

Cours de morphologie mathématique



Master 2 IMA – UPMC

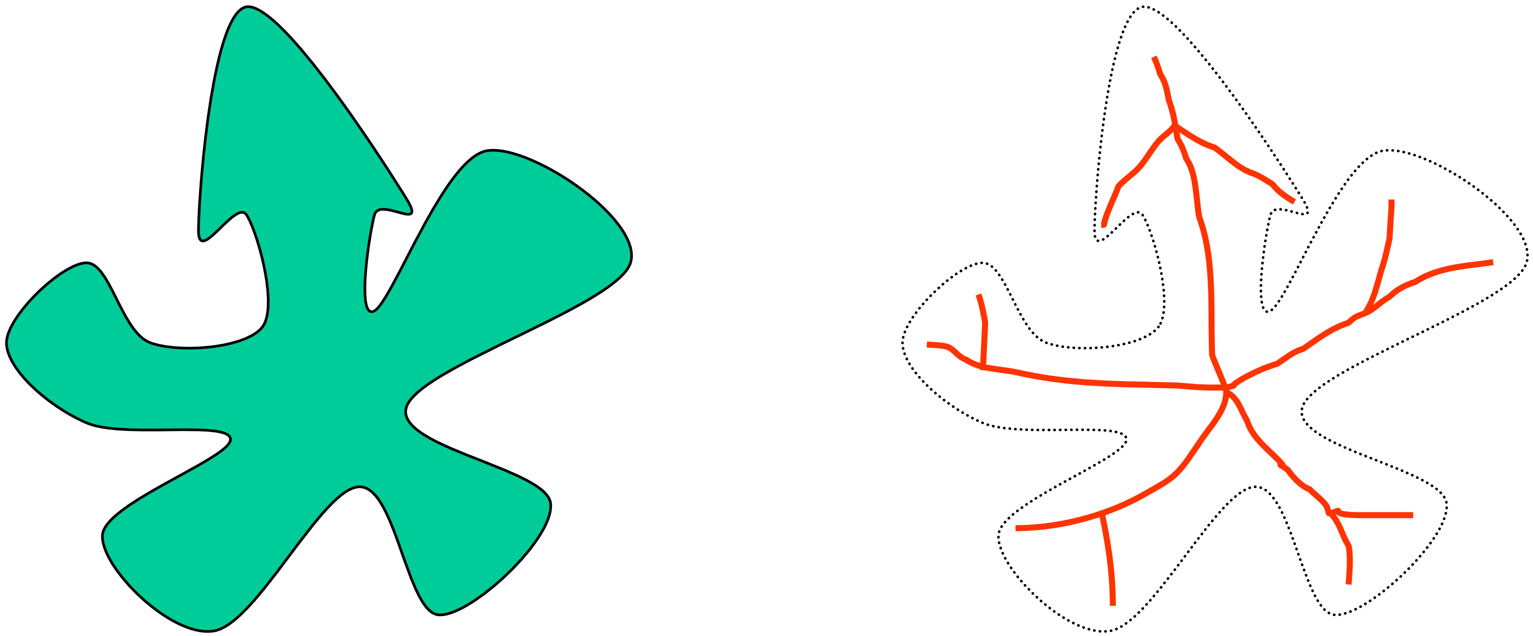
Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

Squelettes morphologiques et squelettes connexes

- Squelettes : introduction.
- Squelette morphologique euclidien.
- Squelette morphologique discret.
- Squelette et résidus.
- Squelettes connexes : Squelettes euclidiens multi-échelles.

Squelettes : motivations

L'objectif de la squelettisation est de représenter un ensemble avec un minimum d'information, sous une forme qui soit à la fois simple à extraire et commode à manipuler.

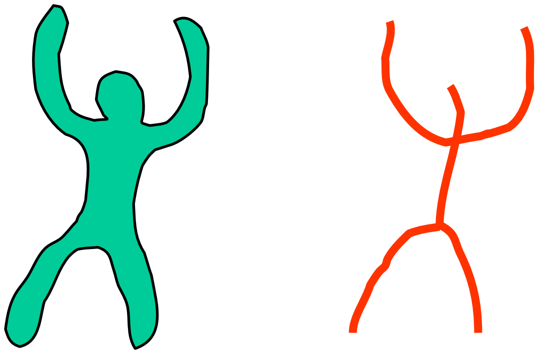


Remarque : Pour les squelettes, on se limitera dans le cadre de ce cours au cas des ensembles bidimensionnels (images binaires 2D), bien que certaines notions s'appliquent également aux dimensions supérieures.

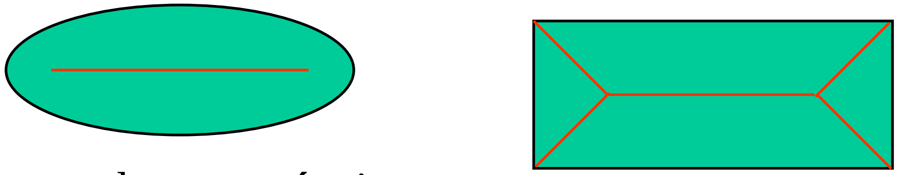
Squelettes : propriétés recherchées (1)

Préservation de la géométrie

Le squelette doit rendre compte des propriétés géométriques de la forme : ramifications, parties allongées...



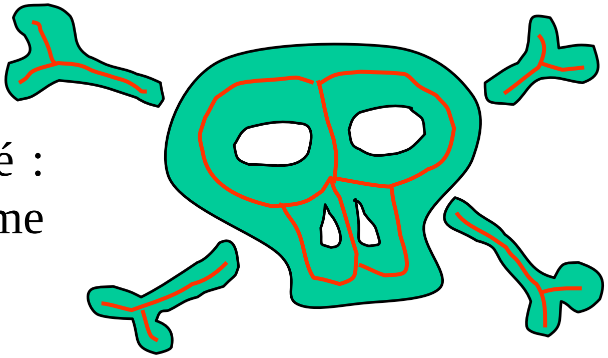
Epaisseur nulle



Le squelette doit être constitué de courbes sans épaisseur.

Préservation de la topologie

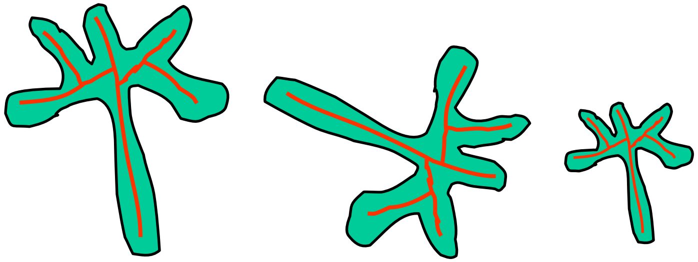
Le squelette doit conserver les relations de connexité : même nombre de composantes connexes, même nombre de trous par composante connexe.



