



Polycopié de l'UE TADI
Représentations discrètes et morphologie
mathématique

Isabelle Bloch

Master cohabilité
Université Pierre et Marie Curie - Télécom ParisTech

Isabelle.Bloch@telecom-paristech.fr

Chapitre 1

Représentations discrètes

1.1 Introduction

Le traitement des images par ordinateur nécessite de disposer de représentations discrètes des scènes observées. On dispose alors d'un échantillonnage de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 dans \mathbb{Z}^2 ou \mathbb{Z}^3 , qui est de plus fini, ce qui justifie de représenter les images sous forme matricielle. Pour traiter de tels ensembles de points, deux solutions sont possibles :

- soit on plonge les points discrets de \mathbb{Z}^n dans \mathbb{R}^n , et on les traite comme s'ils appartenait à un espace continu ; ce sont alors souvent des procédés de géométrie algorithmique qui sont mis en œuvre ;
- soit on définit directement les traitements dans l'espace discret, en essayant d'en préserver les effets et les propriétés.

Le choix de l'une ou l'autre de ces solutions dépend beaucoup du type de traitement à effectuer, du type de représentation sur lequel s'appuie ce traitement, des propriétés souhaitées, de la complexité des calculs, etc. Par exemple, on garantit de meilleures propriétés de connexité avec des rotations continues que des rotations discrètes. Au contraire, les opérations morphologiques de base sont beaucoup plus simples à effectuer dans un espace discret (voir le chapitre 2 sur la morphologie mathématique). Dans les cas où les deux approches sont possibles, elles ne sont pas toujours équivalentes, et il est souvent difficile de garantir que la transformation appliquée à une version discrète d'un objet fournira le même résultat que la discrétisation du résultat de la transformation continue.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons surtout aux problèmes de représentations géométriques discrètes, qui serviront de support aux traitements et transformations effectués directement dans \mathbb{Z}^n . Des exemples de tels traitements seront abordés en particulier dans le chapitre de morphologie mathématique (chapitre 2). Nous aborderons ici succinctement les pavages et maillages (section 1.2), sur lesquels sont définies les images discrètes, puis les questions de topologie (section 1.3), les problèmes de représentations de quelques structures géométriques simples, déterministes (section 1.4) ou aléatoires (section 1.5), et enfin la définition et le calcul de distances discrètes (section 1.6). Un exposé plus détaillé sur tous ces points ainsi que sur d'autres aspects de la géométrie discrète en traitement d'images peut être trouvé dans [5, 22, 6].

Les principes décrits peuvent être appliqués aussi bien à la synthèse qu'à l'analyse d'images. La géométrie discrète constitue toujours un axe de recherche important dans ces deux domaines.

1.2 Pavages et maillages

1.2.1 Définitions et contraintes

Un pavage est une partition de l'espace continu (\mathbb{R}^n) en cellules élémentaires (tout l'espace est recouvert par les cellules, et les cellules n'ont pas d'intersection deux à deux).

Cette définition, la plus générale, peut donner lieu à une infinité de solutions si l'on n'impose pas de contraintes supplémentaires sur la forme et la disposition des cellules. En pratique, des contraintes sont imposées :

- d'une part par les capteurs, dont la surface sensible a généralement une structure régulière,
- et d'autre part par l'utilisation que l'on souhaite faire de la représentation, qui impose une certaine régularité et simplicité, ainsi que certaines propriétés sur le pavage résultant sur lesquelles nous reviendrons.

Deux méthodes peuvent être envisagées pour construire un tel pavage :

1. La première consiste à se donner une distribution de points dans l'espace. Puis à chaque point P est associée une cellule V_P , de telle sorte qu'elle n'intersecte aucune autre cellule et qu'elle ne laisse pas de « vide » dans l'espace. La solution la plus simple consiste à choisir pour V_P l'ensemble des points de l'espace qui sont les plus proches de P que de tout autre point de la distribution. Dans le cas où la distribution des points est régulière, on aboutit à un pavage classique, tel que ceux que nous verrons dans la section suivante. Dans le cas où la distribution est irrégulière, on aboutit à un pavage de Voronoï, que nous décrirons plus en détails dans la section 1.4. Les points de la distribution peuvent être interprétés comme des germes, à partir desquels on fait croître des cellules à vitesse constante, jusqu'à ce que tout l'espace soit rempli (voir figure 1.1).

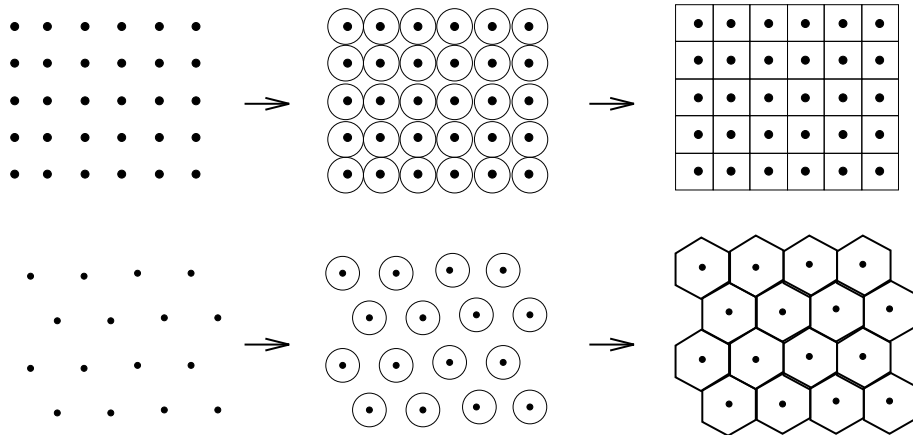


FIGURE 1.1 – Deux exemples de construction d'un pavage par propagation à partir d'une distribution de points régulière.

2. La deuxième solution consiste à se donner au contraire un modèle a priori de cellule élémentaire, et à reproduire ce modèle en juxtaposant les cellules pour construire une partition de l'espace [14]. Cela n'est bien sûr pas possible avec n'importe quel modèle de cellule. On impose généralement que celui-ci soit un polygone (ou polyèdre) convexe, régulier, et que dans la juxtaposition les sommets soient en contact avec d'autres sommets mais pas avec des arêtes (typiquement, la configuration de la figure 1.2 ne satisfait pas cette dernière condition).

1.2.2 Pavages plans réguliers

Les contraintes les plus strictes que l'on puisse imposer aux cellules élémentaires est qu'elles soient toutes identiques et « régulières », c'est-à-dire qu'elles soient des polygones dont tous les côtés et tous

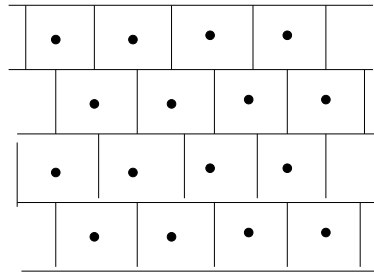


FIGURE 1.2 – Exemple d’une configuration où les sommets du pavage ne sont pas en coïncidence avec d’autres sommets. Notons qu’en déformant ce maillage, on peut obtenir un pavage hexagonal qui est le pavage régulier associé à cette distribution de points, comme on le verra par la suite.

les angles soient égaux, et que chaque sommet soit en contact avec un nombre fixe de sommets d’autres cellules. Avec de telles cellules, on obtient des pavages dits « réguliers ».

On montre que, dans le plan, il n’existe que trois types de pavages réguliers, correspondant respectivement à des cellules triangulaires¹, carrées et hexagonales. Ils sont illustrés sur la figure 1.3.

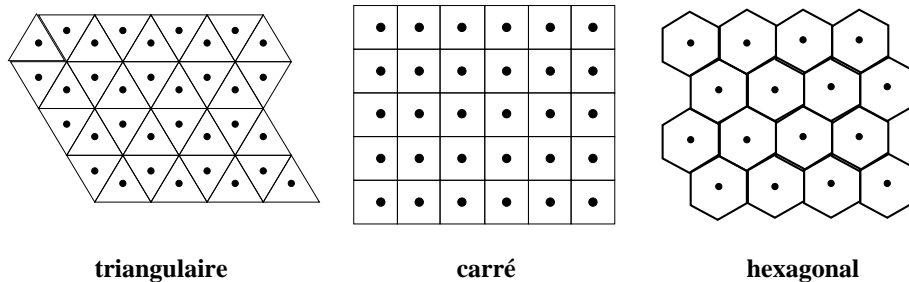


FIGURE 1.3 – Les trois pavages réguliers du plan.

1.2.3 Pavages plans semi-réguliers

Si l’on relâche un peu les contraintes précédentes, en permettant aux cellules d’être de types différents (avec des nombres de côtés pouvant varier d’une cellule à l’autre), tout en conservant le nombre constant de cellules adjacentes, on obtient des pavages « semi-réguliers » [14].

Il existe 21 solutions respectant ces contraintes. Seules 11 définissent effectivement une partition (dont les 3 régulières vues précédemment). Deux de ces solutions sont illustrées sur la figure 1.4. L’ensemble de ces solutions est décrit dans [5].

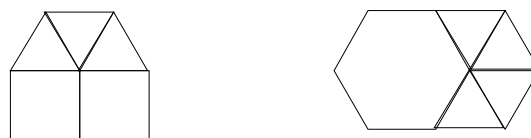


FIGURE 1.4 – Deux exemples de configurations semi-régulières permettant de paver le plan.

Si l’on relâche plus de contraintes, on peut obtenir des pavages non uniformes, ou même complètement irréguliers (voir par exemple les dessins d’Escher [25]).

1. Notons que le pavage triangulaire est régulier au sens où nous l’avons défini, mais qu’il n’est pas uniforme car les triangles n’ont pas tous la même orientation.

1.2.4 Dualité pavage / maillage

À partir d'un pavage, on associe à chaque cellule V_P constituant le pavage un point P situé à l'intérieur de cette cellule. Par exemple, P peut être le centre de gravité de V_P (il sera bien à l'intérieur de V_P si l'on se restreint comme ci-dessus à des cellules convexes). Dans ce cas, on retrouve bien sûr des P et des V_P qui correspondent à la construction du pavage à partir d'une distribution de points. Ce sont ces points P qui sont appelés pixels en traitement d'images.

Un maillage est alors défini de la manière suivante : à tout point P on associe les points Q tels que V_P et V_Q ont une arête commune (dans le plan). Le maillage est constitué de tous les segments $[P, Q]$ que l'on peut construire de cette manière.

Ce maillage définit dans l'espace un nouveau pavage, dont les cellules sont centrées sur les sommets du pavage initial. Il y a donc dualité entre pavage et maillage.

Pour les pavages réguliers, qui sont les plus utilisés, cette dualité se traduit de la manière suivante (voir figure 1.5) :

- le maillage associé au pavage triangulaire est hexagonal,
- le maillage associé au pavage carré est carré,
- le maillage associé au pavage hexagonal est triangulaire.

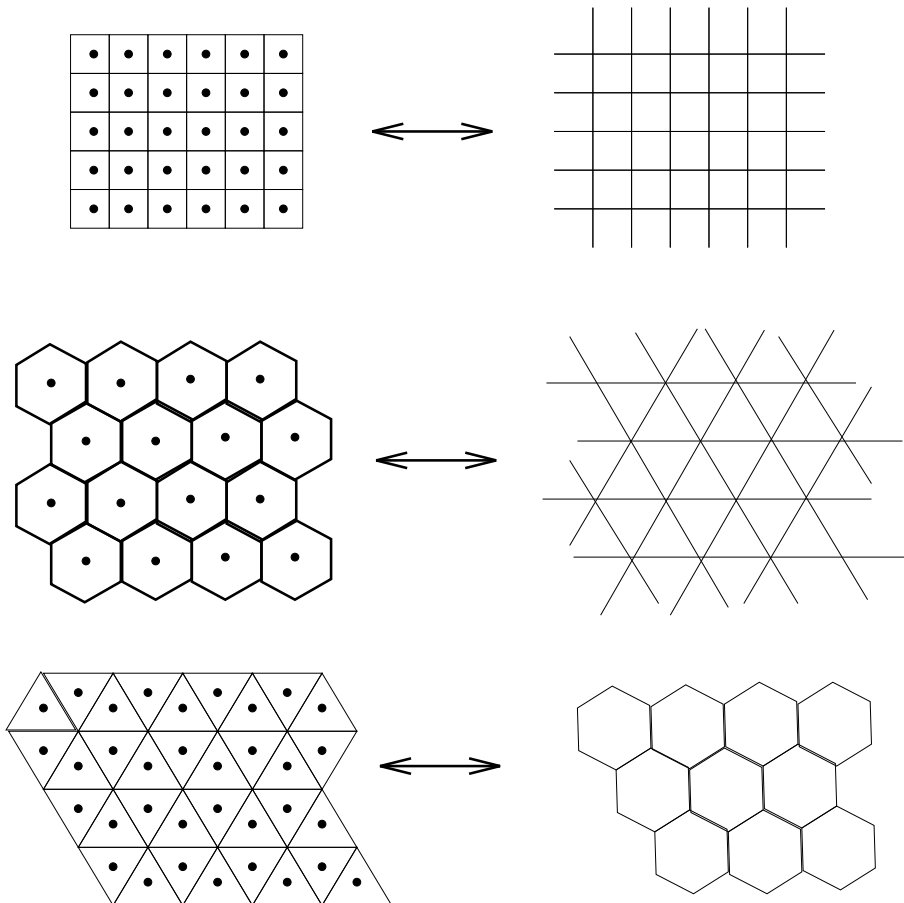


FIGURE 1.5 – Dualité entre les maillages et les pavages réguliers du plan.

Le maillage carré est certainement le plus utilisé. Le maillage hexagonal n'est cependant pas sans intérêt car il possède de meilleures propriétés d'isotropie et de topologie que le maillage carré. Le maillage triangulaire n'est en revanche presque jamais utilisé.

Dans l'espace discret à 3 dimensions, le maillage cubique est le plus utilisé. C'est aussi le seul qui soit régulier. On trouve aussi quelques applications de maillages cubiques à faces centrées ou rhombo-

dodécaédriques.

1.3 Topologie discrète

Dans cette section, nous abordons les problèmes de topologie sur les maillages discrets. Nous verrons en particulier que la topologie discrète classique n'est pas adaptée et qu'une approche fondée sur la définition de voisinages est préférable.

1.3.1 Quelques approches

Considérons tout d'abord la topologie discrète classique. Pour cette topologie, tout point de l'ensemble discret considéré est un ouvert. Comme un ensemble connexe est un ensemble qui ne peut pas se décomposer en réunion de deux ouverts non vides disjoints, les seuls ensembles connexes que l'on puisse construire avec cette topologie sont réduits à des singletons.

Cependant du point de vue de l'analyse d'images et de la reconnaissance des formes, on a besoin de définir des objets, que l'on considère comme des entités connexes généralement constituées de plusieurs points. La topologie discrète classique ne permet pas de répondre à ces exigences, et elle n'est donc pas adaptée aux besoins du traitement d'images.

Plusieurs approches ont été tentées afin de définir des topologies plus satisfaisantes. Nous décrivons ici succinctement l'une d'elles [4, 20]. Elle consiste (dans le plan) à construire une base topologique de \mathbb{Z}^2 . Une topologie est alors une classe \mathcal{T} d'ensembles de \mathbb{Z}^2 telle que chaque élément de \mathcal{T} soit réunion dénombrable d'éléments de la base topologique, et telle que :

1. $\mathbb{Z}^2 \in \mathcal{T}, \emptyset \in \mathcal{T}$,
2. $\forall (A, B) \in \mathcal{T}^2, A \cap B \in \mathcal{T}$.

Sur une trame carrée, on peut par exemple construire la base topologique de la manière suivante : pour tout point P de \mathbb{Z}^2 , de coordonnées (i, j) , on associe à P l'ensemble $\mathcal{U}(P)$ défini par (voir figure 1.6) :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(P) &= \{P, (i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)\} \text{ si } i+j \text{ pair,} \\ &= \{P\} \text{ sinon.} \end{aligned}$$

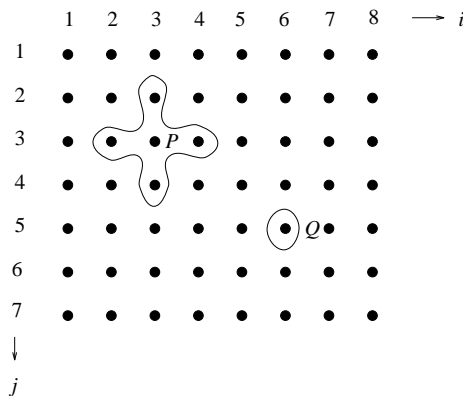


FIGURE 1.6 – Définition d'une base topologique dans le plan discret sur une trame carrée.

Les ensembles $\mathcal{U}(P)$ ainsi construits vérifient bien les conditions suivantes :

1. $\mathbb{Z}^2 = \cup_{P \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{U}(P)$,
2. si $\mathcal{U}(P)$ et $\mathcal{U}(Q)$ sont deux éléments de la base topologique, alors $\mathcal{U}(P) \cap \mathcal{U}(Q)$ est une réunion d'éléments de cette base.

Ce type de construction a un inconvénient majeur : la forme du voisinage induit par les $\mathcal{U}(P)$ autour de chaque point dépend de la position du point dans l'espace. En particulier, la topologie ainsi construite n'est pas invariante par translation. De plus, ce type de construction ne garantit pas toutes les propriétés souhaitées, en particulier le théorème de Jordan. Enfin, si cette construction reste possible sur une trame triangulaire (voir figure 1.7), elle ne l'est pas sur une trame hexagonale.

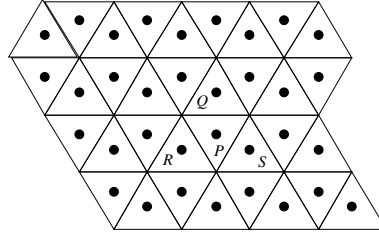


FIGURE 1.7 – Définition d'une base topologique dans le plan discret sur une trame triangulaire. Sur cette figure, $\mathcal{U}(P) = \{P, Q, R, S\}$, $\mathcal{U}(Q) = \{Q\}$, $\mathcal{U}(R) = \{R\}$, $\mathcal{U}(S) = \{S\}$.

1.3.2 Topologie à partir de la notion de voisinage élémentaire

Pour le traitement d'images, il est donc difficile de définir des notions topologiques satisfaisantes et opérationnelles à partir de la construction d'ouverts. Il est préférable de définir d'abord les notions de voisinage élémentaire, puis de connexité, qui est une des notions topologiques essentielles pour l'interprétation des images et la reconnaissance des formes [36, 38].

Pour cela, on considère l'image discrète comme un graphe. Les nœuds du graphe sont les points discrets (les pixels de l'image). Les arcs sont définis par les relations de voisinage entre les points. Par exemple, sur une trame carrée, on peut considérer que deux points sont voisins si une et une seule de leurs coordonnées diffère d'une unité. Chaque point (encadré sur la figure 1.8 a) a ainsi 4 voisins, et on parle de 4-connexité. Le graphe correspondant est illustré sur la figure 1.9.

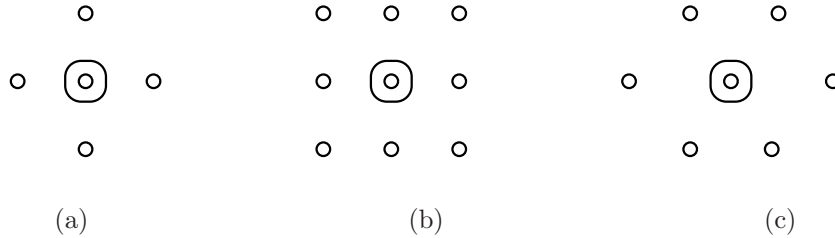


FIGURE 1.8 – Connexité sur une trame discrète carrée (a : 4-connexité, b : 8-connexité), ou hexagonale (c : 6-connexité).

Si l'on ajoute dans le graphe les arcs reliant les points aussi en diagonale (dont les deux coordonnées diffèrent d'une unité), chaque point a alors 8 voisins, et on parle de 8-connexité (figure 1.8 b). En 4-connexité, très peu de directions de l'espace sont représentées, en 8-connexité, tous les voisins ne sont pas à la même distance du point central.

Sur une trame hexagonale, la connexité la plus naturelle est la 6-connexité (figure 1.8 c). Chaque point a 6 voisins qui sont tous à même distance du point central et les 6 directions représentées sont équiréparties, ce qui constitue un des avantages de la trame hexagonale.

Sur une trame triangulaire, trois types de voisinages élémentaires peuvent être définis, correspondant respectivement à la 3-, 9- et 12-connexité. Ces définitions sont illustrées sur la figure 1.10.

Dans une représentation matricielle des images, l'accès aux voisins d'un point de coordonnées (i, j) se fait très aisément sur une trame carrée. Ce sont :

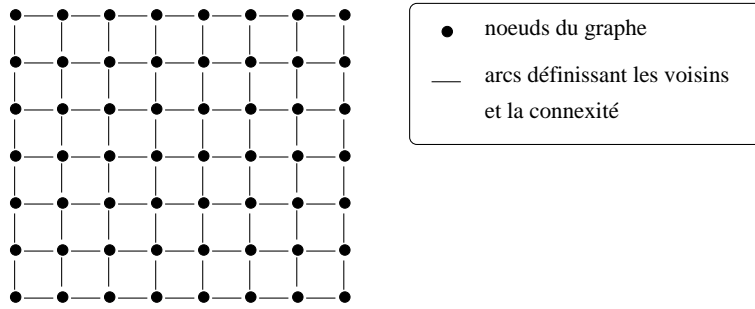


FIGURE 1.9 – Graphe définissant la 4-connectivité sur une trame carrée.

