariance par $\gamma(x) = \bigvee\{y \in Inv(\gamma),\ y \leq x\}$.

2 Morphologie mathématique binaire

Sur l'image de la figure 1, combien faut-il de dilatations pour boucher les trous dans les quatre cas suivants (B_4 désigne l'élément structurant élémentaire (de taille 1) de la 4-connexité, et B_8 l'élément structurant élémentaire de la 8-connexité) ?

Connexité des objets	Elément structurant	nombre de dilatations nécessaires
4-connexité	B_4	
8-connexité	B_4	
4-connexité	B_8	
8-connexité	B_8	

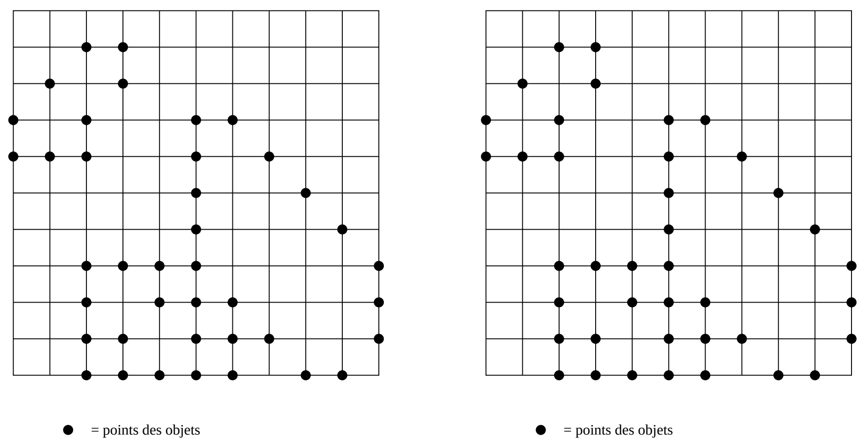


FIG. 1 – Image binaire à dilater.

3 Morphologie mathématique à niveaux de gris

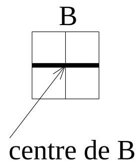
La figure 2 présente une fonction f définie en dimension 1, et un élément structurant B. Tracer la fonction résultant de la dilatation de f par B, son érosion, son ouverture et sa fermeture.

Donner le nombre de minima et maxima régionaux de f, de l'érodé $E_B(f)$ de f par B et de l'ouverture f_B de f par B, ainsi que le nombre de pics détectés par chapeau haut-de-forme avec cet élément structurant.

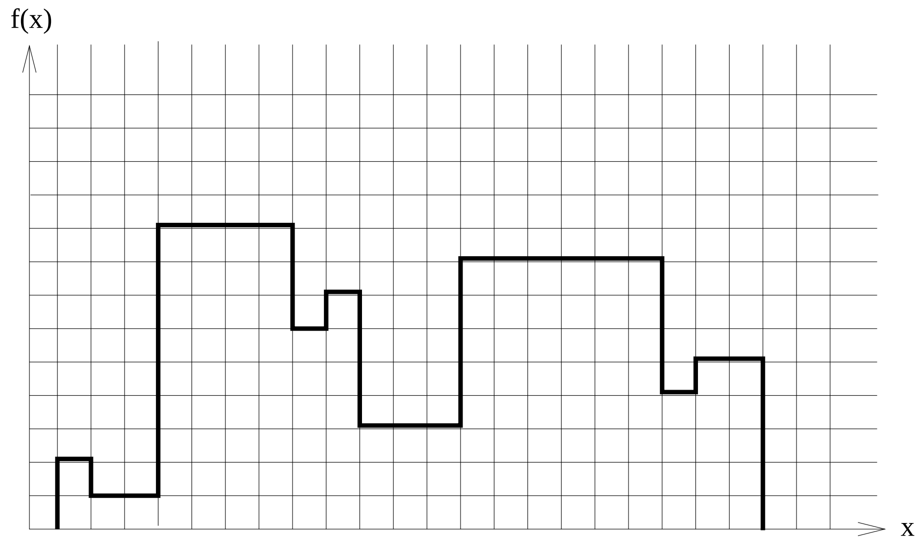
Tracer la reconstruction de f en prenant la fonction g définie par $g(x) = \max(0, f(x) - 2)$ comme marqueur. Interpréter le résultat obtenu.