Squelettes : propriétés recherchées (2)

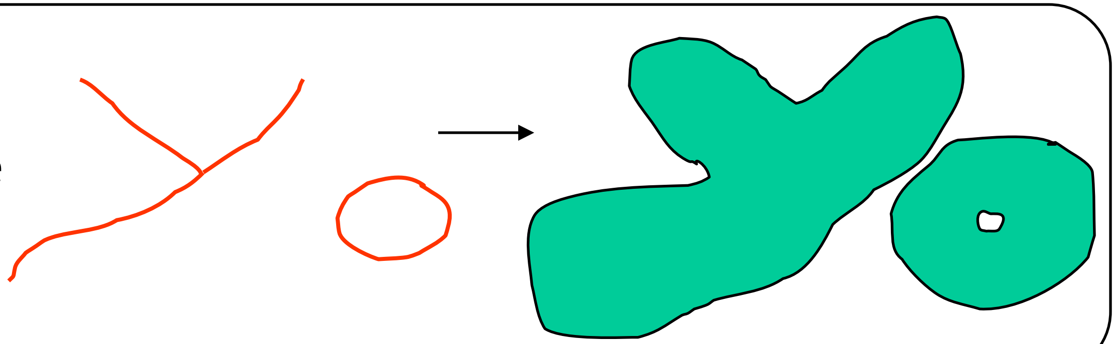
Invariance aux transformations affines

Le squelette doit commuter avec la translation, la rotation et l'homothétie



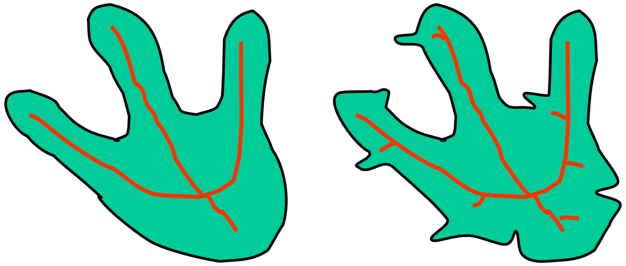
Réversibilité

Le squelette doit permettre de retrouver la forme originale



Continuité

Une petite modification de la forme originale doit induire une petite modification du squelette



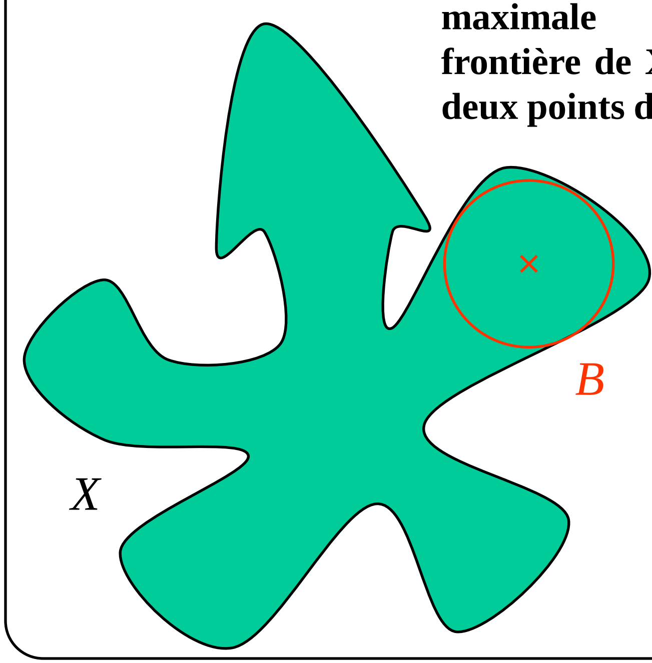
Squelette morphologique

Le squelette morphologique est fondée sur la notion d'*axe médian* *(Blum 67)*. Il utilise la notion de *boule maximale* :

Une boule B est dite maximale dans X si :

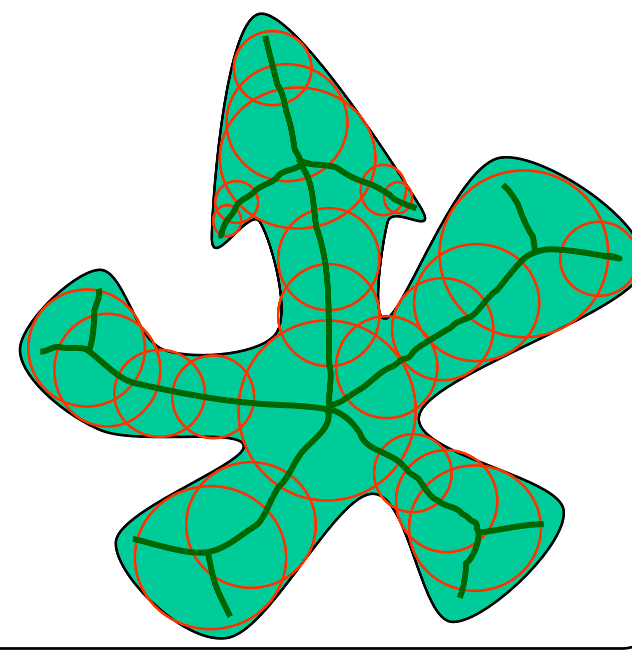
$$B \subset B' \subset X \Rightarrow B' = B$$

Propriété : une boule maximale touche la frontière de X en au moins deux points distincts



Le squelette morphologique (euclidien) est la réunion des centres de boules (euclidiennes) maximales :

$$S(X) = \bigcup_{\rho \geq 0} \left\{ x \in \mathbf{R}^2 ; B(x,\rho) \text{ est maximale dans } X \right\}$$



Propriétés du squelette morphologique (1)

De par sa définition, le squelette morphologique euclidien respecte la géométrie de la forme originale, et il est invariant par homothétie. Il possède de plus les propriétés suivantes :

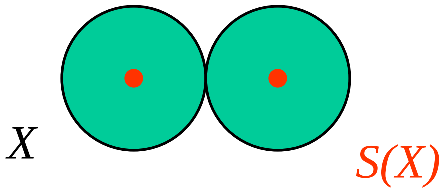
• Il est sans épaisseur (d'intérieur vide).

• Il est anti-extensif et idempotent :

$$S(X) \subset X \qquad\qquad S(S(X)) = S(X)$$

• Si *X est ouvert*, alors *X* et *S(X)* ont la même topologie.