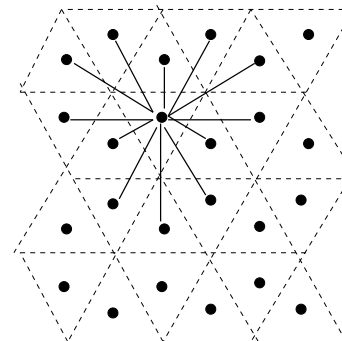
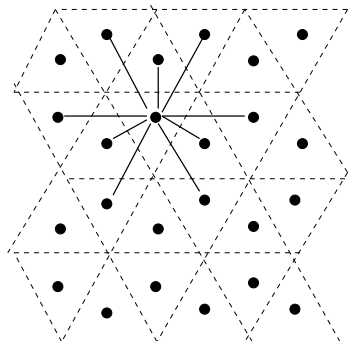
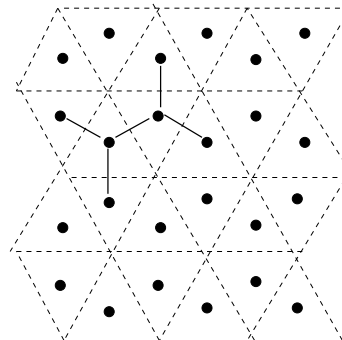
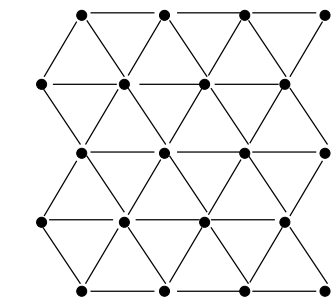
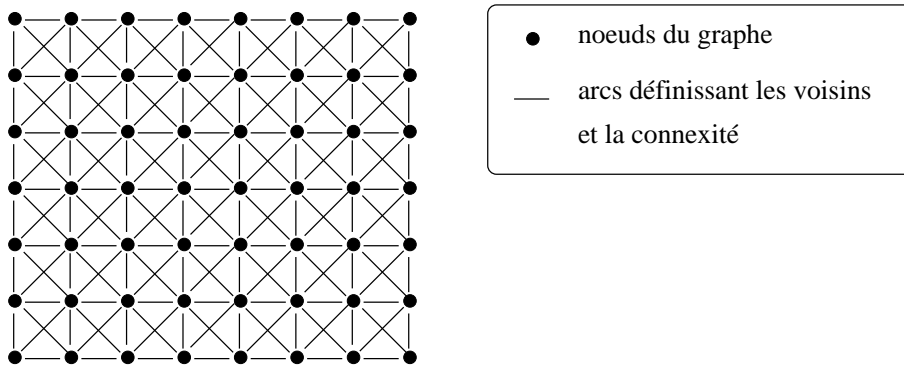


FIGURE 1.10 – Graphes définissant la 8-connectivité sur une trame carrée, la 6-connectivité sur une trame hexagonale, et les 3-, 9- et 12-connectivités sur une trame triangulaire (seuls quelques arcs sont représentés pour la trame triangulaire).

- en 4-connectivité : les points de coordonnées $(i - 1, j)$, $(i + 1, j)$, $(i, j - 1)$, $(i, j + 1)$,
- en 8-connectivité : les points de coordonnées $(i - 1, j)$, $(i + 1, j)$, $(i, j - 1)$, $(i, j + 1)$, $(i - 1, j - 1)$,

$(i - 1, j + 1), (i + 1, j - 1), (i + 1, j + 1).$

Sur une trame hexagonale, l'accès aux voisins est un peu plus délicat. En effet, s'il est toujours possible de représenter une image de manière matricielle, il faut considérer que, géométriquement, les lignes sont décalées les unes par rapport aux autres. Les indices des voisins d'un point dépendent donc de la parité de la ligne sur laquelle se situe le point. Si les lignes sont numérotées comme l'indique la figure 1.11, alors les voisins d'un point de coordonnées (i, j) sont :

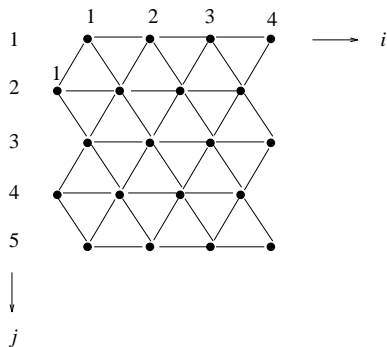


FIGURE 1.11 – Les indices des voisins d'un point sur une trame hexagonale dépendent de la parité de la ligne sur laquelle se trouve le point.

- si j est pair : $(i - 1, j - 1), (i, j - 1), (i - 1, j), (i + 1, j), (i - 1, j + 1), (i, j + 1),$
- si j est impair : $(i, j - 1), (i + 1, j - 1), (i - 1, j), (i + 1, j), (i, j + 1), (i + 1, j + 1).$

Sur une trame triangulaire, de la même manière, les indices des voisins dépendent de la parité de la ligne sur laquelle se trouve le point considéré (et bien sûr de la connexité choisie).

Si l'on se place maintenant en dimension trois sur une trame cubique, trois types de voisinages élémentaires sont classiquement définis, correspondant respectivement à la 6-, 18- et 26-connexité. Si l'on représente chaque point P de l'image 3D comme un cube élémentaire, les 6-voisins correspondent aux cubes adjacents à P par une face, les 18-voisins comprennent les 6 précédents et ceux qui sont adjacents à P par une arête, et les 26-voisins s'obtiennent en ajoutant les cubes adjacents par un sommet (voir figure 1.12).

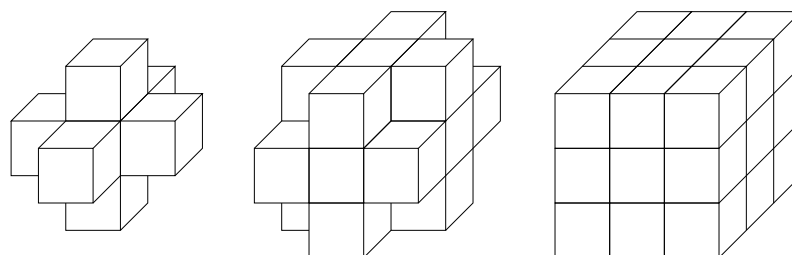


FIGURE 1.12 – Les trois types de voisinages élémentaires pour une image 3D définie sur une trame cubique.

Une fois que sont définis les voisinages élémentaires, les notions de connexité s'en déduisent aisément, grâce à l'interprétation en termes de théorie des graphes [2].

Un chemin est ainsi défini comme une suite de sommets du graphe telle que deux points consécutifs de la suite soient joints par un arc du graphe, où les arcs sont définis en fonction de la connexité choisie. Par exemple, sur une trame carrée, on définit :

- un 4-chemin comme une suite de points $(i_k, j_k)_{1 \leq k \leq n}$ tels que :

$$\forall k, 1 \leq k < n, |i_k - i_{k+1}| + |j_k - j_{k+1}| \leq 1,$$

- un 8-chemin comme une suite de points $(i_k, j_k)_{1 \leq k \leq n}$ tels que :

$$\forall k, 1 \leq k < n, \max(|i_k - i_{k+1}|, |j_k - j_{k+1}|) \leq 1.$$

Les composantes connexes s'en déduisent alors en reprenant les définitions classiques des graphes. On obtient ainsi sur une trame carrée :

- une composante 4-connexe est un ensemble maximal de points \mathcal{S} tel que pour tout couple de points (P, Q) de \mathcal{S} , il existe un 4-chemin d'extrémités P et Q et dont tous les points soient dans \mathcal{S} ;
- une composante 8-connexe est un ensemble maximal de points \mathcal{S} tel que pour tout couple de points (P, Q) de \mathcal{S} , il existe un 8-chemin d'extrémités P et Q et dont tous les points soient dans \mathcal{S} .

Ces définitions sont illustrées sur la figure 1.13.

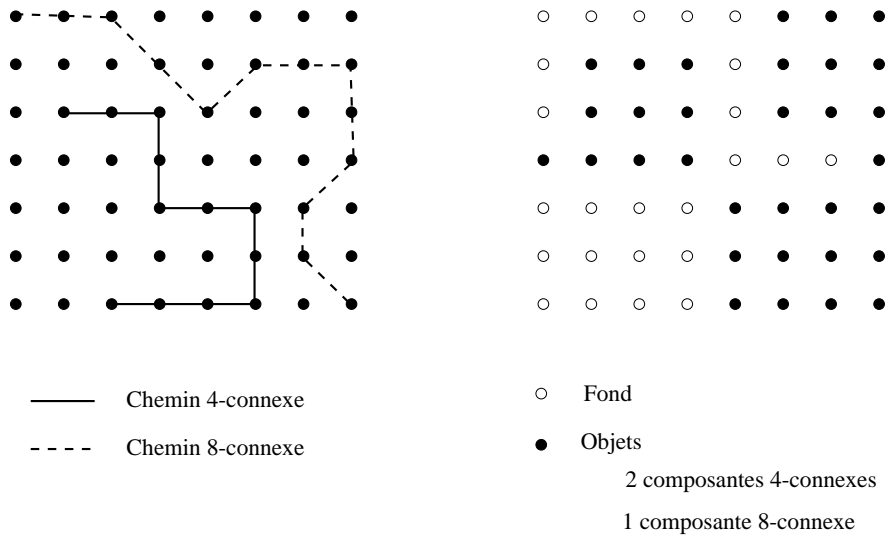


FIGURE 1.13 – Illustration des définitions des chemins et composantes connexes sur une trame carrée, en 4- et 8-connexités.

De manière analogue, on définit sur une trame hexagonale les notions de 6-chemin et de composante 6-connexe. Sur une trame triangulaire, les chemins peuvent être 3-, 9- ou 12-connexes, de même que les composantes connexes.

Sur une trame carrée, des paradoxes peuvent apparaître pour certaines configurations locales de points de l'objet et de son complémentaire. Sur la figure 1.14, en 8-connexité, les points a et d de l'objet sont voisins ainsi que les points b et c du complémentaire. Cela signifie que les composantes connexes de l'objet et du complémentaire se « croisent ». Si on se place au contraire en 4-connexité, ni les points a et d, ni les points b et c ne sont voisins, laissant ainsi une zone qui n'est ni l'objet ni son complémentaire. Ce paradoxe peut être évité si l'on considère des connexités différentes pour l'objet et pour son complémentaire.

Sur une trame hexagonale, ce type de phénomène ne se produit pas et on travaille en 6-connexité aussi bien pour la forme que pour le fond.

Un des résultats importants qui permet de garantir de bonnes propriétés topologiques aux objets (et d'éviter ce type de paradoxe) est le théorème de Jordan. Dans le cas continu, il s'exprime sous la forme suivante : toute courbe simple fermée sépare l'espace en deux composantes connexes, l'intérieur et l'extérieur de la courbe. Avec les définitions de la connexité discrète données ci-dessous, on montre les deux résultats suivants :

- sur une trame carrée, tout 4-chemin (respectivement 8-chemin) simple fermé² sépare l'espace en

2. Un 4-chemin simple fermé est un 4-chemin (A_0, \dots, A_n) tel que $n \geq 4$, $A_i = A_j$ si et seulement si $i = j$, et A_i est un 4-voisin de A_j si et seulement si $i = j \pm 1[n + 1]$.

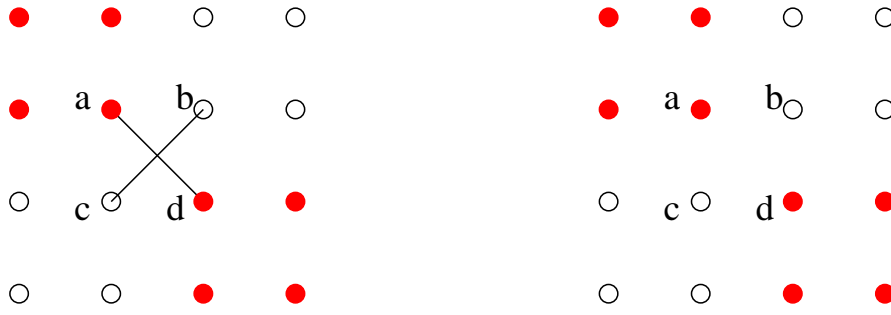


FIGURE 1.14 – Paradoxe sur une trame discrète carrée en 8- et 4-connexité.

- deux composantes 8-connexes (respectivement 4-connexes), l'intérieur et l'extérieur (voir l'illustration de la figure 1.15);
- sur une trame hexagonale, tout 6-chemin simple fermé sépare l'espace en deux composantes 6-connexes.

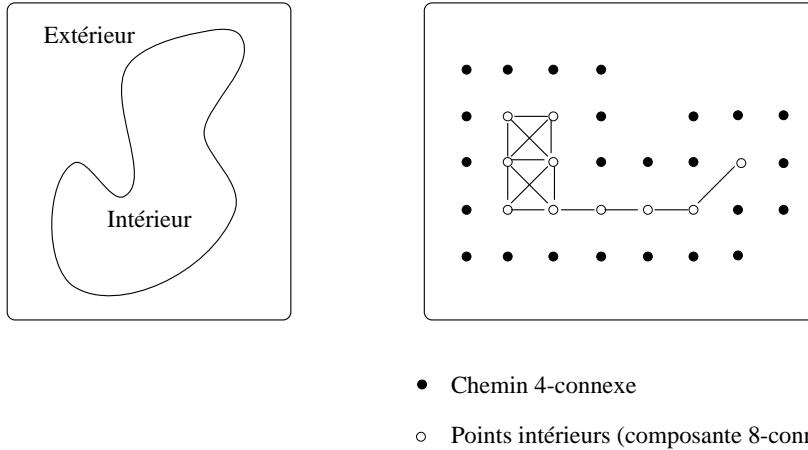


FIGURE 1.15 – Illustration du théorème de Jordan dans le cas continu et dans le cas discret sur une trame carrée (les points extérieurs ne sont pas représentés).

Le premier de ces résultats fait apparaître une dualité entre la 4- et la 8-connexité [23]. Ainsi, pour garantir que le théorème de Jordan soit respecté, il faut changer de connexité quand on passe d'un objet à son complémentaire. On considérera donc par exemple un objet en 4-connexité et son complémentaire en 8-connexité, ou le contraire. Sur l'exemple de la figure 1.15, les points de l'intérieur du chemin 4-connexe forment bien une composante 8-connexe, mais deux composantes 4-connexes. Le résultat n'est donc pas vrai si on prend la même connexité pour les points du chemin et pour le complémentaire du chemin.

Le deuxième résultat montre qu'au contraire ce type de problème ne se pose pas en 6-connexité. La trame hexagonale présente donc de meilleures propriétés topologiques que la trame carrée.

Sur une trame triangulaire, il existe de manière analogue une dualité entre la 3- et la 12-connexité, mais, comme nous l'avons souligné, cette trame est peu usitée.

En dimension 3 sur une trame cubique, il existe une dualité entre la 6- et la 26-connexité, et on a un analogue du théorème de Jordan en considérant cette fois une surface simple fermée.

La difficulté rencontrée en 4- et 8-connexités vient de ce que l'appartenance des frontières d'un pixel à un objet ou à son complémentaire n'est pas clairement définie. Elle peut être levée dans le cadre des complexes cellulaires [24]. Chaque pixel ou voxel est décomposé en éléments de dimension locale variant de 0 (les sommets) à 2 (l'intérieur du carré représentant un pixel) ou 3 (l'intérieur du cube représentant un voxel), et l'appartenance de chacun de ses éléments aux objets et à leur complémentaire est définie.

Ces structures ne posent pas de problèmes topologiques et le théorème de Jordan est vérifié, ainsi que l'illustre la figure 1.16. Ces structures peuvent également être généralisées à trois dimensions [7]. Il faut cependant noter que ces structures sont un peu plus lourdes à manipuler que les pixels ou les voxels car elles sont plus volumineuses et non homogènes (plusieurs types d'éléments, dont les voisinages sont également différents).

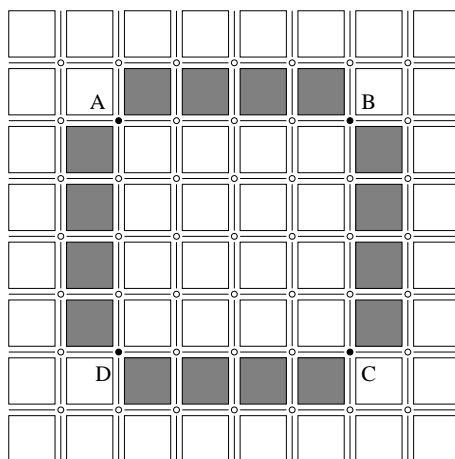


FIGURE 1.16 – Le théorème de Jordan est toujours vérifié dans le modèle des complexes cellulaires. Chaque pixel est décomposé en carré, arête et sommet. La couleur des points A, B, C et D détermine la connexité de la courbe noire et celle du fond.

1.3.3 Nombre d'Euler : un exemple de caractéristique topologique d'un objet

Un objet ou un ensemble de points peut être caractérisé par plusieurs types de mesures topologiques. Les plus simples sont le nombre de composantes connexes dont il est constitué et le nombre de trous qu'il contient. La différence entre ces deux nombres est appelé nombre d'Euler, et est utilisé dans des problèmes de reconnaissance des formes, comme un des attributs qui caractérisent un objet.

Si l'on appelle N_{cc} le nombre de composantes connexes d'un objet et N_t le nombre de trous, le nombre d'Euler vaut $E = N_{cc} - N_t$. La connexité utilisée pour calculer le nombre de trous et le nombre de composantes connexes doit respecter les contraintes du théorème de Jordan discret. Sur l'exemple de la figure 1.17, le nombre d'Euler vaut -1 si on considère les objets en 8-connexité et les trous en 4-connexité, et 0 si on choisit les conventions inverses.

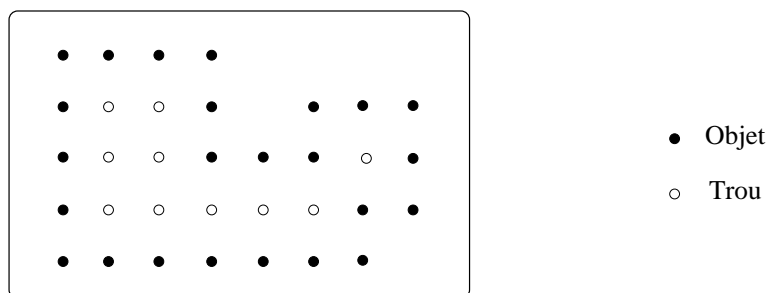


FIGURE 1.17 – Nombre d'Euler sur une trame carrée : si on considère les objets en 8-connexité et les trous en 4-connexité, $N_{cc} = 1$ et $N_t = 2$, donc $E = -1$. Avec les conventions inverses, $N_{cc} = 1$ et $N_t = 1$, donc $E = 0$.

Le nombre d'Euler peut être calculé par simple dénombrement de configurations locales, décrites dans la figure 1.18. Avec les notations de cette figure, on montre que :

– si on considère les objets en 8-connexité et les trous en 4-connexité, alors :

$$E = v - e - d + t - q,$$

– si on considère les objets en 4-connexité et les trous en 8-connexité, alors :

$$E = v - e + q,$$

v	•
e	• • • •
d	• • • •
t	• • • • • • • • • • • • •
q	• • • •

FIGURE 1.18 – Configurations locales pour le calcul du nombre d’Euler.

Le lecteur pourra vérifier les résultats de ces formules sur l’exemple de la figure 1.17.

Il est remarquable que ces caractéristiques ne fassent intervenir que des points de l’objet, alors que le nombre d’Euler implique à la fois l’objet et son complémentaire. Cet exemple est également particulièrement intéressant car il montre qu’il est possible de calculer le nombre d’Euler uniquement avec des caractéristiques locales, bien qu’il s’agisse d’une mesure globale sur un objet. Le calcul est donc beaucoup plus facile, et la mise en œuvre informatique avec ces caractéristiques locales est immédiate, alors que le calcul direct des nombres de composantes connexes et de trous serait plus difficile.

Cet exemple illustre ainsi une idée qu’on retrouvera souvent en traitement d’images, qui consiste à ramener des notions globales à des calculs qui peuvent se faire simplement localement. On voit apparaître ici un intérêt supplémentaire de la notion de voisinages élémentaires, puisque ce sont les points définis par ces voisinages qui interviennent dans les calculs locaux.

1.4 Représentations géométriques

Si la plupart des entités géométriques simples (droites, cercles, courbes) sont parfaitement maîtrisées dans le cas continu, leurs représentations discrètes soulèvent deux types de problèmes :

- comment représenter sur une trame discrète une entité géométrique continue, et quelles sont les propriétés de cette représentation par rapport aux propriétés vérifiées dans le cas continu ?
- à partir d’une entité géométrique discrète, quelles sont les représentations continues qui lui correspondent ?

Si l’on prend l’exemple de la droite, il est possible de se donner des règles (comme on le verra plus loin) qui permettent de déterminer les points de la trame représentant une droite continue. Inversement, étant donné un ensemble de points de la trame, on peut vérifier s’ils correspondent ou non à la discrétisation d’une droite continue suivant ces règles. Si c’est le cas, on trouvera en général qu’il n’y a pas unicité de la droite continue dont l’ensemble de points est la discrétisation, mais que les droites possibles constituent tout un faisceau.

On pourra se reporter à la référence [5] pour une étude de ces problèmes dans le cas de courbes quelconques. Ici, nous nous restreignons à l’étude des droites et des cercles. Puis nous abordons les

pavages de Voronoï et les triangulations de Delaunay, qui permettent de représenter les images de manière structurée, non pas systématique comme avec les pavages réguliers, mais en fonction du contenu des images.

Dans toute la suite, on se placera dans le cas 2D, sur une trame carrée. Les résultats peuvent en général être étendus à d'autres types de trames et à des espaces de dimension supérieure.

1.4.1 Discrétisation d'une droite continue

Une première méthode de discrétisation des droites est la méthode dite du « pavé semi-ouvert ». Le pavé semi-ouvert associé à un point discret P de coordonnées (i, j) est l'ensemble des points de \mathbb{R}^2 dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$i - \frac{1}{2} < x \leq i + \frac{1}{2} \text{ et } j - \frac{1}{2} < y \leq j + \frac{1}{2}.$$

La méthode de discrétisation par pavé semi-ouvert consiste alors à garder dans la représentation discrète tout point P de la trame tel que le pavé semi-ouvert qui lui est associé ait une intersection non vide avec l'entité à discrétiser. La figure 1.19 illustre le résultat dans le cas d'un segment de droite.

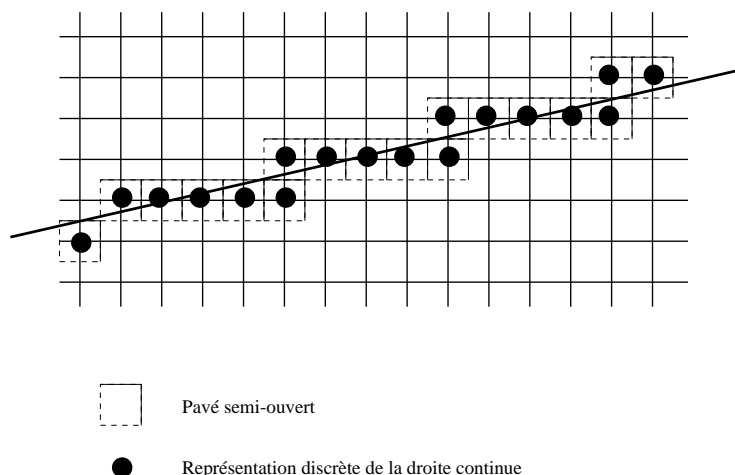


FIGURE 1.19 – Discrétisation d'un segment de droite par la méthode du pavé semi-ouvert.