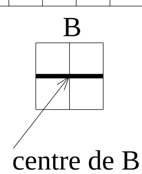
4 Problèmes de bords

En pratique une image est à support borné. Ainsi, si l'on appelle X l'image idéale qui serait infinie et K le champ de la caméra par exemple, l'image effectivement observée est $X \cap K$. Le résultat d'opérations morphologiques ne peut alors être connu exactement que dans une partie de l'image, qui dépend de l'élément structurant B, et que nous nous proposons de déterminer.



élément structurant (segment horizontal centré)





élément structurant (segment horizontal centré)

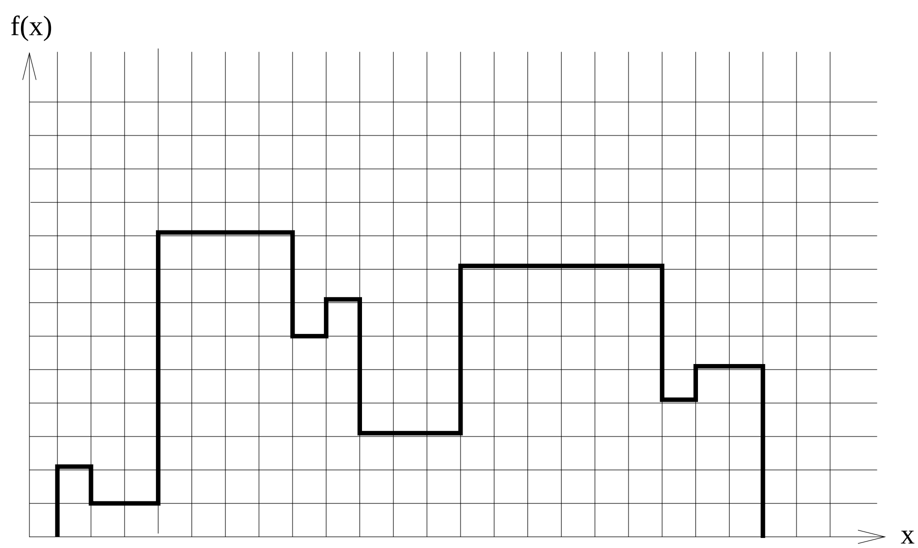
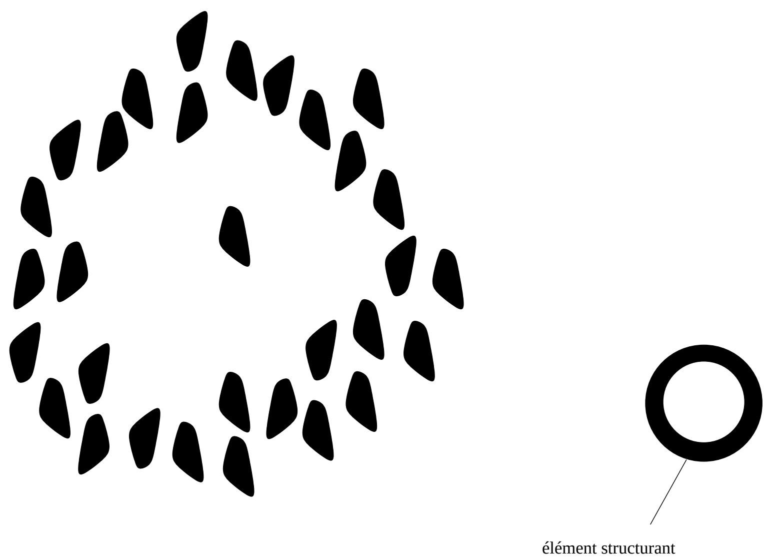


Fig. 2 – Fonction f.

1. Montrer que :
$$E_B(X) \cap E_B(K) = E_B(X \cap K) \cap E_B(K),$$
$$D_B(X) \cap E_B(K) = D_B(X \cap K) \cap E_B(K).$$
2. En déduire la région dans laquelle sont connus l'érodé, le dilaté et la fermeture. Montrer sur un exemple que cette région est la plus grande possible.
3. Montrer que pour l'ouverture, cette région n'est pas optimale.