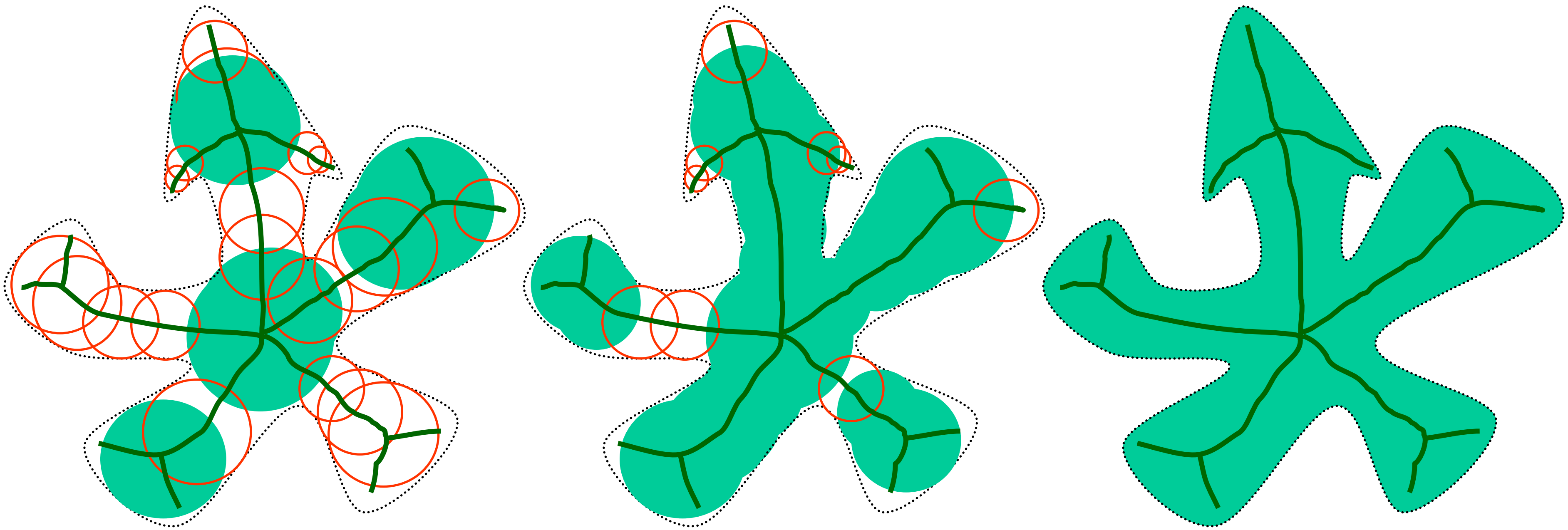
Contre-exemple :



Propriétés du squelette morphologique (2)

***Réversibilité* :**

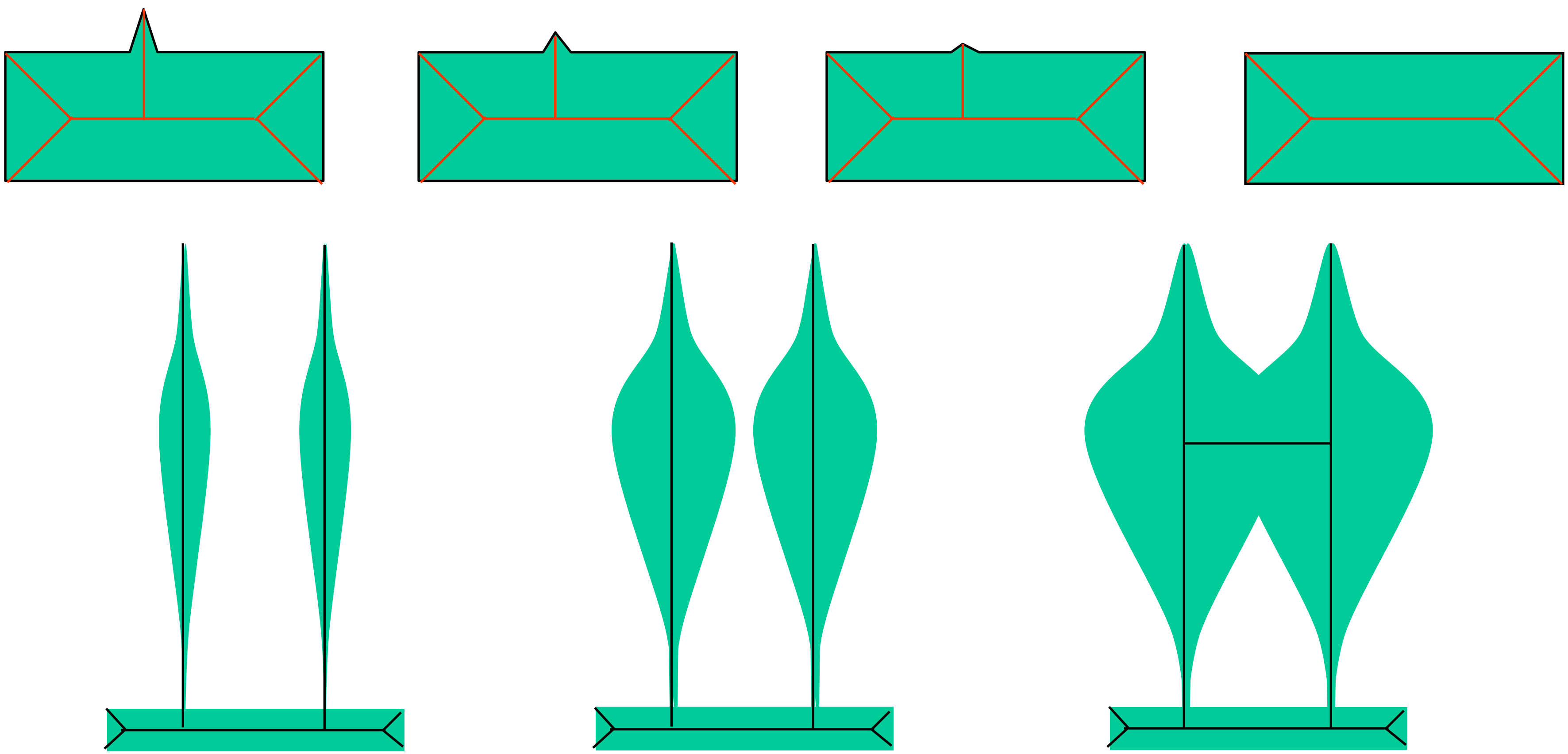
La donnée de la transformée en distance euclidienne de *X* sur *S(X)* permet de reconstruire exactement *X* :



Propriétés du squelette morphologique (3)

***Non-continuité* :**

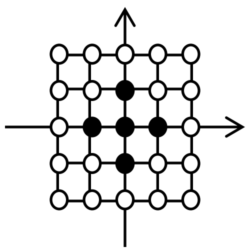
Le squelette morphologique euclidien n’est pas une transformation continue :



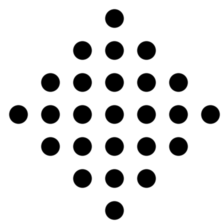
Squelette morphologique : passage au discret

Dans le cas discret, les boules maximales sont les boules d'une distance discrète donnée

Exemples :