L'ensemble discret ainsi obtenu ne constitue pas nécessairement un chemin simple au sens de la 4- ou de la 8-connexité. Sur l'exemple de la figure 1.19, l'ensemble de points obtenu n'est pas 4-connexe, et au sens de la 8-connexité, certains points ont plus de 2 voisins.

Si l'on cherche maintenant à discrétiser la frontière du demi-plan fermé limité par la droite (plutôt que la droite elle-même), en imposant une contrainte d'unilatéralité, on obtient cette fois un chemin 8-connexe [9]. La méthode consiste à garder les points discrets s'ils sont situés d'un même côté de la droite et tels que le segment vertical du maillage qui en part coupe la droite. Ce procédé est illustré sur la figure 1.20.

On remarquera que le résultat obtenu est différent de celui obtenu avec la méthode du pavé semi-ouvert, partant de la même droite continue.

Il est possible de combiner ces deux méthodes, en associant à chaque point du maillage un segment semi-ouvert, centré en ce point et vertical. Un point discret est alors conservé si le segment qui en est issu intersecte la droite continue. Le résultat de ce procédé est illustré sur la figure 1.21.

On obtient toujours un chemin 8-connexe, mais où les points discrets sont répartis des deux côtés de la droite continue³.

3. Le résultat est équivalent à celui qu'on obtiendrait avec l'algorithme de Bresenham, fréquemment utilisé en synthèse d'images, qui minimise l'erreur locale en chacun des points du tracé [16].

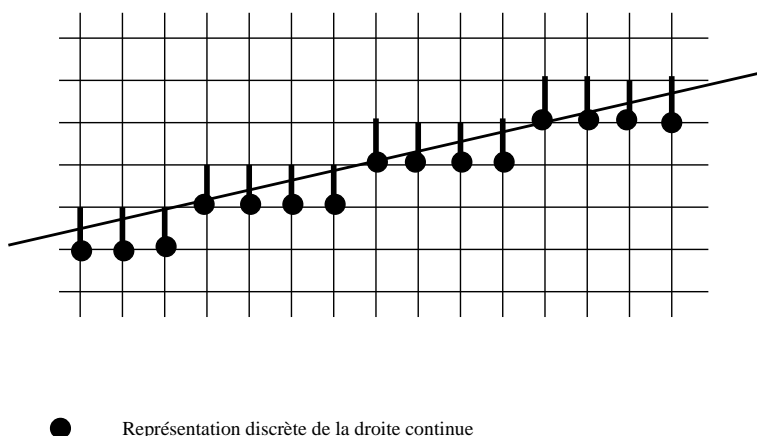


FIGURE 1.20 – Discretisation d’un segment de droite par la contrainte d’unilatéralité.

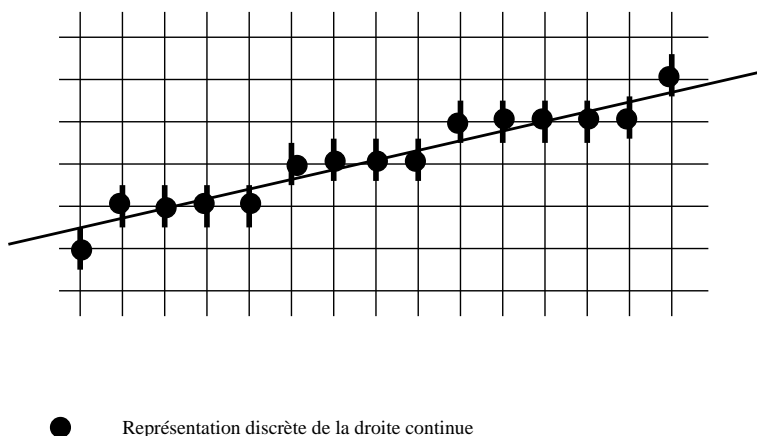


FIGURE 1.21 – Discretisation d’un segment de droite par la méthode de segment vertical semi-ouvert.

1.4.2 Caractérisation d’un segment de droite discret

Considérons maintenant le problème inverse : étant donné un ensemble de points discrets, est-il la discretisation d’un segment de droite continue ? En utilisant les caractérisations précédentes, cela revient à vérifier qu’il existe un segment de droite dont la discretisation selon les règles choisies donne exactement l’ensemble des points discrets. Cette démarche n’est pas toujours très opérationnelle, et on lui préfère deux autres méthodes, l’une reposant sur la propriété de la corde, et l’autre sur une description syntaxique d’un segment de droite discret.

Soit \mathcal{S} un ensemble de points discrets (toujours en dimension deux et sur une trame carrée). On dit que \mathcal{S} vérifie la propriété de la corde si et seulement si :

$$\forall (P, Q) \in \mathcal{S}, \forall R \in [P, Q], \exists T \in \mathcal{S}, d_\infty(T, R) < 1$$

où $[P, Q]$ désigne le segment de \mathbb{R}^2 (continu) joignant P à Q , et d_∞ désigne la distance obtenue à partir de la norme L_∞ dans \mathbb{R}^2 ($d_\infty((x, y), (x', y')) = \max(|x - x'|, |y - y'|)$).

La figure 1.22 présente un cas où la propriété de la corde est vérifiée et un cas où elle ne l’est pas.

Un segment discret vérifiant la propriété de la corde satisfait aux caractéristiques utilisées dans la méthode de discretisation du segment semi-ouvert [37, 34, 41].

Une deuxième caractérisation opérationnelle de segments de droite discrets repose sur leur description

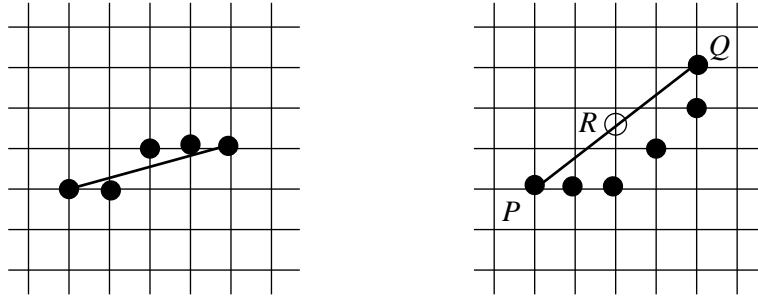


FIGURE 1.22 – L'ensemble de points discrets de gauche vérifie la propriété de la corde, celui de droite ne la vérifie pas (le point R du segment $[P, Q]$ est à une distance de plus de 1 de tout point discret de \mathcal{S}).

syntactique [32]. En effet, un segment de droite discret est constitué d'une suite de points, que l'on peut suivre en observant les changements de direction. La caractérisation est alors la suivante :

- on appelle section une sous-suite de points maximale sans changement de direction (les 8 directions possibles sont celles définies par la 8-connexité sur la trame carrée, comme l'indique la figure 1.23),
- dans un segment de droite discret, les sections ne peuvent avoir que deux directions distinctes, qui sont consécutives (selon le schéma de la figure 1.23),
- pour une de ces directions, les sections sont toutes de longueur 1, et pour l'autre direction, les sections sont de longueur n ou $n + 1$, où la valeur de n dépend de la pente de la droite.

On peut donc utiliser cette caractérisation, illustrée sur la figure 1.24, pour vérifier si l'ensemble de points considéré est bien un segment de droite discret.

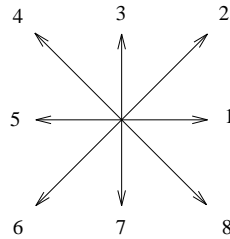


FIGURE 1.23 – Les 8 directions possibles sur une trame carrée. Deux directions sont consécutives si leurs numéros diffèrent de 1 (modulo 8).

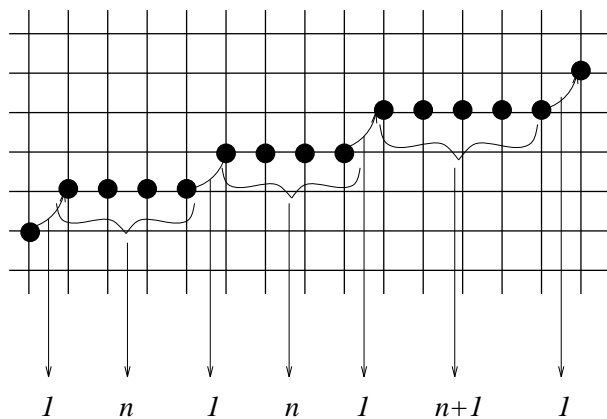


FIGURE 1.24 – Caractérisation syntaxique d'un segment de droite discret.

1.4.3 Droites analytiques discrètes

On considère ici le problème des droites discrètes d'un point de vue différent. Au lieu d'essayer de discrétiser une droite par une suite de points connexes, on cherche au contraire à savoir quels sont les points d'intersection avec la trame d'une droite continue quelconque.

Une droite d'équation $y = ax + b$ sera alors représentée par les points d'intersection avec les points du maillage. Pour que cette intersection soit non vide, il faut que la pente de la droite soit de la forme :

$$a = \frac{p}{q}$$

avec p et q entiers, premiers entre eux, et vérifiant :

$$p \leq q \leq N,$$

si l'image est de taille $N \times N$, et pour une pente de droite inférieure à 1 (les autres cas s'obtiennent par symétrie).

Les pentes de droites possibles forment donc une suite de Farey d'ordre N , notée $F(N)$ [11]. Pour une image de taille 4×4 , les droites possibles telles que $a \leq 1$ sont représentées sur la figure 1.25 ; on a dans ce cas :

$$F(N) = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}.$$

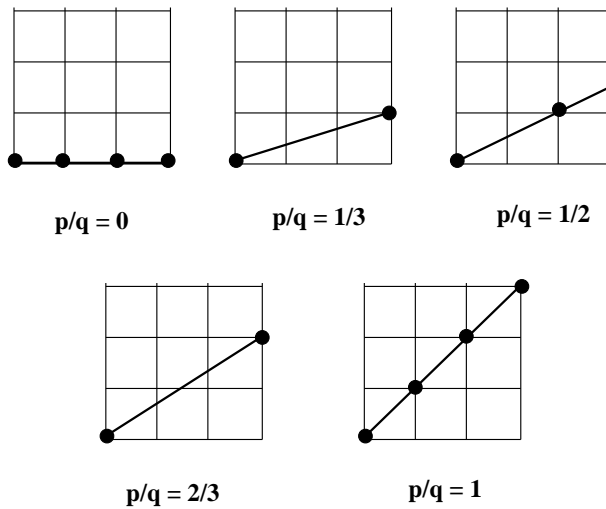


FIGURE 1.25 – Les droites possibles (d'intersection non vide avec l'ensemble des points de la trame) sur une image 4×4 .

Le nombre de droites possibles augmente bien sûr avec la taille de l'image. Par exemple pour $N = 6$, on a :

$$F(6) = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\right\}.$$

Le cardinal de $F(N)$ est de l'ordre de $3N^2/\pi^2$. Des propriétés des suites de Farey permettent de les construire. En particulier, si les fractions $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$ sont des termes consécutifs de $F(N)$, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} p'q - pq' &= 1, \\ \frac{p'}{q'} &= \frac{p + p''}{q + q''}. \end{aligned}$$

On peut ainsi calculer le nombre de droites possibles suivant la taille de l'image, mais aussi les nombres d'occurrences de ces droites en fonction de la pente a . En effet, si l'on essaye de retrouver une droite dans

une image à partir de deux points discrets, on trouvera plus souvent certaines droites que d'autres. Par exemple, les droites de pente 0 et 1 sur la figure 1.25 seront obtenues pour plus de couples de points que les autres droites.

Pour certaines transformations, ce phénomène constitue un véritable biais lié à la discrétisation dont il va falloir tenir compte. Par exemple, si l'on essaye de détecter des contours rectilignes en comptant les couples de points qui contribuent à un contour d'orientation donnée (transformation de Hough [26, 27], voir cours sur les formes), on détectera beaucoup plus facilement les contours de pente 0 ou 1 que des contours de pente très faible par exemple.

Si l'on cherche maintenant quelles sont les longueurs possibles de segments discrets, on arrive à des conclusions de même type. Soit L le carré d'une longueur de segment. L est obtenu comme la distance quadratique entre deux points discrets, donc de coordonnées entières. L est donc solution d'une équation diophantienne de la forme :

$$a^2 + b^2 = L$$

avec a et b entiers. On retrouvera pour les cercles le même type d'équation, qui sera étudié plus en détails à cette occasion.

Cette équation n'a pas toujours de solution. En effet, on constate que, suivant la parité de a et b , $a^2 + b^2$ est congru à 0, 1 ou 2 modulo 4. Les valeurs de L qui sont congrues à 3 modulo 4 ne peuvent donc jamais être obtenues. La figure 1.26 illustre l'irrégularité des nombres d'occurrences de L sur une image 16×16 et sur une image 50×50 . La décroissance générale des courbes obtenues est liée au fait que les images sont bornées.

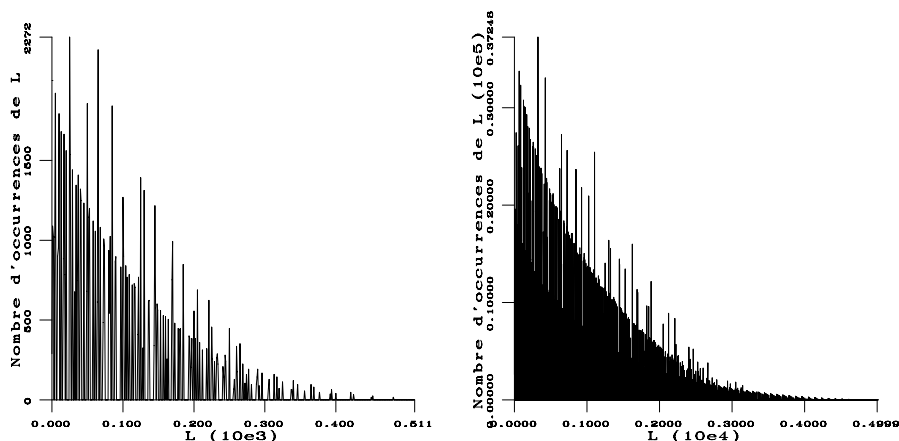


FIGURE 1.26 – Distribution des carrés des longueurs des segments discrets sur une image 16×16 et sur une image 50×50 .

Pour plus de détails sur les droites et courbes discrètes, on pourra consulter [8].

1.4.4 Cercles discrets

De la même manière que pour les droites, le nombre de points discrets qui sont situés sur un cercle continu peut varier beaucoup, et de manière irrégulière suivant le rayon. Pour certaines valeurs du rayon, il n'y a pas de solution. Ici encore, l'équation à résoudre est :

$$a^2 + b^2 = n$$

où a , b et n sont entiers, n représente le carré du rayon et $a^2 + b^2$ la distance quadratique d'un point discret au centre du cercle (on suppose que le centre coïncide avec un des points de la trame). On trouve

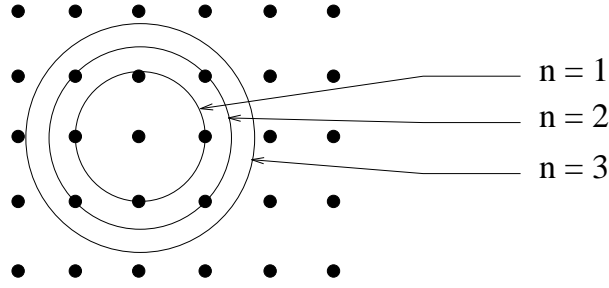


FIGURE 1.27 – Intersection de cercles continus avec des points de la trame carrée.

ainsi 4 points sur un cercle de rayon 1, 4 points pour $n = 2$, aucun point pour $n = 3$, etc., comme l'illustre la figure 1.27.

Le nombre de solutions de cette équation est donné par $r(n)$, calculé à partir de la décomposition de n en nombres premiers :

$$r(n) = 4 \prod_t (\tau_p + 1) \prod_q \left(\frac{1 + (-1)^{\sigma_q}}{2} \right).$$

où n est décomposé en facteurs premiers sous la forme :

$$n = 2^\alpha \prod_p p^{\tau_p} \prod_q q^{\sigma_q}$$

où les p représentent les facteurs premiers congrus à 1 modulo 4, et les q ceux qui sont congrus à 3 modulo 4.

Par exemple, pour $n = 5$ on obtient 8 points, pour $n = 25$ on obtient 12 points. En effet, $25 = 5^2$ et 5 est congru à 1 modulo 4. Le seul terme qui intervient dans $r(25)$ correspond donc à $p = 5$, avec $\tau_p = 2$, et $r(25) = 4 \times (2 + 1) = 12$. On remarque dans ces formules que, dès qu'intervient dans la décomposition de n un terme congru à 3 modulo 4 avec un exposant impair, alors $r(n) = 0$.

En pratique, la définition d'un cercle discret limitée aux points d'intersection avec le maillage est très restrictive. On préfère donc souvent considérer que le cercle a une certaine « épaisseur », et donc regarder plutôt l'intersection d'une couronne circulaire avec les points du maillage⁴.

Si k est l'épaisseur de la couronne, on cherche alors le nombre de points satisfaisant l'équation :

$$n \leq a^2 + b^2 < n + k$$

toujours avec a et b entiers. Le nombre de solutions est simplement donné par :

$$r(n, k) = \sum_{i=n}^{i=n+k-1} r(i).$$

Par exemple, pour $n = 54$ et $k = 4$, on trouve $r(n, k) = 0$. Ici encore, la grande variabilité de la fonction $r(n, k)$ entraîne des biais dans les méthodes d'analyse ou de synthèse d'images, ainsi que de reconnaissance des formes, qu'il ne faut pas négliger. Il existe des méthodes de correction, prenant en compte la forme des distributions obtenues.

Pour plus de détails sur les cercles et sphères discrets, on pourra consulter [1].

1.4.5 Pavage de Voronoï et triangulation de Delaunay

Nous nous attachons maintenant à des représentations structurées adaptées au contenu des images. Nous présentons ici les pavages de Voronoï, qui constituent un exemple de système de représentation

4. On peut bien sûr faire la même chose avec des droites et des segments, en considérant des bandes.

structurée pour l'interprétation de formes. Nous en verrons un autre exemple très différent avec le squelette dans le chapitre 2 sur la morphologie mathématique.

On se donne un ensemble de points $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$, appelés germes. À chacun de ces germes, on associe un domaine du plan \mathbb{R}^2 défini par :

$$V(P_i) = \{P \in \mathbb{R}^2 / \forall j, 1 \leq j \leq n, d(P, P_i) \leq d(P, P_j)\},$$

où d désigne une distance du plan.

Si l'on choisit pour d la distance euclidienne, alors les $V(P_i)$ sont des polygones convexes. En effet, si l'on prend tout d'abord $n = 2$, alors la séparation entre $V(P_1)$ et $V(P_2)$ est la médiatrice des deux points. Les $V(P_i)$ pour n quelconque sont donc des intersections de demi-plans, donc des polygones convexes (pas forcément bornés).

La figure 1.28 illustre cette définition (pour la distance euclidienne), ainsi que la convexité des pavés obtenus.

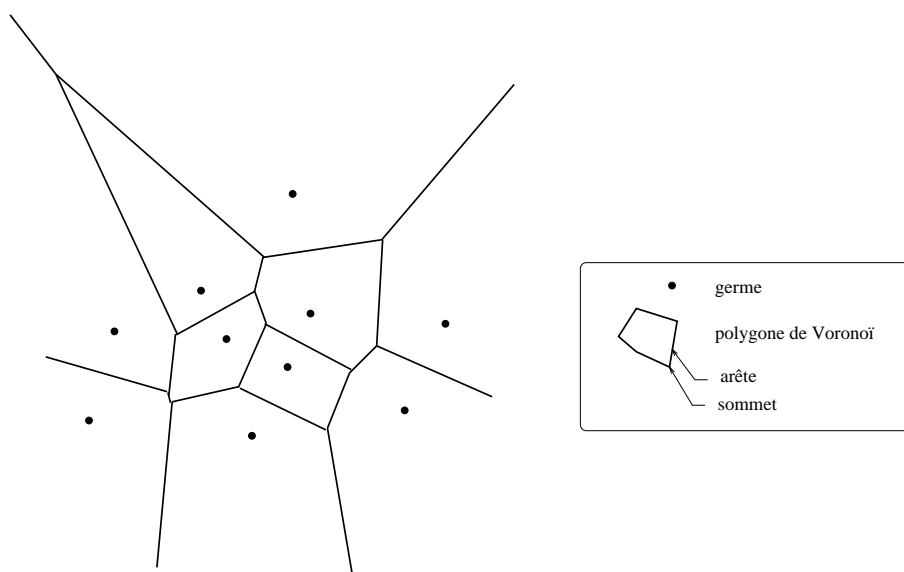


FIGURE 1.28 – Pavage de Voronoï à partir d'un ensemble de points.

Notons que le pavage obtenu correspond à la première des méthodes décrites pour construire des pavages dans la section 1.2. Les pavés sont appelés polygones de Voronoï, et sont formés d'arêtes et de sommets de Voronoï.

La définition du pavage de Voronoï se généralise directement à des germes quelconques (plus nécessairement ponctuels) mais, dans ce cas, les pavés obtenus ne sont pas nécessairement polygonaux.

Dans le cas discret, la définition du pavage de Voronoï demeure inchangée. Cependant, au lieu de la distance euclidienne, on en utilise généralement des approximations : les distances discrètes, telles qu'elles seront vues dans la section 1.6, qui permettent des calculs rapides tout en fournissant une bonne approximation de la distance euclidienne.

Le pavage de Voronoï a les propriétés suivantes [21] :

1. s'il n'existe pas de quadruplets de germes cocirculaires, tout sommet de Voronoï est équidistant de 3 germes exactement,
2. tout sommet du diagramme de Voronoï est centre d'un cercle passant par 3 germes et ne contenant aucun autre germe, ce cercle est appelé cercle de Delaunay,
3. $V(P_i)$ est non borné si et seulement si P_i appartient à la frontière de l'enveloppe convexe des P_j .

Si l'on joint par des segments les 3 germes équidistants d'un sommet de Voronoï, on obtient une triangulation de l'ensemble de P_i , appelée triangulation de Delaunay. Le résultat obtenu pour les points de la figure 1.28 est illustré sur la figure 1.29.