5 Ouverture annulaire



Soit $B = \{0, b\}$ et $B' = \{-b, b\}$ deux éléments structurants (bi-points). Montrer que l'ouverture d'un ensemble X par B est égale à l'intersection de la dilatation de X par B' et de X.

Soient b_1 et b_2 tels que $0 < b_1 < b_2$, et l'élément structurant en forme de couronne $C = \{b, b_1 \leq |b| \leq b_2\}$ (illustré à droite de la figure). L'intersection d'un ensemble X et de son dilaté par C est appelée ouverture annulaire de X. Justifier ce terme.

Illustrer cette opération sur la figure.

Comparer avec une ouverture par un disque, avec une ouverture par un segment et avec une réunion d'ouverture par des segments dans toutes les directions.

6 Transformée en tout ou rien

Quels sont les éléments structurants à utiliser dans la transformée en tout ou rien sur une trame hexagonale pour trouver :
- les points extrémités ?
- les points triples ?
- les points isolés ?
- les concavités locales ?

Illustrer sur des exemples simples.

7 Analyse d'une image

Imaginer et décrire le plus précisément possible une méthode de segmentation des cellules de la figure 3 à partir des opérateurs vus en cours. L'algorithme devra fournir une image binaire des cellules et éliminer les petits points sombres.

Comment supprimer les cellules qui touchent le bord de l'image à partir du résultat binaire de segmentation ?

Comment séparer les cellules qui sont connexes ?

Comment sélectionner les cellules qui ont un noyau sombre ?

Comment étudier la distribution de tailles des cellules ?

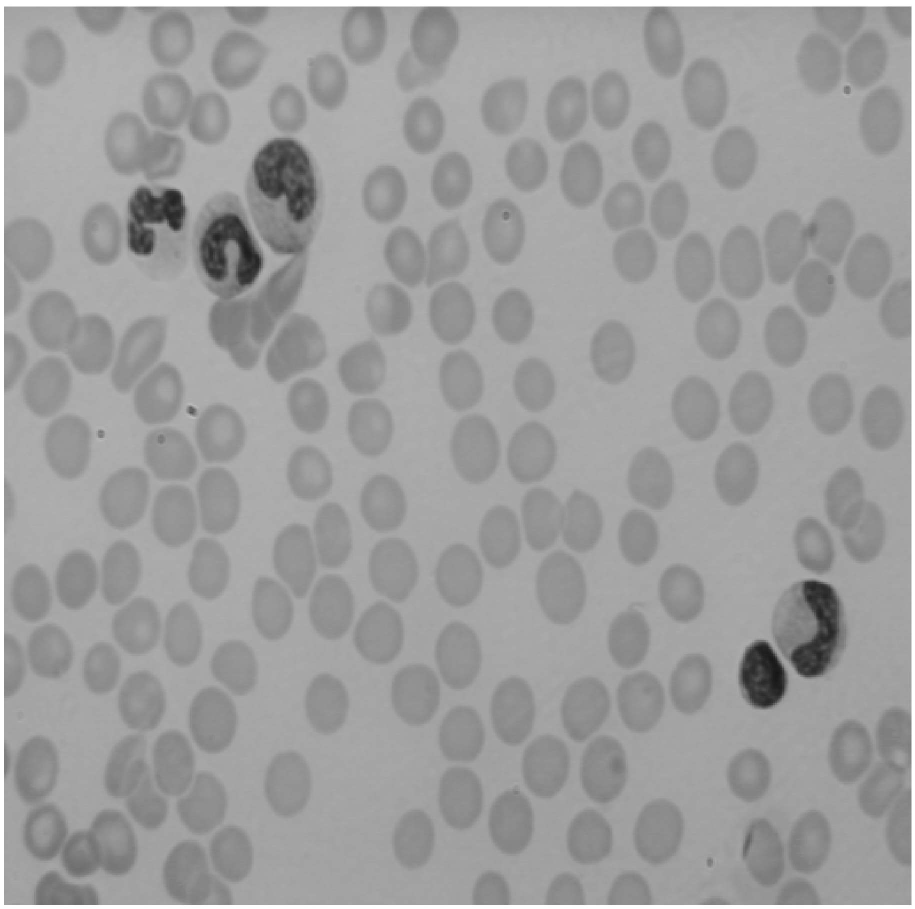


FIG. 3 – Image de cellules.