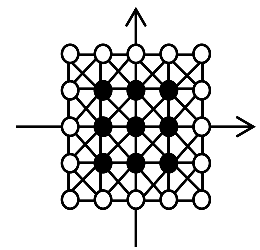


voisinage élémentaire de l'origine

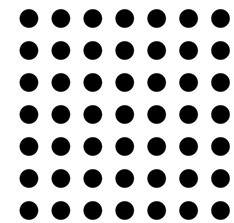


boule de rayon 3

Distance d_4



voisinage élémentaire de l'origine



boule de rayon 3

Distance d_8

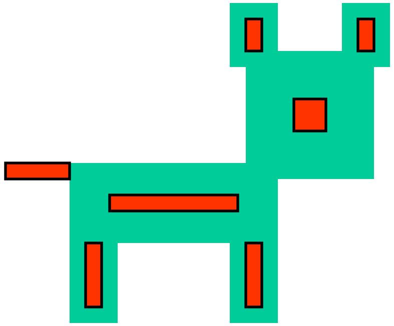
PROPRIÉTÉ

Un point x est centre d'une boule maximale de rayon r dans X si et seulement si il appartient à l'érodé de X par une boule de taille r, mais pas à l'ouvert de cet érodé par la boule élémentaire :

$$\begin{aligned} S_r(X) &= \left\{ x \in \mathbf{Z}^2 ; B(x,r) \text{ est maximale dans } X \right\} \\ &= \varepsilon_{B(0,r)}(X) \setminus \gamma_{B(0,1)}\left(\varepsilon_{B(0,r)}(X)\right) \end{aligned}$$

Squelette morphologique : passage au discret

Par conséquent, le squelette morphologique est égal à l'union des résidus d'ouverture des érodés successifs de la forme originale :

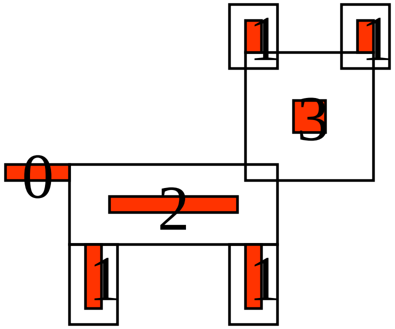


$$S(X) = \bigcup_{r \in \mathbf{N}} S_r(X)$$
$$= \bigcup_{r \in \mathbf{N}} \varepsilon_{B(0,r)}(X) \setminus \gamma_{B(0,1)}\left(\varepsilon_{B(0,r)}(X)\right)$$

Lantuéjoul 78

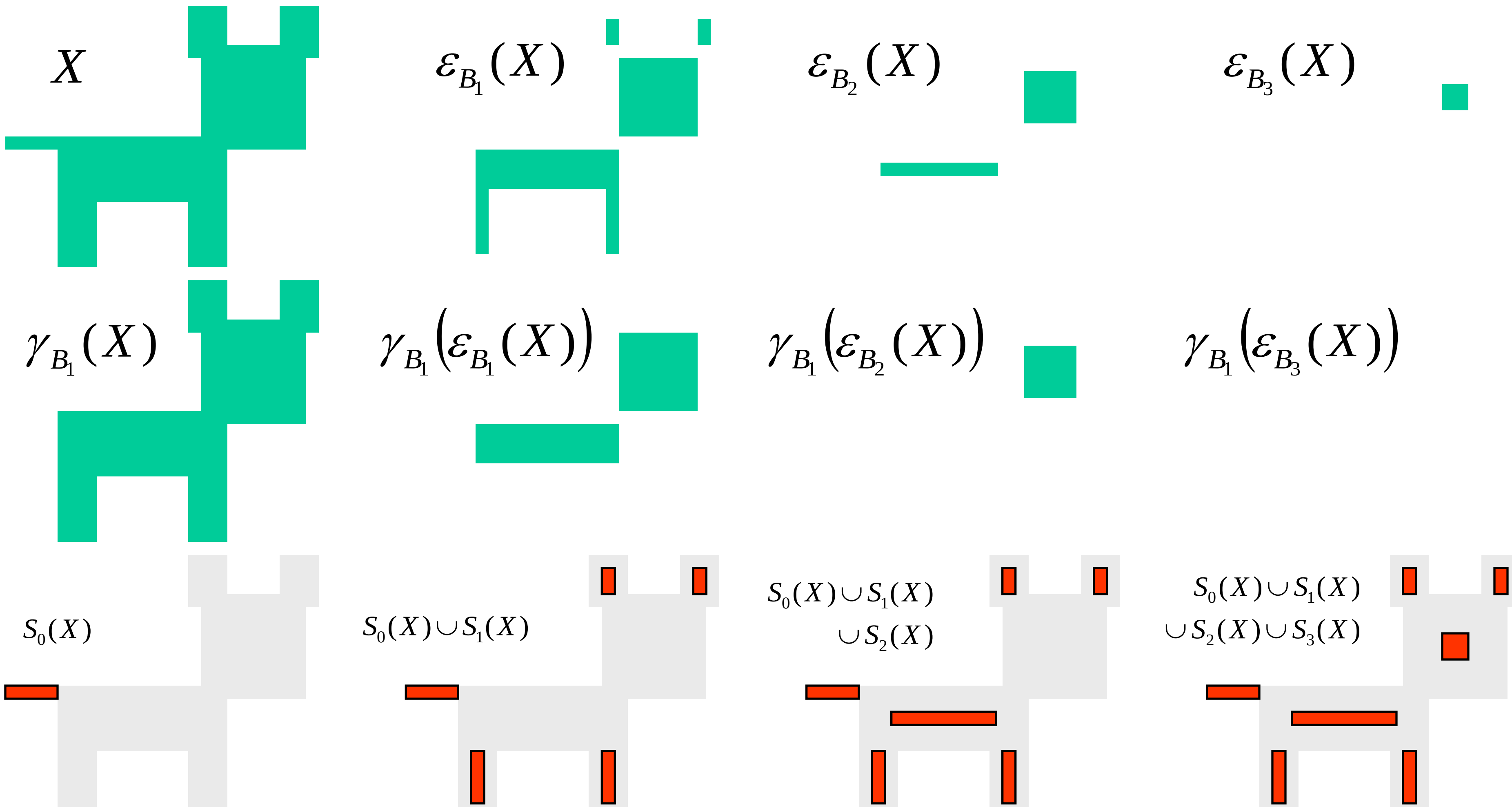
Formule d'inversion du squelette morphologique :

$$X = \bigcup_{r \in \mathbf{N}} \delta_{B(0,r)}\left(S_r(X)\right)$$



Squelette morphologique : passage au discret

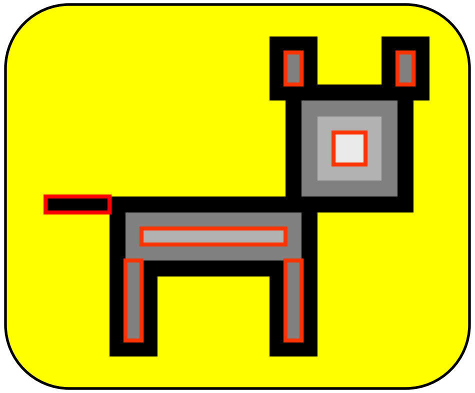
La formule de Lantuéjoul fournit un moyen explicite de calculer le squelette morphologique :



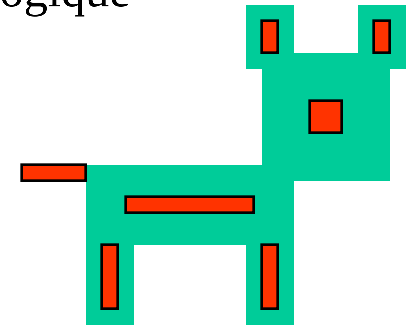
Squelette morphologique : passage au discret