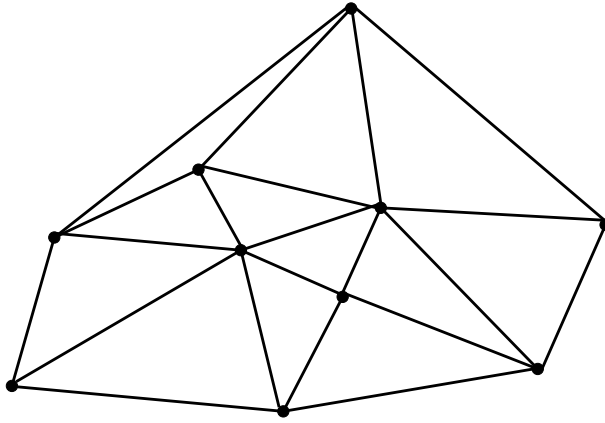


FIGURE 1.29 – Triangulation de Delaunay d’un ensemble de points.

La triangulation de Delaunay et le pavage de Voronoï sont deux structures de l’espace duales l’une de l’autre, comme l’illustre la figure 1.30. En effet, à chaque arête de Voronoï correspond une arête de la triangulation, qui lui est orthogonale; chaque germe est un sommet de la triangulation, et chaque sommet de Voronoï est le centre d’un triangle de Delaunay.

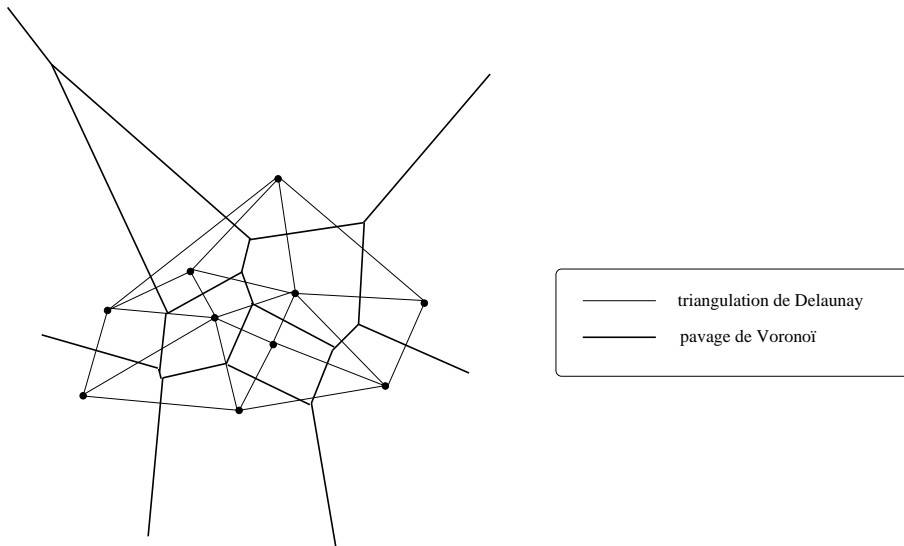


FIGURE 1.30 – Dualité entre triangulation de Delaunay et pavage de Voronoï.

La deuxième propriété est illustrée sur la figure 1.31. La triangulation de Delaunay est celle qui vérifie que le cercle circonscrit à chaque triangle ne contienne aucun sommet de la triangulation. On a donc ici une première application géométrique du pavage de Voronoï et de la triangulation de Delaunay.

La troisième propriété permet de déduire directement l’enveloppe convexe d’un ensemble de points, ce qui nous donne une deuxième application géométrique de ces deux notions.

Il existe beaucoup d’autres applications. Nous n’en mentionnerons plus qu’une ici, qui concerne le calcul de la distance minimum entre deux ensembles de points A et B . Cette distance est définie par :

$$d_{\min}(A, B) = \min_{a \in A, b \in B} d(a, b),$$

où $d(a, b)$ désigne la distance euclidienne entre les points a et b . Pour calculer cette distance minimum, il suffit d’effectuer la triangulation de Delaunay de la réunion de tous les points $A \cup B$, et de déterminer l’arête la plus courte ayant une extrémité dans A et l’autre dans B .

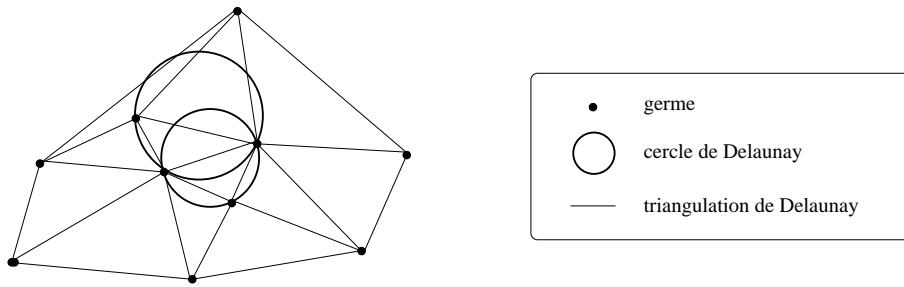


FIGURE 1.31 – Propriétés géométriques de la triangulation de Delaunay.

Enfin, mentionnons quelques algorithmes de calcul du pavage de Voronoï [47, 33]. Il existe des algorithmes récursifs qui sont optimaux (en termes de complexité algorithmique), mais dont la mise en œuvre n'est pas très facile. Il existe également des algorithmes incrémentaux, dont la complexité dans le cas le pire n'est pas optimale, mais qui sont plus simples à mettre en œuvre [13]. Le principe consiste à rajouter les points un à un et à modifier le pavage précédemment obtenu. L'intérêt est que l'ajout d'un point n'entraîne que des modifications locales du pavage. Supposons que l'on connaisse le pavage de $\{P_1, \dots, P_{n-1}\}$. Lorsqu'on ajoute P_n , on commence par rechercher le germe P_i ($1 \leq i \leq n-1$) le plus proche de P_n . La médiatrice de $[P_i, P_n]$ est le support d'une nouvelle arête du pavage. En se donnant un sens de parcours de cette médiatrice, on recherche l'intersection avec une arête du pavage précédent. Le germe correspondant, voisin de P_i , est le nouveau point P_i et on itère la procédure jusqu'à ce qu'on revienne au point de départ. On « tourne » ainsi autour de P_n pour construire le pavé qui lui est associé. Les parties d'arêtes du pavage précédent qui tombent dans ce nouveau pavé sont alors supprimées. La figure 1.32 illustre le principe de cette construction.

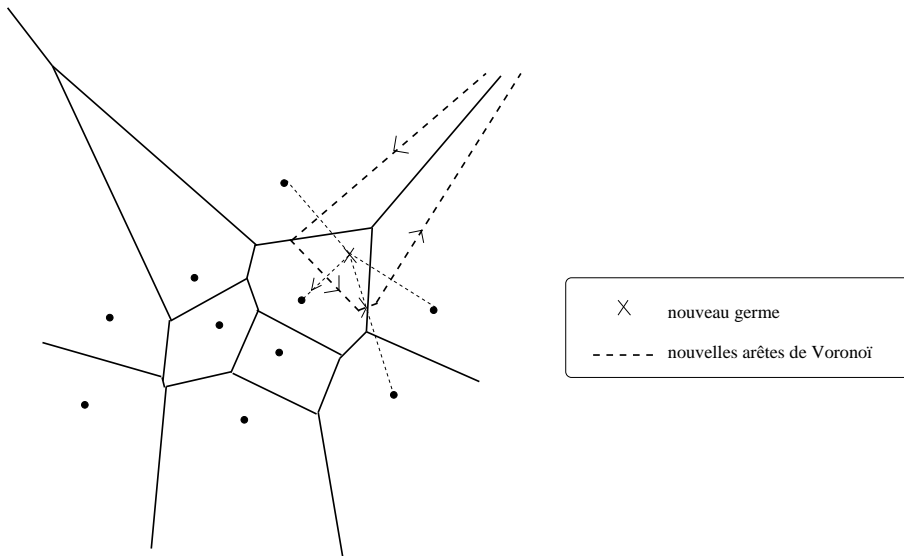


FIGURE 1.32 – Construction incrémentale du pavage de Voronoï.

1.5 Exemples de structures aléatoires

Dans nombre d'applications, en particulier pour l'analyse de textures, qu'elles soient binaires ou à niveaux de gris, il est nécessaire de générer des germes aléatoires dans l'image.

Une des structures aléatoires ponctuelles les plus utilisées repose sur des distributions de Poisson⁵.

5. Elles constituent par exemple une des composantes des schémas booléens que nous aborderons au chapitre 2.

Une distribution de points de Poisson vérifie les propriétés suivantes [44] :

- si X est un compact, et $N(X)$ la variable aléatoire qui compte les points de Poisson tombés dans X , alors $N(X)$ est une variable aléatoire d'espérance $\lambda V(X)$, où λ est la densité du processus de Poisson et $V(X)$ le volume du compact (sa surface dans le cas du plan);
- si X et X' sont deux compacts tels que $X \cap X' = \emptyset$, alors $N(X)$ et $N(X')$ sont deux variables aléatoires indépendantes;
- la variable aléatoire $N(X)$, pour X compact vérifie :

$$P(N(X) = n) = \frac{\Phi^n}{n!} \exp(-\Phi)$$

avec : $\Phi = \int_X \lambda dv$, (dans le cas d'une densité constante, $\Phi = \lambda V(X)$);

- étant donnés n points x_i dans X , x_i suit une loi uniforme sur X .

Si l'on essaye de généraliser la notion de points de Poisson à des structures plus complexes, on est confronté à des difficultés de génération de ces structures. Par exemple, la génération de droites de Poisson n'est pas immédiate. L'idée la plus simple serait de se donner une distribution de points de Poisson dans le plan, et en chaque point, de tracer une droite dont la direction est choisie de manière uniforme. Malheureusement la distribution de droites ainsi obtenue n'est pas de Poisson. Une autre solution, plus compliquée mais fournissant effectivement une distribution de Poisson, consiste à faire tourner un axe Oz autour d'un point O . Quand Oz balaye un secteur angulaire $(\alpha, \alpha + d\alpha)$, on tire sur la droite des points de Poisson de densité $\lambda d\alpha$, et on trace les droites orthogonales à Oz passant par ces points. On obtient ainsi un ensemble de droites de Poisson. Elles peuvent être utilisées par exemple pour définir des pavages aléatoires isotropes.

1.6 Fonction distance

La fonction distance est une transformation qui permet de passer d'une image binaire à une image numérique où la valeur de chaque point représente la distance à l'objet le plus proche. Bien que le concept soit global, la fonction distance peut être calculée de manière locale en propageant des distances locales (entre points voisins) définies dans un masque. Ce type d'algorithme évite de calculer de manière exhaustive les distances d'un point à tous les points de l'objet pour en trouver le minimum, ce qui serait prohibitivement long. La contre-partie est qu'on ne calcule alors qu'une approximation de la distance euclidienne. Les exigences sont alors d'obtenir, par des algorithmes rapides, une bonne approximation de la distance euclidienne. Ces méthodes, appelées aussi distances du chanfrein [3], sont un exemple où un procédé algorithmique permet de lever les difficultés liées à la discrétisation de l'espace.

Nous verrons dans le chapitre 2 que la fonction distance a de nombreuses applications en morphologie mathématique (outre toutes les applications nécessitant une estimation de la distance entre objets comme le recalage).

1.6.1 Définition de distances discrètes

Les distances discrètes sont définies comme des distances sur un graphe, dans lequel les nœuds sont les pixels ou voxels, et les arcs sont définis par un ensemble de vecteurs de base. Ils peuvent représenter les relations de connexité élémentaires (par exemple 4 ou 8 connexité), mais également relier des points plus éloignés. Ils représentent les directions selon lesquelles on peut se déplacer pour aller d'un point à un autre.

Soit $\mathcal{P} = \{\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m\}$ l'ensemble de ces vecteurs de base, qui engendrent le graphe, et auxquels on associe des longueurs d_i . On impose les conditions suivantes :

- $\vec{p}_i \in \mathcal{P} \Rightarrow -\vec{p}_i \in \mathcal{P}$,
- $\vec{p}_i \in \mathcal{P}, \lambda \vec{p}_i \in \mathcal{P} \Rightarrow \lambda = \pm 1$,
- $\|\vec{p}_i\| = \|\vec{p}_j\| \Rightarrow d_i = d_j$.

On définit alors la distance entre deux nœuds x et y (deux points) comme :

$$d(x, y) = \frac{1}{s} \min \left\{ \sum_{i=1}^m n_i d_i \mid n_i \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^m n_i \vec{p}_i = \vec{xy} \right\}$$

où s est un facteur d'échelle (typiquement $s = d_1$ si d_1 est la longueur associée au vecteur élémentaire selon un des axes de coordonnées). Cette distance est exactement la longueur du plus court chemin entre x et y sur le graphe engendré par \mathcal{P} . On peut vérifier aisément que toutes les propriétés d'une distance sont bien satisfaites.

En pratique, les \vec{p}_i et d_i sont représentés par des masques. Chaque point du masque est l'extrémité d'un \vec{p}_i et a pour coefficient le d_i correspondant, qui représente la distance locale entre ce point et le point central du masque (celui-ci est affecté du coefficient 0).

1.6.2 Exemples

Pour la qualité de l'approximation, il est possible de jouer sur deux paramètres : la taille du masque (donc le nombre de directions représentées, ou encore le nombre de \vec{p}_i) et les coefficients du masque (donc les d_i). Plusieurs critères ont été proposés pour estimer cette qualité, le plus fréquemment utilisé étant de minimiser le maximum de la différence avec la distance euclidienne. Les masques les plus employés sont illustrés sur la figure 1.33. Les deux premiers correspondent respectivement à la 4- et à la 8-connexité sur une trame carrée. Le troisième (figure 1.33 c) permet d'avoir une erreur faible ($\leq 8\%$) par rapport à la distance euclidienne en modifiant les coefficients (toutes les distances sont alors multipliées par 3). Le dernier (figure 1.33 d) donne une erreur inférieure à 2% en jouant à la fois sur les coefficients et sur la taille du masque (toutes les distances sont alors multipliées par 5).

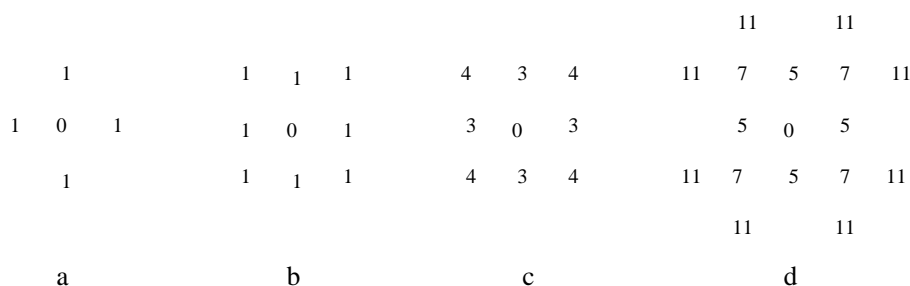


FIGURE 1.33 – Exemples de masques pour la distance du chanfrein.

1.6.3 Algorithmes de calcul

Une première famille d'algorithmes opère sur une représentation classique de l'image, sous forme de tableau. Les algorithmes de cette famille peuvent être de deux types : parallèle ou séquentiel. Nous les illustrons sur le problème du calcul de la fonction distance (distance de chaque point de l'image au point des objets le plus proche, au sens de la distance discrète définie plus haut).

Si f^k représente l'image à l'itération k et g le masque choisi, l'algorithme parallèle s'exprime de la manière suivante : les points de l'objet sont mis à 0 et les points du complémentaire à une valeur infinie (en pratique, la plus grande valeur stockable), pour former l'image f^0 ; puis la formule suivante est itérée jusqu'à convergence :

$$f^k(x) = \min \{ f^{k-1}(y - x) + g(y), y \in \text{support}(g) \}.$$

L'inconvénient majeur de cet algorithme est que le nombre d'itérations dépend de la taille de l'image, de la taille de l'objet et de sa forme. De plus deux images doivent être gardées en mémoire. Cet algorithme s'applique à n'importe quelle trame et n'importe quel masque.

L'algorithme séquentiel ne nécessite que deux itérations. Il procède en deux balayages en sens opposés de l'image et le masque est divisé en deux parties g_1 et g_2 contenant les points déjà examinés dans le sens courant de balayage. Pour $k = 1, 2$, on effectue l'opération suivante (f^0 étant calculée comme précédemment) :

$$f^k(x) = \min\{f^{k-1}(x), f^k(y-x) + g_k(y), y \in \text{support}(g_k)\}.$$

Cet algorithme vérifie l'exigence de la rapidité. Il ne nécessite qu'une image en mémoire et s'applique également à n'importe quelle trame et n'importe quel masque.

Une deuxième famille d'algorithmes repose sur les contours des objets. En effet, les points situés à l'intérieur des objets ont toujours une distance nulle à l'objet, et les points les plus proches des points extérieurs aux objets sont toujours des points situés sur les contours des objets. Ainsi, seuls ceux-ci interviennent réellement dans le calcul.

Un premier type d'algorithme dans cette famille repose sur une structure de chaîne pour représenter les contours des objets. Le principe du calcul de la fonction distance consiste à déplacer ces contours par des règles de ré-écriture, pour déterminer successivement les points à une distance 1 des objets, puis les points à une distance 2, etc. [50]. Une étape d'ajustement est parfois nécessaire, par exemple quand le déplacement d'un contour conduit à connecter deux objets. Ce type d'algorithme ne nécessite qu'une image en mémoire. L'accès aux voisins doit être facile car il est fréquemment utilisé dans les règles de ré-écriture. Il est très rapide, mais ne peut pas être généralisé à des images 3D car il n'y a pas d'ordre naturel sur les points de la surface d'un objet 3D permettant de les représenter sous forme de chaîne. Les règles de ré-écriture et d'ajustement comportent beaucoup de cas particuliers et la procédure complète est donc un peu délicate.

Un deuxième type d'algorithme repose sur une représentation des points de contours sous la forme d'une simple file d'attente FIFO (*first in, first out*). Cette pile est initialisée par les points de contours des objets (l'ordre n'a pas d'importance). L'algorithme extrait alors le premier point p de la pile, et recherche ses voisins. Pour chaque voisin q , si celui-ci est à l'extérieur des objets, il est ajouté à la pile, et on lui affecte une valeur de distance qui vaut celle de p plus la distance locale entre p et q (d_i si $\vec{p}\vec{q} = \vec{p}_i$). Cet algorithme est également très rapide, généralisable à 3D, et nécessite également un accès rapide aux voisins.

Notons que ces différentes classes d'algorithmes sont utilisées pour de nombreuses autres transformations.

Chapitre 2

Morphologie mathématique

2.1 Introduction et préliminaires

La morphologie mathématique est une théorie essentiellement non linéaire, utilisée en particulier en analyse d'images, dont le but est l'étude des objets en fonction de leur forme, de leur taille, des relations avec leur voisinage (en particulier topologiques), de leur texture, et de leurs niveaux de gris ou de leur couleur. Par les transformations qu'elle propose, elle se situe à différents niveaux du traitement d'images (filtrage, segmentation, mesures, analyse de texture) et fournit ainsi des outils pour la reconnaissance des formes. La morphologie mathématique, développée à l'origine pour l'étude des matériaux poreux, trouve maintenant ses applications dans de nombreux domaines du traitement d'images, aussi bien 2D que 3D, en biologie et cytologie quantitative, en imagerie médicale, en imagerie aérienne et satellitaire, en robotique et vision par ordinateur, en contrôle industriel non destructif, dans les études sur les documents et les œuvres d'art. Hors du domaine du traitement des images, on trouve des applications par exemple en analyse de données, ou encore en théorie des jeux.

La morphologie mathématique a été développée à l'origine à l'École des Mines de Paris. Elle repose essentiellement sur les travaux de G. Matheron effectués dans les années 60-70, puis sur ceux de J. Serra et de son équipe. Depuis ces premiers développements, elle a pris une ampleur internationale et plusieurs équipes s'y consacrent.

Elle s'appuie sur la théorie des ensembles, des treillis, de la topologie des fermés et des probabilités. Elle s'applique ainsi à des structures algébriques variées (ensembles, fonctions, mais également ensembles flous ou propositions logiques), pouvant avoir un caractère aléatoire (pour l'analyse de textures par exemple).

Ce chapitre n'est qu'une introduction à la morphologie mathématique. Il en donne succinctement les bases mathématiques, rappelle les opérations de base et leurs principales propriétés (vues dans l'UE SI241), et présente des exemples d'outils de filtrage et de segmentation qui en sont déduits. On se placera de manière générale dans l'espace \mathbb{R}^n , puis on définira les notions discrètes associées, dans \mathbb{Z}^n ou \mathbb{N}^n . Une présentation détaillée peut être trouvée dans les ouvrages [44, 45, 10, 43, 46, 30].

On trouve à la base des transformations de morphologie mathématique quatre principes fondamentaux qui guident leur construction et qui sont vérifiés pour la plupart des opérations. Ils sont exprimés ci-dessous pour une opération Ψ quelconque, agissant sur un ensemble ou une fonction f définie sur \mathbb{R}^n .

Compatibilité avec les translations : Ce principe exprime l'indépendance des transformations par rapport à l'origine de l'espace¹ :

$$\forall t \in \mathbb{R}^n, \quad \Psi(f + t) = \Psi(f) + t.$$

Compatibilité avec les homothéties : Ce principe assure l'indépendance des transformations par rapport à un paramètre d'échelle :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \Psi(\lambda f) = \lambda \Psi(f).$$

1. Cette propriété est appelée aussi invariance spatiale dans d'autres théories du traitement d'images.

Connaissance locale : Pour connaître $\Psi(f)$ dans un domaine Z' de \mathbb{R}^n , il suffit de connaître f dans un domaine Z de \mathbb{R}^n :

$$\forall Z' \subset \mathbb{R}^n, Z' \text{ borné}, \exists Z \subset \mathbb{R}^n, Z \text{ borné}, [\Psi(f \cap Z)] \cap Z' = \Psi(f) \cap Z',$$

où $f \cap Z$ désigne la restriction de f au domaine Z .

Semi-continuité : ce principe (voir définitions 18 et 22) assure la robustesse des transformations.

Outre ces propriétés fondamentales, les opérateurs de morphologie mathématique peuvent avoir des propriétés algébriques dont les principales sont définies ci-dessous.