Comme l'ensemble des résidus d'ouverture coïncide avec l'ensemble des maxima locaux de la transformée en distance, le squelette morphologique discret est égal aux maxima locaux de la transformée en distance :

$$S(X) = \{x \in X; \forall y, \delta(x,y) = 1 \Rightarrow \delta(y, X^c) \leq \delta(x, X^c)\}$$



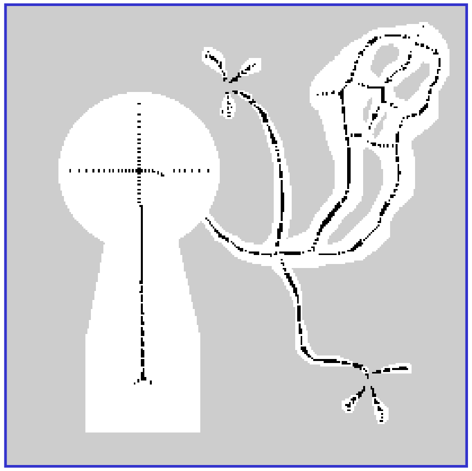
Contrairement au cas continu, le squelette morphologique ne préserve pas la topologie de la forme originale :

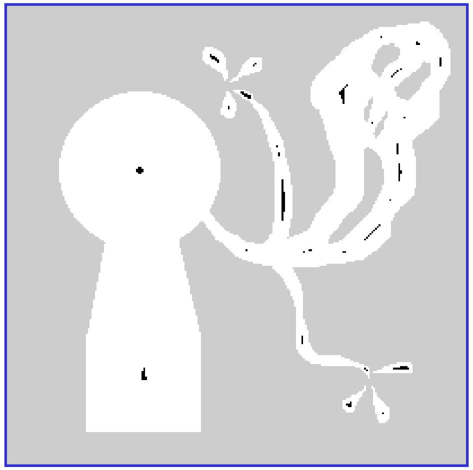


Les algorithmes de squelettisation connexe traitent donc le problème de préservation de la topologie directement dans le cadre discret.

Squelette morphologique / Erodés ultimes

REMARQUE : Noter les parallèles entre le squelette morphologique et les érodés ultimes :





Squelette morphologique	⟺	*Erodés ultimes*
॥		॥
Maxima locaux de la transformée en distance	⟺	*Maxima régionaux* de la transformée en distance
॥		॥
Résidus d'*ouverture*	⟺	Résidus d'*ouverture par reconstruction*

Squelettes euclidiens multi-échelles

Il existe de nombreuses techniques de calcul des squelettes homotopiques (qui préservent la topologie). Les plus classiques sont : les squelettes pas amincissement, les squelettes par reconnexion du squelette morphologique. Nous présentons dans la suite une des techniques les plus élégantes et les plus efficaces : le squelette euclidien multi-échelles.

Son principe de calcul repose sur les 4 étapes suivantes :

1- Associer une *étiquette unique* à chaque pixel du contour

2- *Propager* les valeurs des étiquettes aux pixels les plus proches

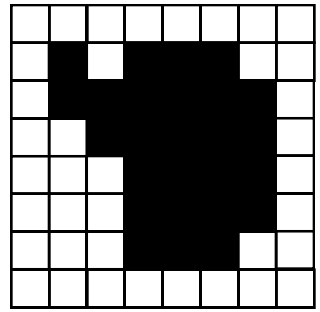
3- Calculer une *fonction de choc locale* selon la différence des valeurs des étiquettes entre pixels adjacents

4- Le squelette est obtenu par *seuillage* de la fonction de choc.

Une propriété remarquable est que, grâce au calcul récursif de la transformée en distance, chacune de ces étapes a un *coût de calcul constant*.

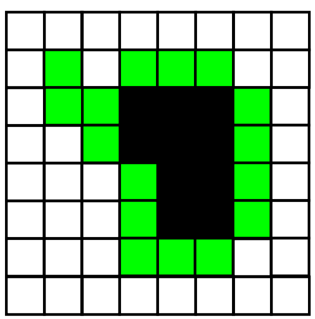
Etiquetage de contours

Soit X une image binaire.



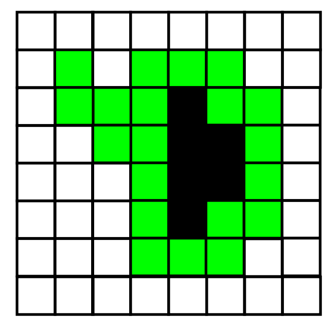
Contour en 4-connexité :

$$\partial_X^4 = \left\{ z \in X ; \exists q \notin X : d_4(z,q) = 1 \right\}$$



Contour en 8-connexité :

$$\partial_X^8 = \left\{ z \in X ; \exists q \notin X : d_8(z,q) = 1 \right\}$$



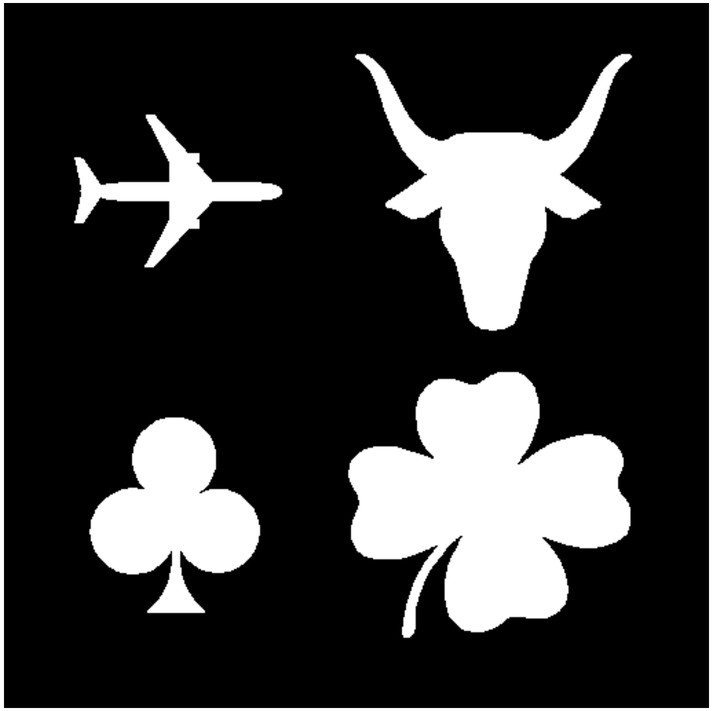
Remarque : le contour en 4-connexité forme une courbe 8-connexe pour chaque composante 8-connexe de X. Le contour en 8-connexité forme une composante 4-connexe pour chaque composante 4-connexe de X.

Etiquetage de contours

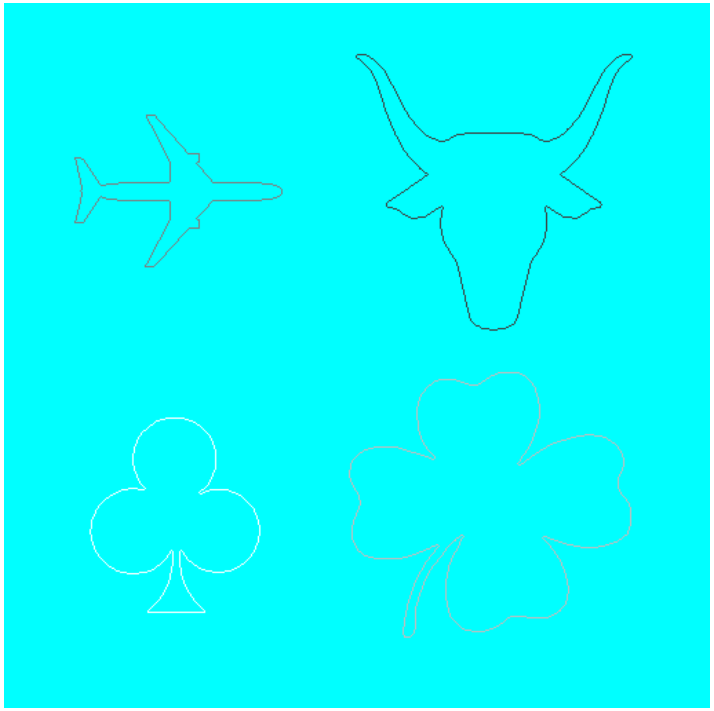
L'étiquetage de contours consiste à attribuer à chaque pixel de contour de X une paire d'étiquettes (Λ,λ) tels que :

1- Λ identifie chaque composante connexe de X

2- λ attribue à chaque pixel de chaque composante un numéro unique selon un certain sens de parcours.



X



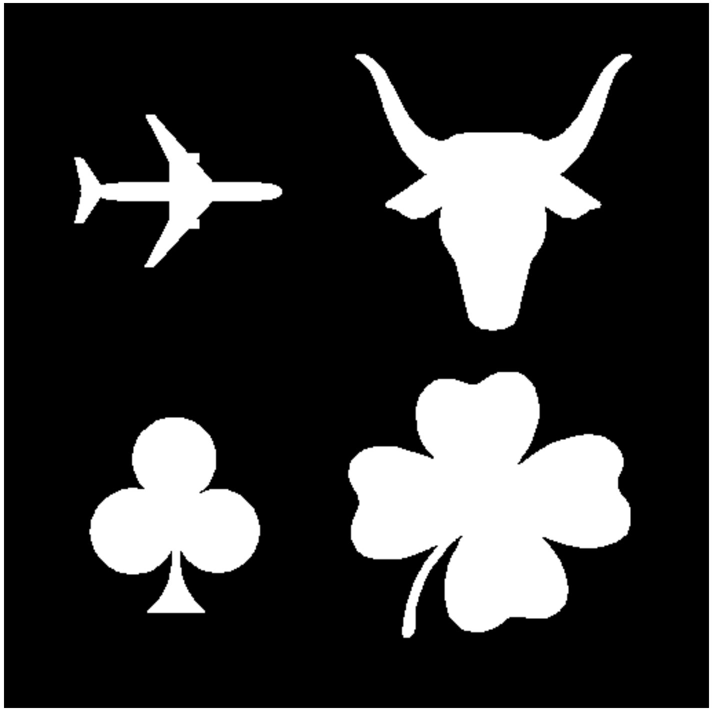
Λ_X

Etiquetage de contours

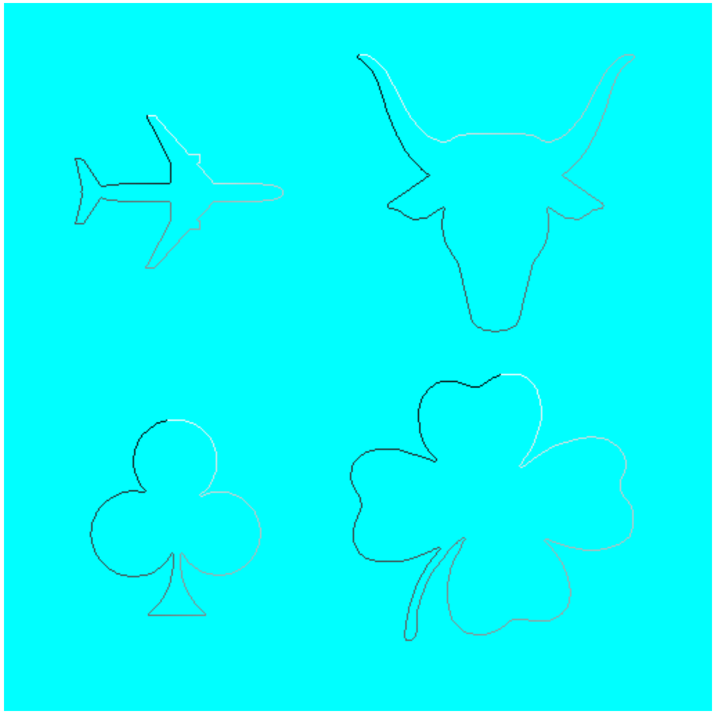
L'étiquetage de contours consiste à attribuer à chaque pixel de contour de X une paire d'étiquettes (Λ,λ) tels que :

1- Λ identifie chaque composante connexe de X

2- λ attribue à chaque pixel de chaque composante un numéro unique selon un certain sens de parcours.



X



λ_X

Propagation des étiquettes

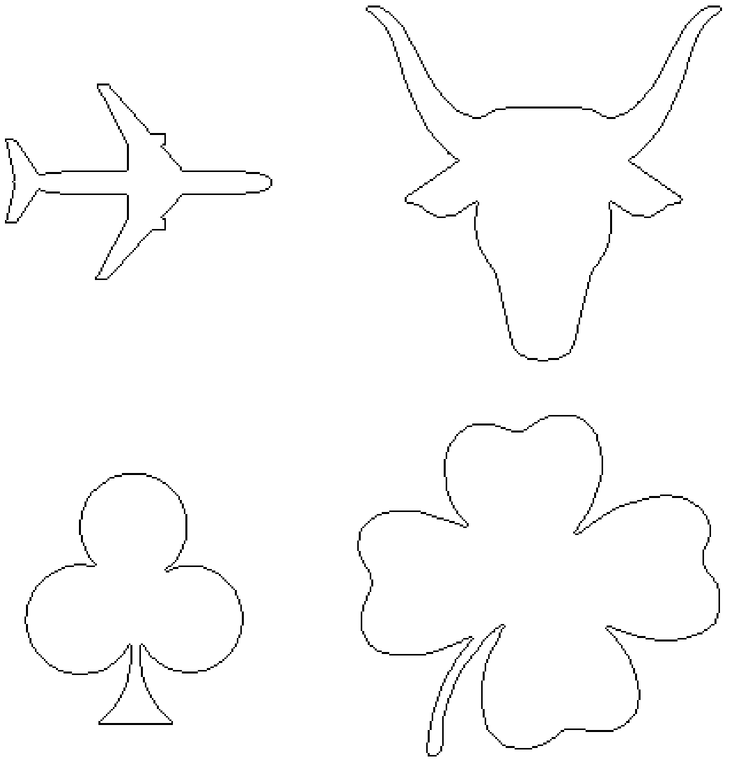
La propagation des étiquettes aux pixels les plus proches se fait simplement en utilisant l'algorithme de calcul de la transformée en distance sur le complémentaire du contour. On associe alors à chaque pixel (x,y) les coordonnées relatives $(R_x(x,y),R_y(x,y))$ du pixel de contour le plus proche de (x,y).