Definition 1. Croissance : Une transformation Ψ sur des ensembles de \mathbb{R}^n ou des fonctions de \mathbb{R}^n dans $\overline{\mathbb{R}}$ est croissante si :

$$\begin{aligned} \forall X, Y, X \subset Y &\Rightarrow \Psi(X) \subset \Psi(Y), \\ \forall f, g, f \leq g &\Rightarrow \Psi(f) \leq \Psi(g). \end{aligned}$$

Definition 2. Extensivité et anti-extensivité : Une transformation Ψ sur des ensembles de \mathbb{R}^n ou des fonctions de \mathbb{R}^n dans $\overline{\mathbb{R}}$ est extensive si :

$$\begin{aligned} \forall X, X &\subset \Psi(X), \\ \forall f, f &\leq \Psi(f). \end{aligned}$$

Ψ est anti-extensive si :

$$\begin{aligned} \forall X, \Psi(X) &\subset X, \\ \forall f, \Psi(f) &\leq f. \end{aligned}$$

Definition 3. Idempotence : Une transformation Ψ sur des ensembles de \mathbb{R}^n ou des fonctions de \mathbb{R}^n dans $\overline{\mathbb{R}}$ est idempotente si :

$$\begin{aligned} \forall X, \Psi[\Psi(X)] &= \Psi(X), \\ \forall f, \Psi[\Psi(f)] &= \Psi(f). \end{aligned}$$

Definition 4. Dualité : Deux transformations Ψ et Φ sur des ensembles de \mathbb{R}^n ou des fonctions de \mathbb{R}^n dans $\overline{\mathbb{R}}$ sont duales par rapport à la complémentation si :

$$\forall X, \Psi(X^C) = [\Phi(X)]^C,$$

où X^C désigne le complémentaire de X dans \mathbb{R}^n (c'est-à-dire $\mathbb{R}^n \setminus X$),

$$\forall f, \Psi(-f) = -\Phi(f).$$

Notons que pour des images numériques, représentées par des fonctions à valeurs positives et bornées par une valeur maximale M , la dualité s'exprime par :

$$\Psi(M - f) = M - \Phi(f).$$

Nous verrons dans la suite que ce principe de dualité exprime le fait que deux opérations, qui ne sont pas l'inverse l'une de l'autre, ont des « effets contraires » (les opérations de morphologie mathématique étant généralement non inversibles).

Pour décrire de manière très synthétique la « boîte à outils » de la morphologie mathématique, il faut retenir les points suivants :

- les transformations sont non linéaires, elles sont fondées sur des opérations de type « sup » et « inf » ;
- les transformations sont généralement non inversibles, et elles perdent donc de l'information ; le travail du morphologue consiste alors à déterminer les transformations adaptées à son problème, c'est-à-dire qui vont « simplifier » les images en retenant l'information pertinente ;
- des propriétés analytiques et algébriques sont attachées aux opérations, ce qui permet d'assurer des propriétés précises sur les objets ou images issues des transformations ; c'est sur ces propriétés que l'on s'appuie pour enchaîner les transformations afin de résoudre un problème particulier ;
- aux transformations sont également associés des algorithmes, qui permettent de les appliquer de manière efficace.

Les parties suivantes s'attachent à décrire plus précisément ces concepts pour les principales opérations morphologiques.

2.2 Les quatre opérations : rappels

2.2.1 Notion d'élément structurant et cadre ensembliste

Des premières applications à l'étude des milieux poreux est née l'approche ensembliste de la morphologie mathématique. Elle s'applique à des images ou objets binaires et les étudie sous l'angle de leurs relations avec un ensemble fixé. Cet ensemble, dont on choisit la forme et la taille, est appelé élément structurant. Les relations sont de type ensembliste (réunion, intersection, etc.). Étant donné un élément structurant et une relation, l'image (ou l'objet) de départ est transformé en translatant l'élément structurant en tout point et en examinant si la relation entre l'objet et l'élément structurant translaté est vérifiée. Les propriétés des opérations ainsi définies et des images transformées découlent de la théorie des ensembles. C'est selon ce principe que seront par exemple définies la dilatation et l'érosion binaires. L'élément structurant définit un voisinage autour de chaque point de l'image et ce sont donc des propriétés locales des objets qui sont ainsi mises en évidence.

En pratique, les images sont définies sur des « trames » discrètes. Le problème consiste alors à étudier dans quelle mesure les définitions et les propriétés des transformations décrites pour l'espace continu sont transposables à un espace discret.

Les trames les plus utilisées en dimension 2 sont la trame carrée (ou rectangulaire) et la trame hexagonale où les points sont disposés en quinconce. Plus de détails peuvent être trouvés dans le chapitre sur la géométrie discrète (UE SI241) ou dans les références qui y sont citées.

Les voisinages élémentaires associés aux différentes trames constituent les éléments structurants élémentaires (de taille 1) utilisés en morphologie mathématique. Effectuer une dilatation de taille n signifie alors effectuer n fois une itération de taille 1, par un de ces éléments structurants.

2.2.2 Erosion et dilatation binaires

Les définitions qui suivent reposent sur la définition classique de l'addition de Minkowski de deux ensembles, qui correspond à l'addition vectorielle :

$$X \oplus Y = \{x + y / x \in X, y \in Y\}. \quad (2.1)$$

Dans toute cette partie, on considérera des ensembles de \mathbb{R}^n . Un élément structurant est également un ensemble dont on se donne la forme et la taille, et dont on particularise un point (l'origine) qu'on appelle le centre (qui n'est pas forcément le centre géométrique).

Definition 5. Dilatation binaire : La dilatation binaire d'un ensemble X par un élément structurant B est définie comme l'ensemble obtenu par addition de Minkowski de X par le symétrique \check{B} de B par rapport à son centre :

$$D(X, B) = X \oplus \check{B} = \{x + y / x \in X, y \in \check{B}\}. \quad (2.2)$$

Il existe des définitions légèrement différentes, pour lesquelles la dilatation est égale à l'addition de Minkowski. Cela implique des modifications des propriétés, en particulier dans les relations de dualité, mais permet une meilleure conformité avec le cadre algébrique que nous verrons plus loin.

L'équation 2.2 est équivalente aux expressions suivantes :

$$\begin{aligned} D(X, B) &= \bigcup_{x \in X} \check{B}_x \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n / B_x \cap X \neq \emptyset\}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

où B_x désigne le translaté de l'élément structurant au point x (c'est-à-dire le centre de l'élément structurant coïncide avec x).

Dans cette formulation (équation 2.3) apparaissent clairement les concepts de l'approche ensembliste : ici la relation imposée entre la forme étudiée et l'élément structurant est l'intersection. Ainsi, un point appartient à l'objet résultat si l'élément structurant centré en ce point intersecte l'objet initial.

Propriétés de la dilatation. La dilatation a les propriétés suivantes (les démonstrations sont immédiates en utilisant les formules 2.2 ou 2.3) :

- elle est extensive ($X \subset D(X, B)$) si le centre de B appartient à B ,
- elle est croissante ($X \subset Y \Rightarrow D(X, B) \subset D(Y, B)$),
- $B \subset B' \Rightarrow D(X, B) \subset D(X, B')$,
- elle commute avec la réunion mais pas avec l'intersection :

$$D(X, B \cup B') = D(X, B) \cup D(X, B'),$$

$$D(X, B \cap B') \subset D(X, B) \cap D(X, B'),$$

- elle vérifie une relation d'itération (associativité) :

$$D[D(X, B), B'] = D(X, B \oplus B').$$

Ces propriétés algébriques ont des conséquences importantes sur les applications de cette transformation, à la fois du point de vue algorithmique et du point de vue des propriétés des objets obtenus. Par exemple, la relation d'itération permet de calculer une dilatation par un disque de rayon 2 soit directement, soit comme une suite de deux dilatations par un disque de rayon 1.

De plus, la dilatation vérifie les 4 principes fondamentaux donnés en introduction.

Définition 6. Érosion binaire : L'érosion d'un ensemble X par un élément structurant B est définie par :

$$E(X, B) = \{x \in \mathbb{R}^n / B_x \subset X\} \quad (2.4)$$

$$= \{x / \forall y \in B, x + y \in X\} = X \ominus \check{B}. \quad (2.5)$$

L'équation 2.4 correspond à l'approche ensembliste, où cette fois la relation imposée entre l'élément structurant et la forme est l'inclusion. L'équation 2.5 fait référence à la soustraction de Minkowski notée \ominus .

Propriétés de l'érosion. La propriété essentielle de l'érosion est qu'elle est la transformation duale de la dilatation par rapport à la complémentation :

$$E(X, B) = [D(X^C, B)]^C. \quad (2.6)$$

Ainsi, il est équivalent d'éroder un objet ou de dilater son complémentaire. Cette propriété peut également être présentée comme définition, dont on déduit alors les expressions 2.4 et 2.5.

L'érosion a les propriétés algébriques suivantes (elles peuvent être démontrées soit directement à partir des formules 2.4 et 2.5, soit déduites de celles de la dilatation grâce à la formule de dualité 2.6) :

- elle est anti-extensive si le centre de B appartient à B ,

- elle est croissante,
- $B \subset B' \Rightarrow E(X, B') \subset E(X, B)$,
- elle satisfait les relations suivantes par rapport à la réunion et à l'intersection (en particulier, elle commute avec l'intersection) :

$$E[(X \cap Y), B] = E(X, B) \cap E(Y, B),$$

$$E[(X \cup Y), B] \supset E(X, B) \cup E(Y, B),$$

$$E[X, (B \cup B')] = E(X, B) \cap E(X, B'),$$

$$E[X, (B \cap B')] \supset E(X, B) \cup E(X, B'),$$

- elle satisfait la relation d'itération suivante :

$$E[E(X, B), B'] = E(X, B \oplus B'),$$

- la succession d'une érosion et d'une dilatation vérifie l'inclusion suivante :

$$D[E(X, B), B'] \subset E[D(X, B'), B]. \tag{2.7}$$

De plus, l'érosion vérifie les 4 principes énoncés en introduction.

Liens avec la fonction distance. La fonction distance (voir cours sur la géométrie discrète dans l'UE SI241) a de nombreuses applications en morphologie mathématique (outre toutes les applications nécessitant une estimation de la distance entre objets comme le recalage). En voici quelques exemples :

- elle permet d'effectuer très rapidement des dilatations et érosions de taille quelconque : en effet, la fonction distance calculée avec les masques de la figure 2.1 a et b fournit des « courbes de niveaux » autour de l'objet qui correspondent exactement aux points qui seraient rajoutés à l'objet par des dilatations successives par les éléments structurants élémentaires ; il suffit alors de seuiller la fonction distance à la taille de dilatation souhaitée pour obtenir, en deux passes seulement, le dilaté (pour l'érosion, on procède de même, en calculant cette fois la distance des points de l'objet au complémentaire) ;
- elle permet de réaliser des dilatations et érosions par des éléments structurants proches d'un disque (par exemple avec le masque de la figure 2.1 d) ;
- elle permet d'obtenir très rapidement les érodés ultimes d'un ensemble d'objets X (c'est-à-dire les composantes connexes de $E(X, B_r)$ qui disparaissent par une érosion de taille $r+1$), comme maxima régionaux de la fonction distance ;
- elle peut être utilisée pour le calcul de squelettes.

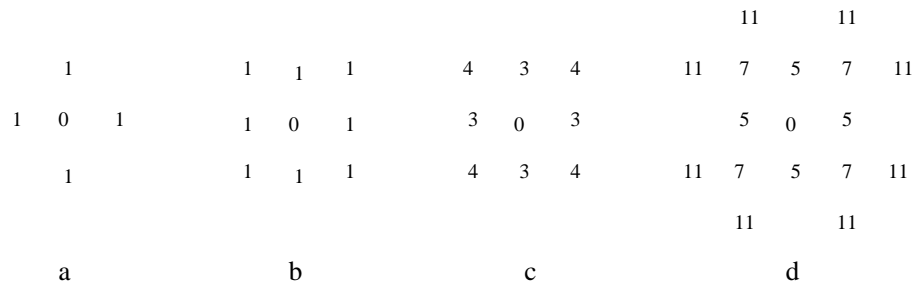


FIGURE 2.1 – Exemples de masques pour la distance du chanfrein.

La figure 2.2 montre que les courbes d'iso-distances à l'intérieur des objets sont les érodés successifs de ces objets.

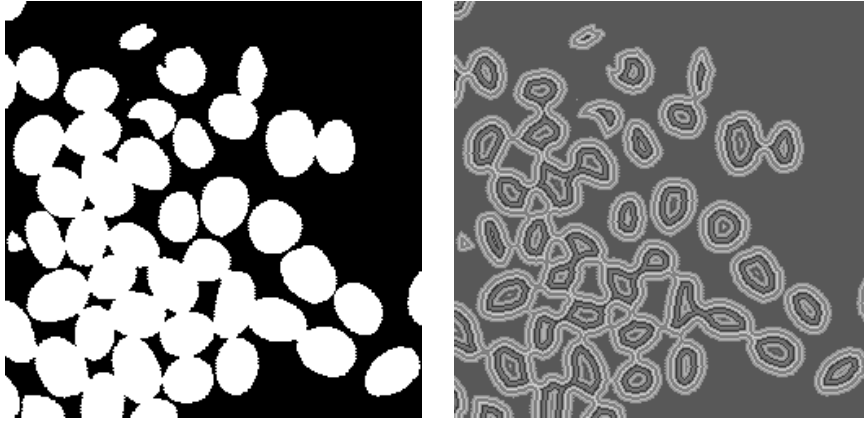


FIGURE 2.2 – Les courbes d’iso-distances à l’intérieur des objets sont les érodés successifs.

2.2.3 Erosion et dilatation de fonctions

La généralisation des transformations binaires à des transformations numériques (sur des fonctions) peut s’effectuer de deux manières :

1. soit en remplaçant dans les définitions tous les concepts ensemblistes par leurs équivalents fonctionnels :

$$\begin{aligned}
 \cup &\rightarrow \sup / \vee \\
 \cap &\rightarrow \inf / \wedge \\
 \subset &\rightarrow \leq \\
 \supset &\rightarrow \geq
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

2. soit en considérant le sous-graphe de la fonction (voir définition 23) comme un ensemble binaire (dans un espace de dimension $n + 1$) et en lui appliquant les opérations binaires.

Ces deux approches sont équivalentes (pour des fonctions semi-continues supérieurement à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et des éléments structurants bornés) mais la première est plus opérationnelle. Les équivalences des expressions 2.8 se retrouveront dans les définitions et les propriétés qui suivent.

Cette généralisation est indispensable pour pouvoir traiter des images à niveaux de gris. Nous considérerons tout d’abord des éléments structurants binaires, puis nous donnerons les définitions générales des transformations sur des fonctions avec des éléments structurants fonctionnels.

Définition 7. Dilatation fonctionnelle (*élément structurant binaire*) : La dilatation d’une fonction f par un élément structurant B est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad D(f, B)(x) = \sup\{f(y) / y \in B_x\}.
 \tag{2.9}$$

L’équation 2.9 fait apparaître explicitement que les valeurs de f intervenant dans le résultat de l’opération en un point sont celles prises dans un voisinage de ce point, ce voisinage étant défini par l’élément structurant ².

Propriétés. La dilatation a les propriétés suivantes (analogues des propriétés de la dilatation binaire) :

- elle est extensive si le centre de B appartient à B ,
- elle est croissante,
- $D(f \vee g, B) = D(f, B) \vee D(g, B)$,
- $D(f \wedge g, B) \leq D(f, B) \wedge D(g, B)$,

2. On a le même résultat pour la dilatation binaire.

- elle vérifie les quatre principes énoncés en introduction.

Definition 8. Érosion fonctionnelle (*élément structurant binaire*) : L'érosion d'une fonction f par un élément structurant B est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, E(f, B)(x) = \inf\{f(y) / y \in B_x\}. \quad (2.10)$$

Ici encore, la valeur prise en un point dépend uniquement des valeurs de f dans un voisinage, défini par B , de ce point.

Propriétés. L'érosion a les propriétés suivantes (similaires à celles de l'érosion binaire) :

- elle est duale de la dilatation,
- elle est anti-extensive si le centre de B appartient à B ,
- elle est croissante,
- $E(f \vee g, B) \geq E(f, B) \vee E(g, B)$,
- $E(f \wedge g, B) = E(f, B) \wedge E(g, B)$,
- elle vérifie les quatre principes de l'introduction.

Notons que la dilatation et l'érosion sont des cas particuliers de filtres de rang. Dans un tel filtre, les niveaux de gris des voisins d'un point sont classés par ordre croissant et la valeur de ce point est remplacée par celle d'un rang donné. Le min utilisé dans l'érosion correspond donc à un filtre de rang 1 et le max de la dilatation à un filtre de rang p (si le voisinage comporte p points). Cependant ce ne sont pas des filtres au sens morphologique du terme.

Cas discret. Une fois les notions de topologie définies sur la trame discrète, la transposition des définitions morphologiques de base ne pose pas de problème. Elles s'expriment de la même manière que dans le cas continu, ou plus simplement puisque les « sup » et les « inf » deviennent des « max » et des « min » lorsque l'élément structurant B contient un nombre fini de points. Par exemple, la dilatation par un élément structurant de taille 1 en 4-connexité, s'exprime en tout point M de coordonnées (x, y) de la trame par :

$$D(f, B)(M) = \max\{f(x, y - 1), f(x - 1, y), f(x, y), f(x + 1, y), f(x, y + 1)\},$$

que f soit une fonction ou un ensemble. Cette formule fournit en même temps un moyen opérationnel simple pour calculer la dilatation.

Il est remarquable de noter que toutes les propriétés de la dilatation, de l'érosion, de l'ouverture et de la fermeture (qui seront vues plus loin) sont encore valables sur une trame discrète (si l'on exclut celles liées à la semi-continuité qui n'ont pas de sens dans ce cas)³.

Si la transposition de ces opérations de base est si aisée, c'est que celles-ci impliquent essentiellement des notions ensemblistes (éventuellement généralisées à des fonctions comme nous l'avons vu plus haut) et des concepts topologiques très simples, de voisinage entre points uniquement.

Des transformations plus complexes impliquant des notions topologiques plus globales (préservation de la connexité et de l'homotopie d'un objet par exemple) sont beaucoup plus délicates à transposer. Ce sera le cas par exemple du squelette (voir parties 2.8.3 et 2.8.4) : les définitions continues ont de très bonnes propriétés mais leur transposition directe au cas discret en fait perdre la plupart. On est alors conduit à redéfinir le squelette directement dans l'espace discret, par des procédés qui garantissent les propriétés que l'on veut conserver.

Sans aller chercher des transformations aussi complexes, une simple rotation peut dégrader les propriétés topologiques d'un objet (par exemple lui faire perdre sa connexité, ou faire apparaître des trous là où il n'y en avait pas).

Considérons maintenant des éléments structurants fonctionnels, c'est-à-dire des fonctions g de \mathbb{R}^n dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ telles que $\{x \in \mathbb{R}^n / g(x) \neq -\infty\}$ est borné.

3. Notons que dans l'expression de la dualité entre dilatation et érosion, et entre ouverture et fermeture, l'élément structurant reste le même des deux côtés de l'égalité.

Definition 9. Dilatation par une fonction : La dilatation d'une fonction f par une fonction g est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad D(f, g)(x) = \sup\{f(y) + g(y - x) \mid y \in \mathbb{R}^n\}. \quad (2.11)$$

Definition 10. Érosion par une fonction : L'érosion d'une fonction f par une fonction g est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad E(f, g)(x) = \inf\{f(y) - g(y - x) \mid y \in \mathbb{R}^n\}. \quad (2.12)$$

L'intérêt de ces éléments structurants est qu'ils permettent de réaliser des opérations plus fines qu'avec des éléments structurants binaires. Par exemple, il est ainsi possible de modifier un relief (l'écrêter par exemple) dans n'importe quelle direction, et pas seulement parallèlement au plan de l'image comme avec des éléments structurants binaires (plans).

2.2.4 Ouverture et fermeture binaires

L'équation 2.7 montre, si on l'exprime pour $B = B'$, que la dilatation n'est pas l'inverse de l'érosion. Par exemple, si l'on effectue d'abord une érosion puis une dilatation, les composantes connexes de l'objet qui ont été supprimées par l'érosion (à cause de leur petite taille) ne peuvent plus être recouvertes par la dilatation et sont donc définitivement perdues. On construit donc ainsi une nouvelle transformation par composition d'une érosion et d'une dilatation, appelée ouverture.

Definition 11. Ouverture binaire : L'ouverture de l'ensemble X par l'élément structurant B est définie par :

$$X_B = D[E(X, B), \check{B}]. \quad (2.13)$$

Propriétés. L'ouverture a les propriétés algébriques suivantes :

- elle est anti-extensive ($X \supset X_B$)⁴,
- elle est croissante ($X \subset Y \Rightarrow X_B \subset Y_B$),
- elle est idempotente ($(X_B)_B = X_B$).

Ces propriétés sont fondamentales puisqu'elles font de l'ouverture un filtre morphologique.

On a de plus $B \subset B' \Rightarrow X_{B'} \subset X_B$, et si X_n désigne l'ouvert de X par un élément structurant de taille n , $(X_n)_{n'} = (X_{n'})_n = X_{\max(n, n')}$.

L'ouverture vérifie les 4 principes fondamentaux (comme composée de deux opérations les satisfaisant).

Definition 12. Fermeture binaire : La fermeture de l'ensemble X par l'élément structurant B est définie par :

$$X^B = E[D(X, B), \check{B}]. \quad (2.14)$$

Propriétés. La fermeture a les propriétés algébriques suivantes :

- elle est extensive ($X \subset X^B$),
- elle est croissante,
- elle est idempotente.

De même que pour l'ouverture, ces propriétés font de la fermeture un filtre morphologique.

On a de plus $B \subset B' \Rightarrow X^B \subset X^{B'}$, et si X^n désigne le fermé de X par un élément structurant de taille n , $(X^n)^{n'} = (X^{n'})^n = X^{\max(n, n')}$.

La fermeture vérifie les 4 principes fondamentaux (comme composée de deux opérations les satisfaisant).

Enfin, la fermeture est l'opération duale de l'ouverture par rapport à la complémentation :

$$X^B = [(X^C)_B]^C, \quad (2.15)$$

ce qui permet de déduire les propriétés et l'action d'une des opérations de celles de l'autre.

4. Contrairement à la dilatation et à l'érosion, cette propriété est vraie sans restriction sur l'élément structurant.

2.2.5 Ouverture et fermeture numériques

Definition 13. Ouverture numérique : (par un élément structurant binaire) L'ouverture d'une fonction f par un élément structurant B est définie comme dans le cas binaire par :

$$f_B = D[E(f, B), \check{B}]. \quad (2.16)$$

Propriétés. L'ouverture est croissante, anti-extensive et idempotente, ce qui lui confère une nature de filtre morphologique.

Definition 14. Fermeture numérique : (par un élément structurant binaire) La fermeture d'une fonction f par un élément structurant B est définie comme dans le cas binaire par :

$$f^B = E[D(f, B), \check{B}]. \quad (2.17)$$

Propriétés. La fermeture est duale de l'ouverture. De plus, comme dans le cas binaire, elle est croissante, extensive et idempotente, ce qui lui confère une nature de filtre morphologique.

2.3 Cadre topologique

Nous avons vu plus haut les fondements ensemblistes de la morphologie mathématique. Celle-ci repose ensuite sur des concepts de topologie. Dans cette approche, on cherche à définir le voisinage non plus d'un point mais d'un ensemble. Deux types de topologies sont utilisées en morphologie mathématique : la topologie en tout ou rien sur les fermés et la topologie myope définie sur les compacts. La topologie myope a l'avantage d'être reliée à la distance de Hausdorff, métrique bien adaptée à la comparaison de formes dans de nombreuses applications.

Dans la suite, on note \mathcal{F} l'ensemble des fermés de \mathbb{R}^n , \mathcal{G} l'ensemble de ses ouverts, et \mathcal{K} l'ensemble de ses compacts, pour la topologie usuelle de \mathbb{R}^n .

Definition 15. Topologie en tout ou rien : La topologie en tout ou rien sur \mathcal{F} est engendrée par la famille :

$$\mathcal{F}_{G_1 \dots G_p}^K = \{F \in \mathcal{F}, F \cap K = \emptyset, \forall i, 1 \leq i \leq p, F \cap G_i \neq \emptyset\},$$

où $p \in \mathbb{N}$, $K \in \mathcal{K}$ et $G_i \in \mathcal{G}$.

La topologie en tout ou rien est donc engendrée par les fermés qui, étant donnés un compact et une famille d'ouverts, n'intersectent pas le compact et intersectent chacun des ouverts.

La convergence pour la topologie en tout ou rien est définie de la manière suivante :

Definition 16. Convergence dans \mathcal{F} : Une suite de fermés $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $F \in \mathcal{F}$ si pour tout ouvert G qui intersecte F et tout compact K qui n'intersecte pas F , on a :

$$\exists N, \forall n \geq N, G \cap F_n \neq \emptyset, K \cap F_n = \emptyset.$$

On montre que la réunion de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ dans \mathcal{F} est continue pour cette définition mais que l'intersection ne l'est pas. Cela nous conduit à introduire les notions de semi-continuité.

Definition 17. Limites inférieure et supérieure : La limite inférieure d'une suite de fermés $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, notée $\underline{\lim}(F_n)$ est l'intersection des points d'adhérence de la suite, et sa limite supérieure, notée $\overline{\lim}(F_n)$ est la réunion des points d'adhérence.

Definition 18. Semi-continuité : Une application f d'un ensemble Ω dans \mathcal{F} est semi-continue supérieurement (s.c.s.) si pour tout ω de Ω et toute suite (ω_n) de Ω convergeant vers ω :

$$\overline{\lim}f(\omega_n) \subset f(\omega).$$

De même, f est semi-continue inférieurement (s.c.i.) si :

$$\underline{\lim}f(\omega_n) \supset f(\omega).$$

Notons qu'une application est continue ssi elle est à la fois s.c.s. et s.c.i.

L'intersection de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ dans \mathcal{F} est s.c.s. Ces propriétés de l'intersection et de la réunion seront directement utilisées pour en déduire des propriétés des transformations de morphologie mathématique construites selon l'approche ensembliste. On a ainsi les résultats suivants :

- la dilatation d'un fermé par un compact est continue (le résultat est un fermé), c'est-à-dire à la fois s.c.s. et s.c.i.,
- la dilatation d'un compact par un compact est continue (le résultat est un compact),
- l'application de $\mathcal{F} \times \mathcal{K}$ dans \mathcal{F} qui à (F, K) associe $E(F, K)$ est s.c.s.,
- de même, l'application de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ dans \mathcal{K} qui à (K', K) associe $E(K', K)$ est s.c.s.,
- l'application de $\mathcal{F} \times \mathcal{K}$ dans \mathcal{F} qui à (F, K) associe F_K est s.c.s.,
- de même, l'application de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ dans \mathcal{K} qui à (K', K) associe K'_K est s.c.s.,
- l'application de $\mathcal{F} \times \mathcal{K}$ dans \mathcal{F} qui à (F, K) associe F^K est s.c.s.,
- de même, l'application de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ dans \mathcal{K} qui à (K', K) associe K'^K est s.c.s.

Ces propriétés fortes de la dilatation et de l'érosion en termes de continuité lorsque l'élément structurant est compact incitent à choisir pour les applications des éléments structurants compacts.

Definition 19. Topologie myope : La topologie myope sur \mathcal{K} est engendrée par la famille :

$$\mathcal{K}_{G_1 \dots G_p}^F = \{K \in \mathcal{K}, K \cap F = \emptyset, \forall i, 1 \leq i \leq p, K \cap G_i \neq \emptyset\},$$

où $p \in \mathbb{N}$, $F \in \mathcal{F}$ et $G_i \in \mathcal{G}$.

La topologie myope est plus fine que la topologie induite sur \mathcal{K} par la topologie en tout ou rien sur \mathcal{F} , et équivalente sur $\mathcal{K} \setminus \emptyset$ à la topologie induite par la distance de Hausdorff.

Definition 20. Distance de Hausdorff : La distance de Hausdorff entre deux compacts non vides K et K' est définie par :

$$\delta(K, K') = \max\{\sup_{x \in K} d(x, K'), \sup_{x' \in K'} d(x', K)\},$$

où $d(x, K)$ est la distance classique d'un point à un compact ($d(x, K) = \inf_{y \in K} d(x, y)$ où $d(x, y)$ est la distance euclidienne classique sur \mathbb{R}^n).

Cette distance est souvent utilisée pour comparer deux ensembles et estimer leur proximité. Notons que cette distance est très sensible aux déformations qui peuvent se produire à la surface des objets⁵.

2.4 Cadre algébrique

Le cadre algébrique général de la morphologie mathématique est celui des treillis et de la notion fondamentale d'adjonction [18, 35, 19].

5. Le problème de la définition d'une distance entre objets est réputé difficile et la plupart des distances utilisées, comme la distance de Hausdorff, ne donnent qu'une information partielle sur la ressemblance des objets. La distance de Hausdorff est cependant bien adaptée à une grande classe de problèmes, en particulier grâce à ses liens étroits avec la morphologie mathématique.

2.4.1 Treillis

Definition 21. Treillis : Un treillis est un ensemble \mathcal{T} muni d'une relation d'ordre \leq , tel que toute paire d'éléments (ou toute famille finie) possède une borne supérieure (notée $x \vee y$) et une borne inférieure (notée $x \wedge y$). Un treillis est complet si toute famille d'éléments (finie ou non) possède un plus petit majorant et un plus grand minorant.

Un treillis complet contient en particulier un plus petit élément et un plus grand élément.

L'ensemble des fonctions de \mathbb{R}^n dans $\overline{\mathbb{R}}$ est un treillis complet, pour la relation d'ordre définie par :

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) \leq g(x).$$

La semi-continuité pour des fonctions est définie de la manière suivante.

Definition 22. Semi-continuité d'une fonction : Une fonction f est semi-continue supérieurement en x si :

$$\forall t > f(x), \exists V(x), \forall y \in V(x), t > f(y),$$

où $V(x)$ est un voisinage de x dans \mathbb{R}^n . De même, f est semi-continue inférieurement si :

$$\forall t < f(x), \exists V(x), \forall y \in V(x), t < f(y).$$

Definition 23. Sous-graphe : À toute fonction f de \mathbb{R}^n dans $\overline{\mathbb{R}}$, on associe son sous-graphe

$$SG(f) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}, f(x) \geq t\}.$$

Remarquons qu'une fonction est s.c.s. ssi son sous-graphe est fermé.

L'ensemble des fonctions s.c.s. de \mathbb{R}^n dans $\overline{\mathbb{R}}$ est un treillis complet, pour la relation d'ordre définie par :

$$f \leq g \Leftrightarrow SG(f) \subset SG(g).$$

Cette propriété montre l'intérêt du cadre fourni par les treillis pour la morphologie mathématique. Un autre intérêt vient du fait que les opérations de morphologie mathématique sont fondées sur des « sup » et des « inf » comme nous l'avons vu dans la partie 2.2.

La notion de sous-graphe permet de faire un lien direct avec l'approche ensembliste d'une part puisque les sous-graphes sont des ensembles de $\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}$, et avec l'approche topologique d'autre part puisque la topologie utilisée sur l'espace des fonctions s.c.s. est celle induite par la topologie en tout ou rien sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}})$.

2.4.2 Erosion et dilatation algébriques, adjonctions

Definition 24. Dans un treillis complet (\mathcal{T}, \leq) , une **dilatation algébrique** est définie de manière générale comme une fonction δ sur \mathcal{T} qui commute avec le sup, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (x_i) \in \mathcal{T}, \delta(\vee_i x_i) = \vee_i \delta(x_i), \quad (2.18)$$

où (x_i) est une famille (éventuellement vide) d'éléments de \mathcal{T} .

De manière similaire, une **érosion algébrique** est une fonction ε sur \mathcal{T} qui commute avec l'inf, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (x_i) \in \mathcal{T}, \varepsilon(\wedge_i x_i) = \wedge_i \varepsilon(x_i). \quad (2.19)$$

Notons que cette définition suffit à garantir que les dilatations et érosions algébriques sont croissantes.

Une propriété fondamentale dans le cadre des treillis est celle d'adjonction.

Definition 25. Une paire d'opérateurs (ε, δ) sur \mathcal{T} est une **adjonction** si et seulement si :

$$\forall(x, y) \in \mathcal{T}^2, \delta(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq \varepsilon(y). \quad (2.20)$$

Propriétés. On a les relations suivantes entre opérations algébriques et adjonctions :

- si (ε, δ) est une adjonction, alors ε est une érosion algébrique et δ est une dilatation algébrique;
- un opérateur croissant δ est une dilatation algébrique si et seulement si il existe un opérateur ε tel que (ε, δ) soit une adjonction; ε est alors une érosion algébrique et vaut :

$$\varepsilon(x) = \vee\{y \in \mathcal{T}, \delta(y) \leq x\};$$

- un opérateur croissant ε est une érosion algébrique si et seulement si il existe un opérateur δ tel que (ε, δ) soit une adjonction; δ est alors une dilatation algébrique et vaut :

$$\delta(x) = \wedge\{y \in \mathcal{T}, \varepsilon(y) \geq x\};$$

2.4.3 Lien avec les opérateurs morphologiques

Sur le treillis booléen des parties de \mathbb{R}^n ou \mathbb{Z}^n (la relation d'ordre est alors l'inclusion), le dilaté de n'importe quelle partie peut être exprimé comme la réunion des dilatés des singletons qui la composent :

$$\delta(X) = \cup_{x \in X} \delta(\{x\}).$$

De plus, toute dilatation invariante par translation peut s'exprimer comme une dilatation morphologique, définie à partir d'un élément structurant comme dans la section 2.2.

Des résultats similaires sont valables pour les érosions.

2.4.4 Ouverture et fermeture algébriques

Definition 26. Une opération croissante est une **ouverture algébrique** si et seulement si elle est *anti-extensive* et *idempotente*, et une **fermeture algébrique** si et seulement si elle est *extensive* et *idempotente*.

Si I désigne l'identité sur le treillis, on a pour toute adjonction (ε, δ) :

$$\delta\varepsilon \leq I \leq \varepsilon\delta. \quad (2.21)$$

De plus, $\delta\varepsilon$ et $\varepsilon\delta$ sont toujours idempotentes, ce sont donc des exemples d'ouverture et fermeture algébriques respectivement, appelées ouverture et fermeture morphologiques.

2.5 Cadre probabiliste

2.5.1 Ensembles fermés aléatoires

Enfin, une partie de la morphologie mathématique repose sur une approche probabiliste, en particulier sur le concept d'ensemble fermé aléatoire. Le principe consiste à considérer les équations ensemblistes utilisées dans la première approche comme des événements et à leur affecter une probabilité. Ces événements seront donc du type « $B \subset A$ », « $B \cap A \neq \emptyset$ ». L'ensemble des valeurs (ou réalisations) considéré ici est l'ensemble des fermés \mathcal{F} . L'ensemble des événements est défini par la tribu borélienne sur \mathcal{F} engendrée par les événements particuliers qui nous intéressent, appelée encore tribu morphologique.

Definition 27. Tribu morphologique : La tribu morphologique est la tribu σ_f sur \mathcal{F} engendrée par les ouverts de la topologie en tout ou rien sur \mathcal{F} , c'est-à-dire par les \mathcal{F}^K et les \mathcal{F}_G pour tous les compacts K de \mathcal{K} et tous les ouverts G de \mathcal{G} :

$$\mathcal{F}^K = \{F \in \mathcal{F}, K \cap F = \emptyset\}, \quad \mathcal{F}_G = \{F \in \mathcal{F}, G \cap F \neq \emptyset\}.$$

La donnée d'une probabilité sur l'espace mesurable (\mathcal{F}, σ_f) conduit alors à la notion d'ensemble fermé aléatoire.

Definition 28. Ensemble fermé aléatoire : *Un ensemble fermé aléatoire F , noté $F = (\mathcal{F}, \sigma_f, P)$ est déterminé par la donnée d'une probabilité P sur (\mathcal{F}, σ_f) .*

Definition 29. Capacité de Choquet : *La capacité de Choquet d'un ensemble fermé aléatoire $F = (\mathcal{F}, \sigma_f, P)$ est la fonctionnelle $T : \mathcal{K} \rightarrow [0, 1]$ définie par :*

$$\forall K \in \mathcal{K}, \quad T(K) = P(F \cap K \neq \emptyset).$$

La capacité de Choquet joue un rôle analogue à celui de la fonction de répartition d'une probabilité sur \mathbb{R} . On montre qu'un ensemble fermé aléatoire est entièrement caractérisé par sa capacité de Choquet. En pratique, cela fournit un moyen opératoire de caractérisation d'un phénomène aléatoire, puisque la connaissance des $P(F \cap K \neq \emptyset)$ est suffisante, ce qui limite les mesures à effectuer.

Les applications de ces concepts concernent des mesures de phénomènes aléatoires, comme par exemple des schémas booléens, ou l'analyse de textures.

2.5.2 Un exemple : le schéma booléen

Un schéma booléen stationnaire est défini comme la réunion de compacts aléatoires de même loi translatés aux points d'un processus de Poisson [43]. Sa capacité de Choquet est une fonction de la densité du processus de Poisson sous-jacent et de la moyenne du volume du dilaté du compact aléatoire.

Soit un processus de Poisson \mathcal{P}_θ d'intensité θ ($\theta > 0$). Pour tout compact K , la probabilité pour que n points du processus tombent dans K vaut :

$$\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \quad (2.22)$$

avec $\lambda = \theta V(K)$, où $V(K)$ désigne le volume de K . De plus, si deux compacts K_1 et K_2 sont disjoints, alors les variables aléatoires qui comptent les points tombant dans K_1 et dans K_2 sont indépendantes.

On appelle grain primaire un ensemble fermé aléatoire $F' = (\mathcal{F}, \sigma_f, P')$. Le schéma booléen $F = (\theta, F')$ d'intensité θ et de grain primaire F' est alors défini par :

$$F = \cup \{F'_x, x \in \mathcal{P}_\theta\} \quad (2.23)$$

où les F'_x sont des compacts aléatoires indépendants de même loi P' et translatés aux points du processus de Poisson. On garantit que cette réunion est un fermé en imposant que le volume moyen de $(F' \oplus B)$ est fini, pour B égal à la boule unité. Un tel schéma booléen est stable par réunion.

On a alors la caractérisation suivante en fonction de la capacité de Choquet :

$$1 - T(K) = P(K \cap F = \emptyset) = e^{-\theta \overline{V(F' \oplus \tilde{K})}} \quad (2.24)$$

où \overline{V} désigne le volume moyen. Cette caractérisation permet de définir des procédures d'inférence des paramètres du modèle, à une translation près [43].

2.6 Applications de l'érosion et de la dilatation

2.6.1 Mesures

Nous donnons dans cette partie succinctement quelques exemples de transformations qui associent à un objet une mesure, que nous répartissons dans deux classes.

La première classe est issue de la géométrie intégrale et vise à calculer des longueurs, des surfaces, des volumes, des intégrales de courbure moyenne, par l'intermédiaire des fonctionnelles de Minkowski. Le lien avec la morphologie mathématique est fourni par les formules de Steiner, qui permettent de calculer les fonctionnelles de Minkowski du dilaté d'un compact d'après celles du compact [15, 42].

La deuxième classe vise des applications de reconnaissance des formes et étudie le comportement d'objets vis-à-vis de transformations morphologiques appropriées aux caractéristiques à mettre en évidence [43]. Par exemple, les courbes granulométriques (donnant la surface des objets sélectionnés par la transformation ϕ_λ quand λ varie) permettent d'étudier la distribution de tailles des objets. Autre exemple, le covariogramme géométrique, donnant la surface de $E(X, B_r)$ (où B_r est un segment de longueur r dans une direction α) quand r varie, permet d'observer le comportement des objets quand on l'érode dans une direction. Il peut en particulier discriminer des ensembles d'objets de même surface globale mais dont la répartition des composantes connexes en taille et dans l'espace varie.

2.6.2 Erodé ultime

L'érodé ultime est la réunion de toutes les composantes d'un objet binaire qui disparaissent d'une érosion à l'autre dans une séquence d'érosions par un élément structurant élémentaire B . Plus formellement, l'érodé ultime d'un ensemble X est défini par :

$$EU(X) = \cup_n \{E(X, B_n) \setminus R[E(X, B_{n+1}); E(X, B_n)]\} \quad (2.25)$$

où $E(X, B_n)$ désigne l'érodé de X de taille n et $R[Y; Z]$ désigne les composantes connexes de Z qui ont une intersection non vide avec Y .

L'érodé ultime d'un ensemble X est exactement l'ensemble des maxima régionaux de la fonction distance à l'intérieur de X (distance des points de X à X^C).

2.6.3 Rehaussement de contraste

Le rehaussement de contraste morphologique d'une fonction f est défini à partir d'une fonction minorante \underline{f} et d'une fonction majorante \overline{f} et de deux paramètres α et β tels que $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ et $\alpha + \beta < 1$. Le résultat g de cette transformation est obtenu en faisant basculer les points vers la fonction minorante ou vers la fonction majorante suivant la règle suivante :

$$\begin{aligned} g(x) &= \underline{f}(x) & \text{si } \underline{f}(x) \leq f(x) \leq \underline{f}(x) + \alpha \Delta f(x) \\ g(x) &= f(x) & \text{si } \underline{f}(x) + \alpha \Delta f(x) \leq f(x) \leq \overline{f}(x) - \beta \Delta f(x) \\ g(x) &= \overline{f}(x) & \text{si } \overline{f}(x) - \beta \Delta f(x) \leq f(x) \leq \overline{f}(x) \end{aligned}$$

avec $\Delta f(x) = \overline{f}(x) - \underline{f}(x)$.

La morphologie mathématique fournit naturellement des fonctions minorantes (resp. majorantes) à partir de transformations anti-extensives (resp. extensives) comme l'érosion de f par un élément structurant centré, ou encore l'ouverture de f (resp. dilatation ou fermeture).

La figure 2.3 donne un exemple de rehaussement de contraste.

2.6.4 Gradient morphologique

Soit B le disque fermé de rayon unité. Le gradient morphologique d'une fonction f est défini dans le cas continu par la fonction g suivante :

$$g(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{D(f, B_\lambda)(x) - E(f, B_\lambda)(x)}{2\lambda},$$

et dans le cas discret par :



FIGURE 2.3 – Exemple de rehaussement de contraste morphologique.

$$g(x) = D(f, B)(x) - E(f, B)(x).$$

Cette transformation trouve ses applications dans la détection de contours.

La figure 2.4 donne un exemple de gradient obtenu par différence des dilatation et érosion de taille 1.



FIGURE 2.4 – Exemple de gradient morphologique.

2.7 Applications de l'ouverture et de la fermeture

2.7.1 Filtres alternés séquentiels

Nous avons vu que les ouvertures et fermetures étaient des filtres morphologiques. Sans entrer dans la théorie des filtres morphologiques, nous ne décrivons ici que les filtres alternés séquentiels, qui sont beaucoup utilisés en pratique, et qui sont construits à partir de suites d'ouvertures et de fermetures de tailles croissantes. Dans le cas discret, un tel filtre appliqué à une fonction f s'exprime comme :

$$(\dots(((f_{B_1})^{B_1})_{B_2})^{B_2})\dots_{B_n})^{B_n}.$$

Notons qu'on obtient bien ainsi des opérations croissantes et idempotentes (donc des filtres morphologiques).

Ils sont utilisés en pratique pour filtrer progressivement le bruit positif (pics étroits) et le bruit négatif (vallées étroites). Le dernier élément structurant utilisé (de taille n) est déterminé en fonction de la taille minimale des objets de l'image que l'on veut conserver après le filtrage.

La figure 2.5 donne des exemples de filtres alternés séquentiels.



FIGURE 2.5 – Filtres alternés séquentiels : image initiale, tailles maximales de 1, 2 et 3.

2.7.2 Filtres auto-duaux

Les filtres auto-duaux sont des transformations qui agissent sur les fonctions indépendamment du contraste local et traitent donc les parties claires et les parties sombres de la même manière. Le filtre médian est un exemple de tel filtre.

Un exemple est le centre morphologique, défini à partir d'une famille d'opérateurs $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ par :

$$(I \vee \wedge_i \psi_i) \wedge \vee_i \psi_i \quad (2.26)$$

où I désigne l'identité.

Les travaux de H. Heijmans se sont attachés à formaliser cette notion de filtres auto-duaux dans un cadre algébrique.

2.7.3 Chapeau haut-de-forme

La transformation du « chapeau haut-de-forme » d'une fonction f est définie, aussi bien en continu qu'en discret, comme la fonction :

$$f - f_B$$

pour un élément structurant B donné. L'opération duale est la fonction :

$$f^B - f.$$

Cette transformation extrait les pics étroits (plus étroits que l'élément structurant) quelle que soit leur hauteur absolue. Elle permet par exemple d'extraire des lignes fines de niveau intense par rapport à leur voisinage (telles que des routes dans une image satellitaire). L'opération duale extrait au contraire des vallées étroites.

La figure 2.6 donne un exemple de chapeau haut de forme obtenu pour une ouverture de taille 3.



FIGURE 2.6 – Exemple de chapeau haut de forme obtenu pour une ouverture de taille 3.