Si L est une fonction étiquette sur le contour de X, la propagation de l'étiquette L selon la distance d est la fonction définie sur X comme suit :

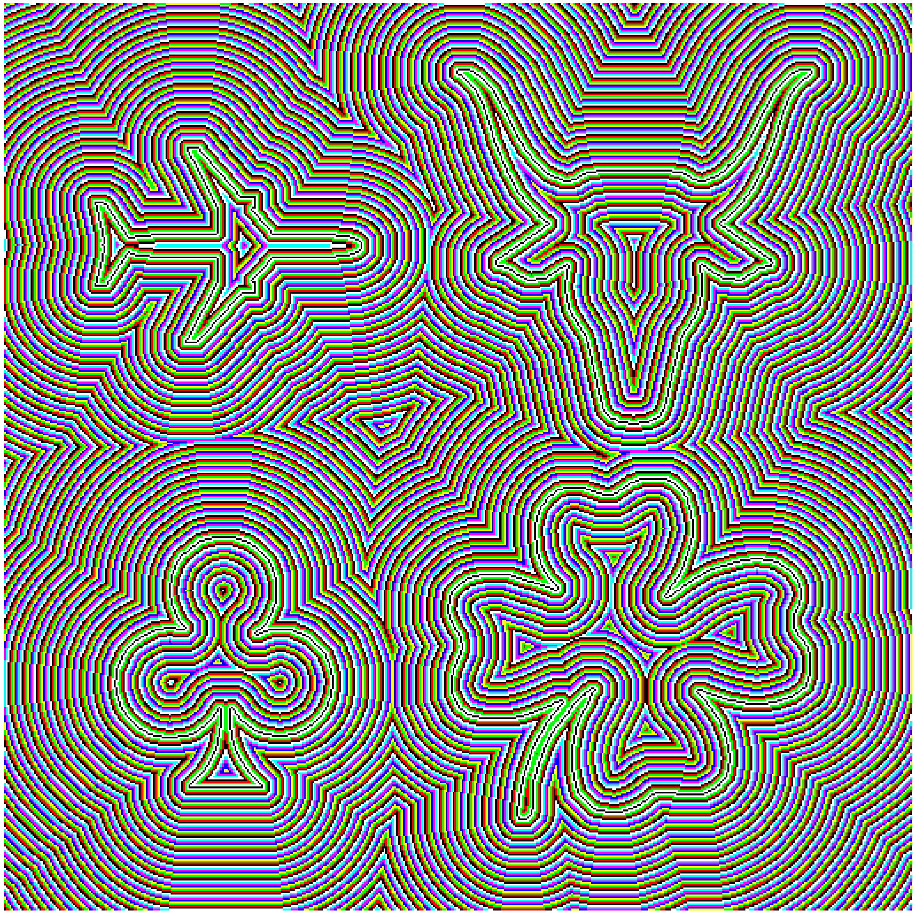
$$\Pi_L^d(x,y) = L(x + R_x, y + R_y)$$

- La propagation des étiquettes Λ (composantes connexes) fournit la partition de X en zones d'influence (SKIZ).
- La propagation des étiquettes λ (énumération de contours) calcule les zones d'influence de chaque pixel du contours, ce qui, par différenciation, fournira le squelette.