Si l'on applique cette transformation avec des éléments structurants fonctionnels, par exemple des sphères de \mathbb{R}^{n+1} , on sélectionne alors les contours abrupts dans l'image, ou encore les pics de courbure plus forte que l'élément structurant.

2.7.4 Granulométries

Les granulométries sont des opérations de « tamisage » qui servent à sélectionner successivement des particules de tailles données croissantes.

Definition 30. Granulométrie : Une granulométrie sur un ensemble \mathcal{A} de parties de \mathbb{R}^n est une famille de fonctions paramétrées ϕ_λ (avec $\lambda > 0$) définies sur \mathcal{A} telle que :

1. $\forall X \in \mathcal{A}, \forall \lambda > 0, \phi_\lambda(X) \subset X$ (ϕ_λ anti-extensive),
2. $\forall (X, Y) \in \mathcal{A}^2, \forall \lambda > 0, X \subset Y \Rightarrow \phi_\lambda(X) \subset \phi_\lambda(Y)$ (ϕ_λ croissante),
3. $\forall X \in \mathcal{A}, \forall \lambda > 0, \forall \mu > 0, \lambda \geq \mu \Rightarrow \phi_\lambda(X) \subset \phi_\mu(X)$ (ϕ_λ décroissante par rapport au paramètre),
4. $\forall \lambda > 0, \forall \mu > 0, \phi_\lambda \circ \phi_\mu = \phi_\mu \circ \phi_\lambda = \phi_{\max(\lambda, \mu)}$.

Il est clair, d'après cette définition, que la famille d'ouvertures par des boules de rayon r définit une granulométrie. On montre même que ϕ_λ est une granulométrie si et seulement si ϕ_λ est une ouverture pour tout λ et la classe des ensembles de \mathcal{A} invariants par ϕ_λ est incluse dans celle des invariants par ϕ_μ pour $\lambda \geq \mu$.

Ainsi, si on applique à un ensemble une suite d'ouvertures de tailles croissantes (par des boules), on sélectionnera d'abord les plus petites parties de l'ensemble (celles qui sont supprimées par l'ouverture), puis des parties de plus en plus grosses.

La figure 2.7 montre une courbe de granulométrie obtenue sur une image binaire par ouvertures de différentes tailles. Lorsque la taille de l'ouverture correspond à la taille caractéristique de la plupart des objets, un saut apparaît dans la courbe.

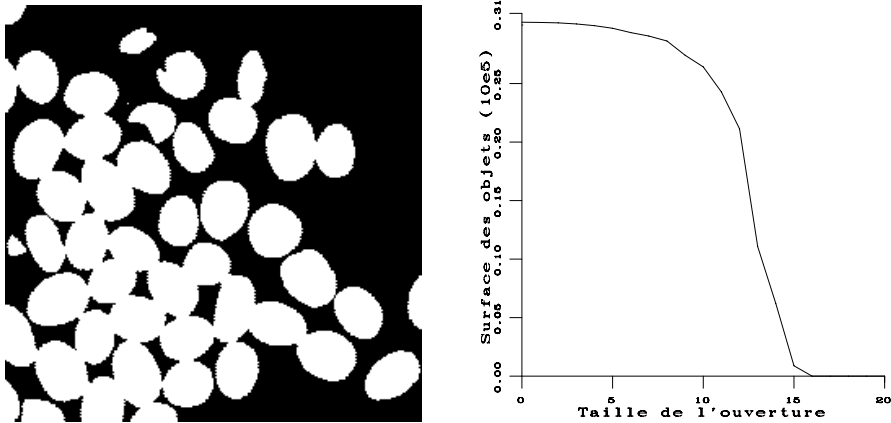


FIGURE 2.7 – Image binaire et sa courbe de granulométrie.

2.7.5 Ouverture surfacique

Les ouvertures peuvent combiner un critère sur un attribut, par exemple la taille des objets, permettant ainsi de filtrer des petits objets ou des petites parties claires. Une ouverture surfacique de paramètre λ est ainsi définie par :

$$\gamma_\lambda = \bigvee_i \{ \gamma_{B_i}, B_i \text{ est connexe et } S(B_i) = \lambda \} \quad (2.27)$$

où γ_{B_i} désigne une ouverture par B_i et $S(B_i)$ est la surface de B_i (ou son volume en 3D).

On définit bien sûr de manière duale des fermetures surfaciques.

2.7.6 Ouverture annulaire

L'ouverture annulaire est définie comme le min entre l'image originale et son dilaté par un élément structurant en forme d'anneau. Puisque l'élément structurant ne contient alors pas l'origine, la propriété d'extensivité de la dilatation n'est pas vérifiée. Cette opération sert par exemple à récupérer des groupes serrés d'objets dans une image en éliminant des parties isolées (la dilatation de telles parties ne les contient pas).

2.8 Transformation en tout ou rien et opérateurs dérivés

2.8.1 Transformation en tout ou rien

Les transformations vues jusqu'à présent sont toutes fondées sur le même principe : elles examinent si une certaine configuration de points (définie par l'élément structurant) vérifie une relation avec l'objet étudié. La transformation en tout ou rien propose d'examiner des configurations où certains points vérifient une relation avec l'objet et d'autres vérifient une relation avec le complémentaire de l'objet. Ainsi les éléments structurants T considérés dans cette transformation sont décomposés en deux parties T_1 et T_2 (de même origine).

Definition 31. Transformation en tout ou rien : La transformation en tout ou rien de X par l'élément structurant $T = (T_1, T_2)$ est définie par :

$$X \otimes T = E(X, T_1) \cap E(X^C, T_2).$$

Notons que puisque $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, l'origine ne peut pas appartenir à la fois à T_1 et à T_2 , donc on ne peut pas avoir simultanément $E(X, T_1) \subset X$ et $E(X^C, T_2) \subset X^C$ (ce qui est heureux...).

2.8.2 Amincissement et épaississement

Deux nouvelles transformations sont déduites de la transformation en tout ou rien :

Definition 32. Amincissement et épaississement : *L'amincissement de X par l'élément structurant $T = (T_1, T_2)$ est défini par :*

$$X \circ T = X \setminus X \otimes T, \quad (2.28)$$

et l'épaississement par :

$$X \odot T = X \cup X \otimes T. \quad (2.29)$$

L'amincissement, opération anti-extensive, supprime donc de X des points qui sont dans une configuration particulière, sélectionnés par la transformation en tout ou rien. Les éléments structurants appropriés sont ceux pour lesquels l'origine appartient à T_1 . L'épaississement rajoute au contraire à X les points sélectionnés par la transformation en tout ou rien et est une opération extensive. Les éléments structurants appropriés sont ceux pour lesquels l'origine appartient à T_2 . Ces deux transformations sont duales l'une de l'autre au sens suivant :

$$X \circ T = (X^C \odot T')^C$$

avec $T' = (T_2, T_1)$ si $T = (T_1, T_2)$.

Il existe tout un « alphabet » d'éléments structurants, appelé alphabet de Golay en trame hexagonale, qui permet d'effectuer une grande variété d'opérations [44]. Par exemple :

- si T_1 est l'élément structurant élémentaire sur la trame considérée et T_2 est vide, la transformation en tout ou rien est une érosion et l'amincissement correspondant extrait la frontière des objets ;
- si les configurations recherchées par la transformation en tout ou rien correspondent à un point du complémentaire entouré de points de l'objet formant une configuration localement non convexe, l'épaississement correspondant (appliqué itérativement jusqu'à convergence) permet de calculer le plus petit convexe discret contenant l'objet de départ ;
- si T_1 est le point central de l'élément structurant élémentaire et T_2 contient les autres, la transformation en tout ou rien sélectionne les points isolés de l'objet ;
- etc.

Nous verrons dans la suite que des configurations particulières permettent d'extraire le squelette d'un objet par amincissement.

2.8.3 Squelette

Le squelette est une notion très utile en reconnaissance de formes : en effet, il s'agit d'une représentation des objets, qu'on souhaite intuitivement compacte (lignes fines centrées dans les objets), homotopique à l'objet de départ (même nombre de composantes connexes et même nombre de trous), et inversible. En morphologie mathématique, on arrive à une définition du squelette dans le cas continu qui a de bonnes propriétés par rapport à ces exigences. En revanche, le passage au discret est très délicat pour cette transformation.

Dans le cas continu, le squelette est défini comme l'ensemble des centres des boules maximales incluses dans l'objet (une boule étant maximale si elle ne peut être incluse dans aucune autre boule incluse dans l'objet). On travaille généralement sur les fermés en morphologie mathématique. Cependant, dans le cas du squelette, cela conduit à de mauvaises propriétés : le squelette d'un ensemble connexe n'est pas nécessairement connexe, il n'est pas nécessairement fermé, et l'application qui à un fermé associe l'adhérence de son squelette n'est ni s.c.s., ni s.c.i. On travaillera donc, pour le cas du squelette, sur des ouverts.

Definition 33. Squelette : *Le squelette d'un ouvert A est l'ensemble des centres des boules ouvertes maximales incluses dans A .*

En appelant $s_\rho(A)$ l'ensemble des centres des boules ouvertes maximales de rayon donné $\rho > 0$, on obtient le squelette $r(A)$ comme réunion de tels ensembles :

$$r(A) = \bigcup_{\rho>0} s_\rho(A).$$

On peut montrer que :

$$s_\rho(A) = \bigcap_{\mu>0} [E(A, B_\rho) \setminus [E(A, B_\rho)]_{\bar{B}_\mu}]$$

où B_ρ (resp. \bar{B}_ρ) désigne la boule ouverte (resp. fermée) de rayon ρ . Cela fournit une caractérisation du squelette de A (et un moyen opératoire pour le calculer) à partir de ses érodés et des ouverts de ses érodés :

$$r(A) = \bigcup_{\rho>0} \bigcap_{\mu>0} [E(A, B_\rho) \setminus [E(A, B_\rho)]_{\bar{B}_\mu}]. \quad (2.30)$$

L'objet de départ peut être reconstruit à partir de son squelette (et donc la propriété d'inversibilité est satisfaite) :

$$A = \bigcup_{\rho>0} D(s_\rho, B_\rho).$$

Pour la définition 33, on montre de plus que l'application qui à A associe l'adhérence de son squelette $\bar{r}(A)$ est s.c.i. de \mathcal{G} dans \mathcal{F} , que si A est connexe alors $\bar{r}(A)$ est connexe, et que le squelette est « fin » au sens suivant : l'intérieur du squelette est vide. Le squelette ainsi défini vérifie donc bien les propriétés qu'on en attend intuitivement.

2.8.4 Squelette discret

Si l'on transpose maintenant directement ces notions au cas discret, le squelette s'exprime (en discrétisant l'équation 2.30) comme :

$$S(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [E(X, B_n) \setminus E(X, B_n)_B], \quad (2.31)$$

où B est l'élément structurant élémentaire sur la trame. Cette définition, que l'on trouve aussi sous le nom d'axe médian, correspond aux centres des boules maximales (discrètes) incluses dans l'objet.

Si la propriété d'inversibilité est conservée avec l'équation 2.31, les autres sont perdues, en particulier la préservation de la connexité. Deux classes de méthodes ont alors été proposées pour résoudre ce problème : la première tente de relier entre eux les points détectés par l'équation 2.31 pour en faire une « ligne médiane » qui satisfasse les propriétés de connexité; la deuxième tente de trouver d'autres définitions, directement discrètes, en supprimant itérativement des points à la surface de l'objet.

La méthode que propose la morphologie mathématique relève de cette deuxième approche. Elle s'appuie sur la notion d'amincissement (équation 2.28), en utilisant des éléments structurants qui suppriment des points de l'objet sans changer sa topologie (voir figure 2.8). Il s'agit donc d'un amincissement homotopique. On arrive ainsi à un squelette qui vérifie les propriétés de connexité, qui donne une bonne représentation des formes, mais qui n'est plus inversible (il ne contient pas nécessairement les centres des boules maximales) et qui n'est pas nécessairement d'épaisseur unité.

La figure 2.9 illustre la différence entre les centres des boules maximales et le squelette par amincissement dans le cas discret.

2.8.5 SKIZ

Considérons maintenant le complémentaire de l'objet X . On note X_i les composantes connexes de l'objet ($X = \bigcup_i X_i$). Dans X^C , on appelle zone d'influence de X_i l'ensemble des points $ZI(X_i)$ plus proches de X_i que des X_j pour $j \neq i$:

$$ZI(X_i) = \{x \in X^C / d(x, X_i) < d(x, X \setminus X_i)\}.$$

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 1 \\ & \cdot & 1 & \cdot \\ 0 & & 0 & \end{array}$$

FIGURE 2.8 – Élément structurant utilisé en 6-connexité pour obtenir le squelette d'un objet par amincissement : cet élément structurant, ainsi que les 5 qui en sont déduits par rotations, sont appliqués itérativement jusqu'à convergence.

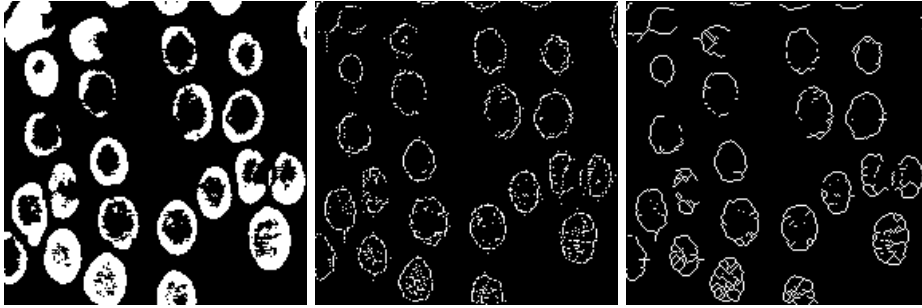


FIGURE 2.9 – Centres des boules maximales (au centre) et squelette par amincissement (à droite).

Cette notion permet de définir celle de squelette par zones d'influence (SKIZ) :

Definition 34. Squelette par zones d'influence : *Le squelette par zone d'influence de X est l'ensemble des points qui n'appartiennent à aucune des zones d'influence :*

$$Skiz(X) = \left(\bigcup_i ZI(X_i) \right)^C.$$

Le squelette par zones d'influence est un sous-ensemble du squelette de X^C , il n'est pas forcément connexe et contient en général moins de barbules que le squelette de X^C (ce qui est souvent exploité dans les applications).

2.9 Géodésie

2.9.1 Distance géodésique et boules géodésiques

Les transformations géodésiques sont celles qui sont contraintes par un ensemble donné (on les appelle aussi conditionnelles). Elles sont fortement liées à la notion de distance géodésique : la distance géodésique d_X conditionnellement à un ensemble X entre deux points de X est la longueur du plus court chemin joignant ces deux points en restant dans l'ensemble.

On considère alors des éléments structurants qui sont des boules de la distance géodésique.

Definition 35. Boule géodésique : *La boule géodésique de centre x et de rayon r conditionnellement au sous-ensemble X de \mathbb{R}^n est définie par :*

$$B_X(x, r) = \{y \in X \mid d_X(x, y) \leq r\}. \quad (2.32)$$

2.9.2 Opérations morphologiques géodésiques, reconstruction

Definition 36. Dilatation géodésique ou conditionnelle : *La dilatation géodésique de Y dans X*

(appelée aussi dilatation de Y conditionnellement à X) par une boule de rayon r est définie par :

$$D_X(Y, B_r) = \{x \in \mathbb{R}^n / B_X(x, r) \cap Y \neq \emptyset\} = \{x \in \mathbb{R}^n / d_X(x, Y) \leq r\}, \quad (2.33)$$

où $B_X(x, r)$ désigne la boule géodésique de centre x et de rayon r .

En pratique dans un espace discret, l'expression 2.33 se calcule très simplement à partir de la dilatation euclidienne (équation 2.3) par l'élément structurant élémentaire B_1 puisqu'elle est alors équivalente à :

$$D_X(Y, B_r) = [D(Y, B_1) \cap X]^r \quad (2.34)$$

où l'exposant signifie que l'opération est itérée r fois.

Definition 37. Érosion géodésique : L'érosion géodésique de Y dans X par une boule de taille r est définie par :

$$E_X(Y, B_r) = \{x \in \mathbb{R}^n / B_X(x, r) \subset Y\} = X \setminus D_X(X \setminus Y, B_r) \quad (2.35)$$

et est ainsi reliée à la dilatation par dualité (faisant intervenir le complémentaire $X \setminus Y$ de Y dans X).

L'ouverture et la fermeture géodésiques sont définies à partir de l'érosion et de la dilatation géodésiques, de manière analogue au cas euclidien (équations 2.13 et 2.14).

De la dilatation géodésique, on déduit la notion de reconstruction de X à partir de « marqueurs » définis par un ensemble Y .

Definition 38. Reconstruction binaire : La reconstruction de Y dans X est la dilatation géodésique de Y dans X par une boule de rayon infini, c'est-à-dire, les composantes connexes de X qui ont une intersection non vide avec Y .

Les notions de transformations géodésiques ou conditionnelles s'étendent au cas numérique par l'intermédiaire des « sections » f_λ de la fonction f considérée :

$$f_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \geq \lambda\}.$$

Definition 39. Dilatation géodésique numérique : La dilatation géodésique de f dans g , pour $f \leq g$ est définie par ses sections à partir de la dilatation géodésique binaire :

$$[D_g(f, B_r)]_\lambda = D_{g_\lambda}(f_\lambda, B_r),$$

et l'érosion géodésique est définie par dualité.

Dans le cas discret, on retrouve des formules analogues à celles obtenues dans le cas binaire, pour la dilatation :

$$D_g(f, B_r) = [D(f, B) \wedge g]^r,$$

où B est l'élément structurant élémentaire et l'exposant r signifie que l'opération est itérée r fois, et pour l'érosion :

$$E_g(f, B_r) = [E(f, B) \vee g]^r.$$

Comme dans le cas binaire, la **reconstruction numérique** de f dans g est définie par $D_g(f, B_\infty)$. La fonction f est appelée fonction de marquage.

Ces opérations de reconstruction sont particulièrement utiles pour rendre les transformations plus robustes. Par exemple une ouverture suivie d'une reconstruction permet de récupérer intégralement les objets non supprimés par l'ouverture, y compris leurs parties les plus fines.

Un autre exemple concerne le filtre alterné séquentiel : faire suivre chaque ouverture d'une reconstruction par dilatation et chaque fermeture d'une reconstruction par érosion permet d'obtenir un filtre préservant mieux les détails des structures qui sont conservées par le filtre.

2.9.3 Squelette géodésique par zones d'influence

Soient X un ensemble et Y un ensemble de composantes connexes disjointes deux à deux Y_i ($Y = \cup_i Y_i$). La zone d'influence géodésique $ZI_X(Y_i)$ de Y_i conditionnellement à X est l'ensemble des points de X plus proches de Y_i que des autres composantes au sens de la distance géodésique dans X :

$$ZI_X(Y_i) = \{x \in X, d_X(x, Y_i) < d_X(x, Y \setminus Y_i)\}. \quad (2.36)$$

Le squelette géodésique par zone d'influence est alors défini par :

$$Skiz_X(Y) = X \setminus \cup_i ZI_X(Y_i). \quad (2.37)$$

2.9.4 Filtres connectés

Ces filtres ont pour objectif de simplifier l'image en préservant les contours, en étant indépendant du contraste et en agissant sur les composantes connexes. Nous en avons vu un premier exemple avec les ouvertures surfaciques.

De manière plus générale, il s'agit d'appliquer un critère à chaque composante connexe de l'image et de ne garder que les composantes connexes qui satisfont ce critère.

Leur extension aux images à niveaux de gris est aisée lorsque le critère est croissant puisqu'une application seuil par seuil est alors possible. On trouve dans la littérature des applications utilisant des critères d'élongation, d'entropie, de mouvement, ainsi que des applications variées en filtrage ou encore en compression [28, 39, 40].

Des algorithmes efficaces à partir de représentations des seuils par des arbres ont été proposés [52].

Ces approches constituent l'un des deux paradigmes de segmentation en morphologie mathématique, par « zones plates », le second étant celui des bassins versants et de la ligne de partage des eaux (section 2.10). Dans les deux cas, l'objectif est d'obtenir une segmentation des images répondant aux critères de simplicité, régularité et fidélité.

2.10 Ligne de partage des eaux

2.10.1 Définition et propriétés

La ligne de partage des eaux est une notion très importante pour les problèmes de segmentation. Intuitivement, elle est définie par analogie géographique comme le complémentaire des bassins versants, un bassin versant étant la zone associée à un minimum régional telle qu'une goutte d'eau tombant dans cette zone et suivant la ligne de plus grande pente s'arrêtera dans ce minimum (figure 2.10).

La transposition de cette définition intuitive en termes mathématiques ne va pas sans poser de nombreux problèmes (définition d'une ligne de plus grande pente, problème des plateaux, etc.). La plupart des définitions sont algorithmiques, c'est-à-dire que la ligne de partage des eaux est définie d'après le moyen qui permet de la construire. Un des algorithmes les plus populaires est l'algorithme « d'immersion » qui consiste à remplir progressivement les bassins versants (à partir des minima régionaux) pour déterminer leurs limites [51, 50, 46]. Ce n'est que récemment que des approches mathématiques rigoureuses ont été proposées dans le cas continu [43].

La plus grande pente est définie à partir de la formule suivante :

$$Desc(x) = \max\left\{\frac{f(x) - f(y)}{d(x, y)}, y \in V(x)\right\},$$

à partir de laquelle est déduite le dénivelé d'un chemin $\pi = (x_0, \dots, x_n)$:

$$T_f(\pi) = \sum_{i=1}^n d(x_{i-1}, x_i) Cout(x_{i-1}, x_i)$$

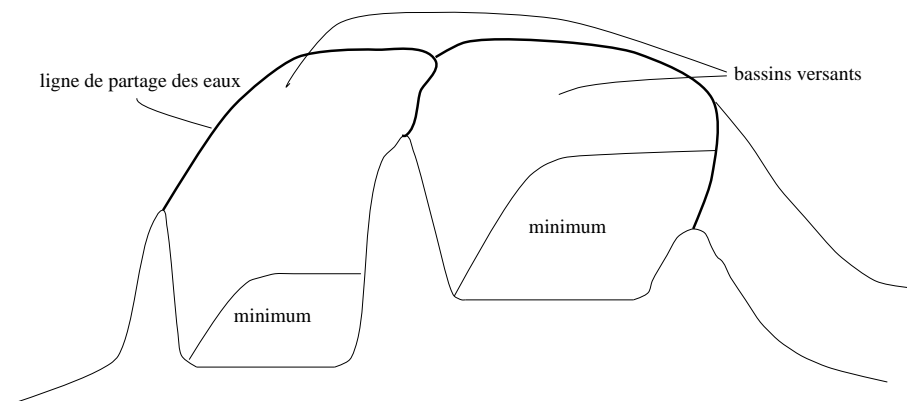


FIGURE 2.10 – Ligne de partage des eaux.

avec

$$Cout(x, y) = \begin{cases} Desc(x) & \text{si } f(x) > f(y) \\ Desc(y) & \text{si } f(y) > f(x) \\ (Desc(x) + Desc(y))/2 & \text{si } f(y) = f(x) \end{cases}$$

Cette fonction T_f conduit à la notion de distance topographique :

$$T_f(x, y) = \inf\{T_f(\pi), \pi = (x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y)\}$$

qui vaut 0 sur un plateau.

Le bassin versant associé au minimum régional M_i est défini comme une région de Voronoï pour cette distance topographique :

$$BV(M_i) = \{x, \forall j \neq i, T_f(x, M_i) + f(M_i) < T_f(x, M_j) + f(M_j)\}$$

et la ligne de partage des eaux est le complémentaire de l'ensemble des bassins versants :

$$LPE(f) = [\cup_i BV(M_i)]^C.$$

L'avantage de la ligne de partage des eaux pour la segmentation est qu'elle fournit des régions délimitées par des contours fermés formant une partition de l'image.

La figure 2.11 donne un exemple de ligne de partage des eaux sur une image de gradient.

2.10.2 Applications en segmentation

Une technique puissante de segmentation par morphologie mathématique, qui connaît des développements importants et de plus en plus d'applications, consiste à effectuer un marquage puis une reconstruction, éventuellement précédés de pré-traitements (rehaussement de contraste, filtrage, en particulier par des filtres alternés séquentiels). Nous donnons ici deux exemples d'application de ces techniques, pour séparer des objets binaires se recouvrant partiellement d'une part, et pour segmenter des images numériques à l'aide de la ligne de partage des eaux d'autre part.

Supposons qu'on ait un ensemble d'objets binaires de forme relativement circulaire, et se recouvrant partiellement. La séparation de tels objets peut s'effectuer par morphologie mathématique si le recouvrement n'est pas trop important : les composantes connexes de l'image apparaissent alors avec un rétrécissement qui correspond au lieu où la séparation doit être effectuée. Les marqueurs généralement utilisés pour ce type d'objets sont les érodés ultimes, c'est-à-dire les maxima régionaux de la fonction distance à l'intérieur de l'objet. En effet, une particule isolée donnera lieu à un seul érodé ultime connexe, deux particules se recouvrant partiellement (donc ne formant qu'une seule composante connexe dans

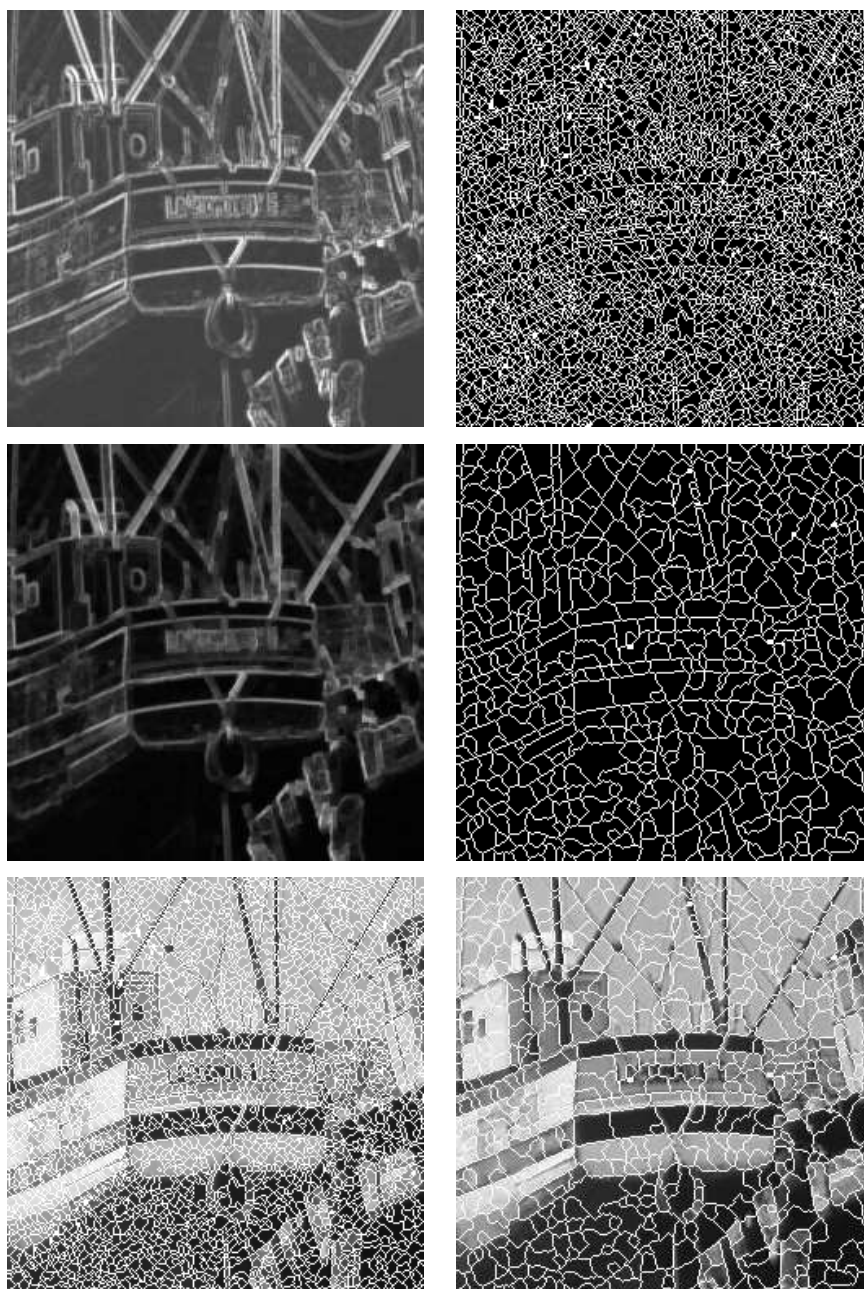


FIGURE 2.11 – Ligne de partage des eaux appliquée sur une image de gradient (en haut), et sur une image de gradient fermé (au milieu). En bas : superposition de la ligne de partage des eaux sur l'image originale, sans et avec fermeture du gradient.

l'image) auront un érodé ultime composé de deux composantes connexes qui marquent donc bien chacune des particules, etc.

L'étape de reconstruction permet ensuite de retrouver chaque particule à partir de son marqueur. Elle doit satisfaire deux exigences : préserver le nombre de composantes connexes de l'érodé ultime (puisque chacune d'elles est associée à une particule) et donc ne pas les connecter, et rester dans l'ensemble X de départ (qui représente toutes les particules). La première exigence conduit à utiliser des transformations homotopiques, et la seconde à conditionner les transformations par X donc à se placer dans un cadre géodésique.

Une première solution consiste à calculer le squelette par zones d'influence de l'ensemble des marqueurs conditionnellement à X . L'inconvénient de cette méthode est que les lignes de séparation peuvent être mal positionnées : elles sont situées à mi-distance des marqueurs, et cela n'est pas adapté à la séparation de deux particules de tailles différentes.

Une deuxième solution consiste à reconstruire les particules par dilatation géodésique des marqueurs (conditionnellement à X), en prenant en compte la taille de l'érosion nécessaire pour arriver à l'érodé ultime de chaque particule (c'est-à-dire la valeur du maximum régional correspondant de la fonction distance).

Une troisième solution consiste à calculer la ligne de partage des eaux de la fonction distance inversée (où les maxima deviennent des minima). À cause des irrégularités sur les bords des objets, on peut aboutir à une sursegmentation. Celle-ci peut être évitée en reconstruisant la distance diminuée d'une faible valeur sous la fonction distance avant de l'inverser pour appliquer la ligne de partage des eaux.

Cette procédure est illustrée sur une image binaire sur la figure 2.12.

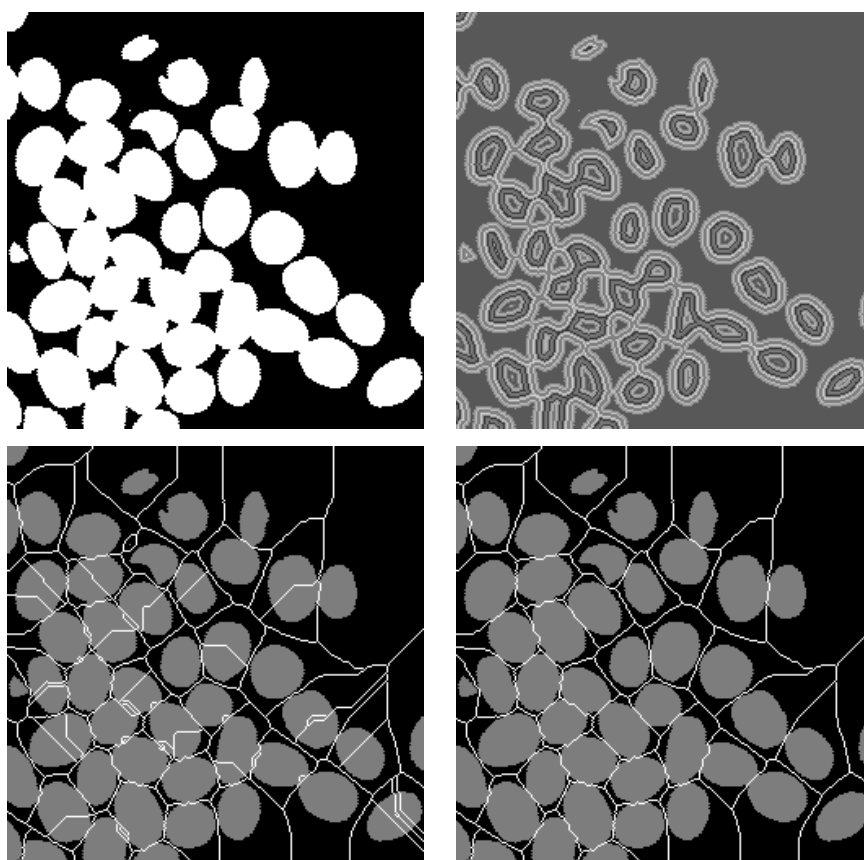


FIGURE 2.12 – Image initiale, fonction distance, ligne de partage des eaux appliquée sur la distance inversée, ligne de partage des eaux appliquée à partir de la reconstruction de la distance moins 2 sous la distance.

Prenons maintenant l'exemple d'une image à niveaux de gris. La ligne de partage des eaux fournit un bon outil de segmentation. Elle peut être appliquée directement sur l'image initiale si l'on cherche à détecter les lignes de crête de l'image pour faire la segmentation, sur une image de gradient (représentant une image de contours numériques), sur le résultat d'un chapeau haut-de-forme si l'on souhaite mettre en évidence des structures fines linéaires (sombres ou claires), etc. Le choix de l'image sur laquelle la ligne de partage des eaux est appliquée dépend bien sûr du problème posé, et doit être effectué dans une première étape. L'inconvénient de la ligne de partage des eaux est qu'elle fournit souvent une image sur-segmentée. La technique de marquage permet alors d'imposer des minima à la ligne de partage des eaux pour éviter

ce problème.

Les marqueurs doivent être déterminés à l'intérieur et à l'extérieur des objets que l'on souhaite segmenter. Pour cela, différentes techniques peuvent être envisagées (filtrage par filtre alterné séquentiel de l'image de gradient, recherche de minima ou maxima régionaux, etc.).

Les minima sont imposés à partir de ces marqueurs par la technique suivante : soit f l'image sur laquelle on souhaite appliquer la ligne de partage des eaux, et g la fonction de marquage prenant la valeur 0 aux points des marqueurs détectés et $+\infty$ (en pratique la valeur maximale) aux points du complémentaire des marqueurs. En effectuant l'érosion géodésique $E_{f \wedge g}(g, B_\infty)$ de g par un élément structurant de taille infinie conditionnellement à $f \wedge g$ (c'est-à-dire une reconstruction numérique), on obtient une version modifiée de f où les minima sont uniquement ceux qui ont été définis par les marqueurs. C'est sur cette image que la ligne de partage des eaux est alors calculée, assurant ainsi que les bassins versants correspondent soit à l'objet à segmenter soit au fond, et qu'on obtient un contour fermé autour de l'objet.

La figure 2.13 donne un exemple de ligne de partage des eaux sur une image de gradient après reconstruction.

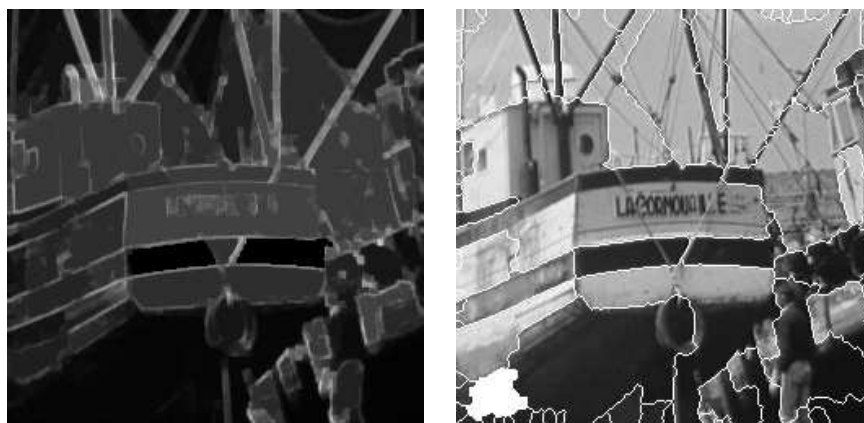


FIGURE 2.13 – Image de gradient après reconstruction en imposant des marqueurs (à gauche) et ligne de partage des eaux appliquée sur cette image (à droite), limitant la sursegmentation.

L'approche par marqueurs est certainement la plus populaire pour réduire les effets de segmentation. D'autres approches ont été proposées, par exemple avec une approche hiérarchique de remplissage des bassins versants [29].

Un autre problème posé par la ligne de partage des eaux est son manque de régularité. La manière la plus simple de répondre au problème est d'effectuer des fermetures. Une approche plus sophistiquée est celle proposée dans [48] dans laquelle l'inondation est faite de manière « visqueuse », ce qui permet d'imposer un rayon de courbure minimal aux contours. Une autre approche de régularisation consiste à exprimer le problème comme la minimisation d'une fonction d'énergie, dans laquelle un terme de régularisation peut être introduit [31] (« watersnakes »).

2.11 Conclusion

De nombreuses extensions peuvent être trouvées dans la littérature sur la morphologie mathématique, ainsi que des liens avec d'autres domaines. Par exemple, l'élément structurant peut être interprété comme une relation binaire et les opérations de morphologie mathématique sont donc applicables à des structures telles que des graphes, où les éléments structurants sont définis en fonction des arcs du graphe [49].

Parmi les nombreux liens, citons ceux qui existent avec les équations de diffusion et l'équation eikonale [43], ainsi qu'avec les approches multi-échelles (pyramides [12], ondelettes [17]).

Bibliographie

- [1] E. Andres. Discrete Circles, Rings and Spheres. *Computers & Graphics*, 18(5) :695–706, 1994.
- [2] C. Berge. *Théorie des graphes et ses applications*. Dunod, Paris, 1958.
- [3] G. Borgefors. Distance Transforms in the Square Grid. In H. Maître, editor, *Progress in Picture Processing, Les Houches, Session LVIII, 1992*, chapter 1.4, pages 46–80. North-Holland, Amsterdam, 1996.
- [4] J. M. Chassery and M. I. Chenin. Topologies on Discrete Spaces. In Simon and Haralick, editors, *Digital Image Processing*, pages 59–66. Reidel, 1980.
- [5] J. M. Chassery and A. Montanvert. *Géométrie discrète*. Hermes, Paris, 1991.
- [6] D. Cœurjolly, A. Montanvert, and J. M. Chassery. *Géométrie discrète et images numériques*. Hermes, Paris, 2007.
- [7] Y. Cointepas, I. Bloch, and L. Garnero. A Cellular Model for Multi-Objects Multi-Dimensional Homotopic Deformations. *Pattern Recognition*, 34(9) :1785–1798, sep 2001.
- [8] I. Debled-Rennesson and J.-P. Reveillès. A Linear Algorithm for Segmentation of Digital Curves. *International Journal on Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 9 :635–662, 1995.
- [9] L. Dorst and W. M. Smeulders. Discrete Representation of Straight Lines. *IEEE Trans. on PAMI*, 6(4) :450–463, 1984.
- [10] E. Dougherty (Ed.). *Image Processing and Mathematical Morphology*. Marcel Dekker, 1992.
- [11] J. Franel. Les suites de Farey et les problèmes des nombres premiers. *Göttinger Nachrichten*, pages 198–201, 1924.
- [12] J. Goutsias and H. J. A. M. Heijmans. Nonlinear Multiresolution Signal Decomposition Schemes : Part I : Morphological Pyramids. *IEEE Transactions on Image Processing*, 9(11) :1862–1876, 2000.
- [13] P. J. Green and R. Sibson. Computing Dirichlet Tessellation in the Plane. *The Computer Journal*, 21 :168–173, 1978.
- [14] B. Grünbaum and G. C. Shepard. *Tilings and Patterns : an Introduction*. Freeman, 1989.
- [15] H. Hadwiger. *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer-Verlag, Berlin, 1957.
- [16] G. Héron. *Synthèse d'image : algorithmes élémentaires*. Bordas, Dunod Informatique, Paris, 1985.
- [17] H. J. A. M. Heijmans and J. Goutsias. Nonlinear Multiresolution Signal Decomposition Schemes : Part II : Morphological Wavelets. *IEEE Transactions on Image Processing*, 9(11) :1897–1913, 2000.
- [18] H. J. A. M. Heijmans and C. Ronse. The Algebraic Basis of Mathematical Morphology – Part I : Dilations and Erosions. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 50 :245–295, 1990.
- [19] H.J.A.M. Heijmans. Theoretical Aspects of Gray-Level Morphology. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13 :568–582, 1991.
- [20] E. Khalimsky, R. Koppermann, and P. R. Meyer. Computer Graphics and Connected Topologies as Finite Ordered Sets. *Topology and its Applications*, 36 :1–17, 1990.
- [21] R. Klein. *Concrete and Abstract Voronoï Diagrams*. Springer Verlag, 1989.
- [22] R. Klette and A. Rosenfeld. *Digital Geometry*. Morgan Kaufmann, San Francisco, 2004.
- [23] T. Y. Kong and A. Rosenfeld. Digital Topology : Introduction and Survey. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 48 :357–393, 1989.

- [24] V. A. Kovalesky. Finite Topology as applied to Image Analysis. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 46 :141–161, 1989.
- [25] J. L. Locher, C. H. A. Broos, M. C. Escher, G. W. Locher, and H. S. M. Coxeter. *L'œuvre de M. C. Escher*. Editions du Chêne, Paris, 1972.
- [26] H. Maître. Un panorama de la transformation de Hough. *Traitement du Signal*, 2(4) :305–317, 1985.
- [27] H. Maître. Contribution to the Prediction of Performances of the Hough Transform. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(5) :669–674, 1986.
- [28] A. Meijster and M. Wilkinson. A comparison of algorithms for connected set openings and closings. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24(4), 2002.
- [29] L. Najman and M. Schmitt. Geodesic saliency of watershed contours and hierarchical segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(12) :1163–1173, 1996.
- [30] L. Najman and H. Talbot. *Mathematical morphology : from theory to applications*. ISTE-Wiley, June 2010.
- [31] H.T. Nguyen, M. Worring, and R. van den Boomgaard. Watersnakes : energy-driven watershed segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 25(3) :330–342, 2003.
- [32] S. Pham. Digital Straight Segments. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 36 :10–30, 1986.
- [33] F. P. Preparata and M. I. Shamos. *Computational Geometry, an Introduction*. Springer Verlag, 1988.
- [34] C. Ronse. A Simple Proof of Rosenfeld's Characterization of Digital Straight Line Segments. *Pattern Recognition Letters*, 3 :323–326, 1985.
- [35] C. Ronse and H. J. A. M. Heijmans. The Algebraic Basis of Mathematical Morphology – Part II : Openings and Closings. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 54 :74–97, 1991.
- [36] A. Rosenfeld. Connectivity in Digital Pictures. *Journal of ACM*, 17(1) :146–160, 1970.
- [37] A. Rosenfeld. Digital Straight Line Segments. *IEEE Trans. on Computers*, 23(12) :1264–1269, 1974.
- [38] A. Rosenfeld. Digital Topology. *Amer. Math. Monthly*, pages 621–630, 1979.
- [39] P. Salembier. Morphological multiscale segmentation for image coding. *Signal Processing*, 38 :359–386, 1994.
- [40] P. Salembier, A. Oliveras, and L. Garrido. Anti-extensive connected operators for image and sequence processing. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7 :555–570, 1998.
- [41] L. A. Santalo. Complemento a la Nota : un Teorema Sobre Conjuntos de Paralelepipedos de Aristas Paralelas. *Publ. Int. Mat. Univ. Nac. Litoral*, 2 :49–60, 1940.
- [42] L. A. Santalo. *Integral Geometry and Geometric Probability*. Addison Wesley, 1976.
- [43] M. Schmitt and J. Mattioli. *Morphologie mathématique*. Masson, Paris, 1994.
- [44] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, New-York, 1982.
- [45] J. Serra (Ed.). *Image Analysis and Mathematical Morphology, Part II : Theoretical Advances*. Academic Press, London, 1988.
- [46] P. Soille. *Morphological Image Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [47] G. T. Toussaint. *Computational Geometry*. North Holland, Amsterdam, 1985.
- [48] Corinne Vachier and Fernand Meyer. The viscous watershed transform. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 22(2 - 3) :251–267, 2005.
- [49] L. Vincent. Graphs and Mathematical Morphology. *Signal Processing*, 16 :365–388, 1989.
- [50] L. Vincent. Morphological Algorithms. In E. Dougherty, editor, *Mathematical Morphology in Image Processing*, pages 255–288. Marcel Dekker, 1992.
- [51] L. Vincent and P. Soille. Watersheds in Digital Spaces : an Efficient Algorithm based on Immersion Simulations. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(6) :583–598, 1991.
- [52] M. Wilkinson and J. Roerdink. Fast morphological attribute operations using tarjan's union-find algorithm. In *Mathematical Morphology and its Applications to Image and Signal Processing*, Kluwer, pages 311–320, 2000.