Propagation des étiquettes

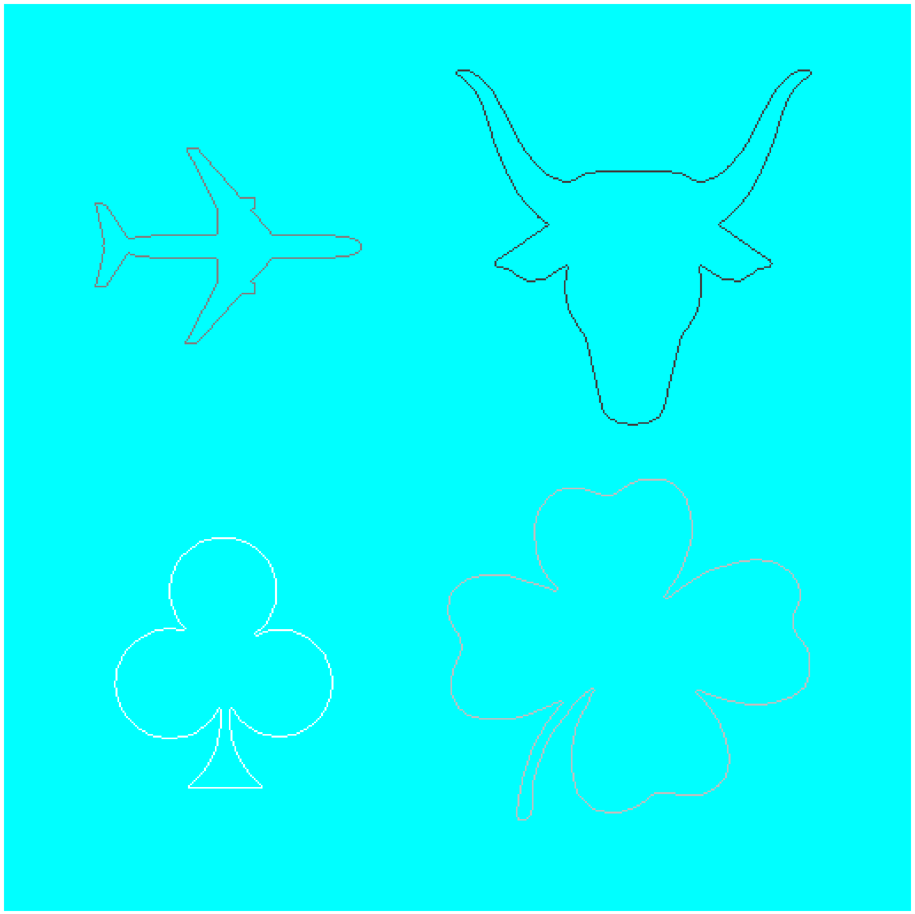


$\partial^4 X$



$F^{d_E}_{(\partial^4 X)^c}$

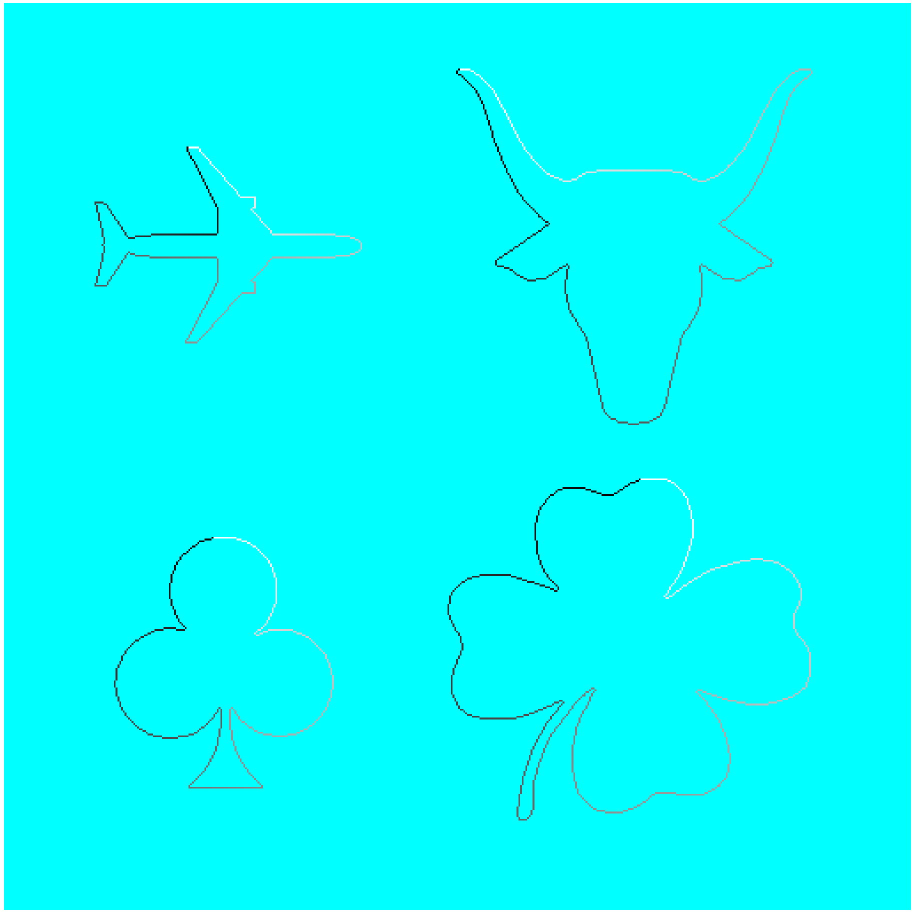
Propagation des étiquettes



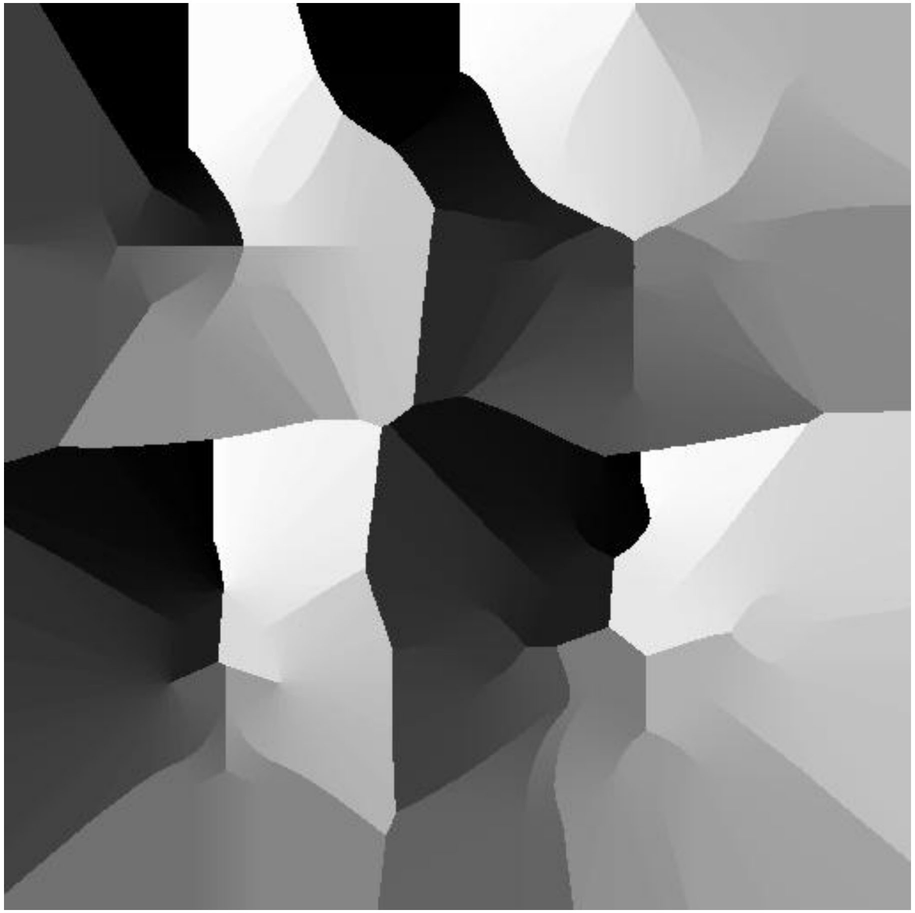
Λ_X

$\Pi_{\Lambda_X}^{d_E}$

Propagation des étiquettes

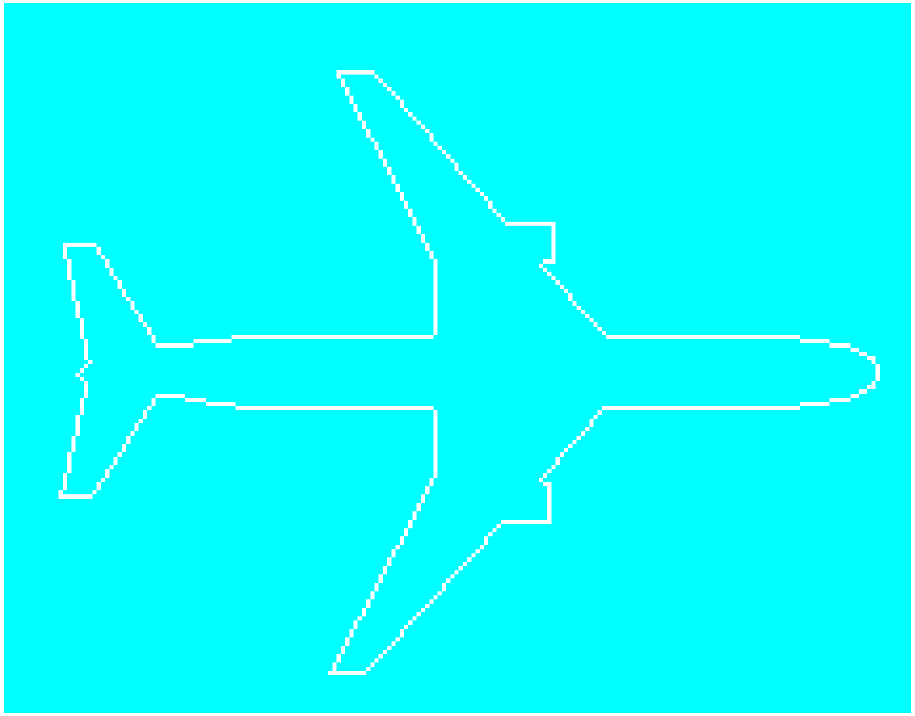


λ_X

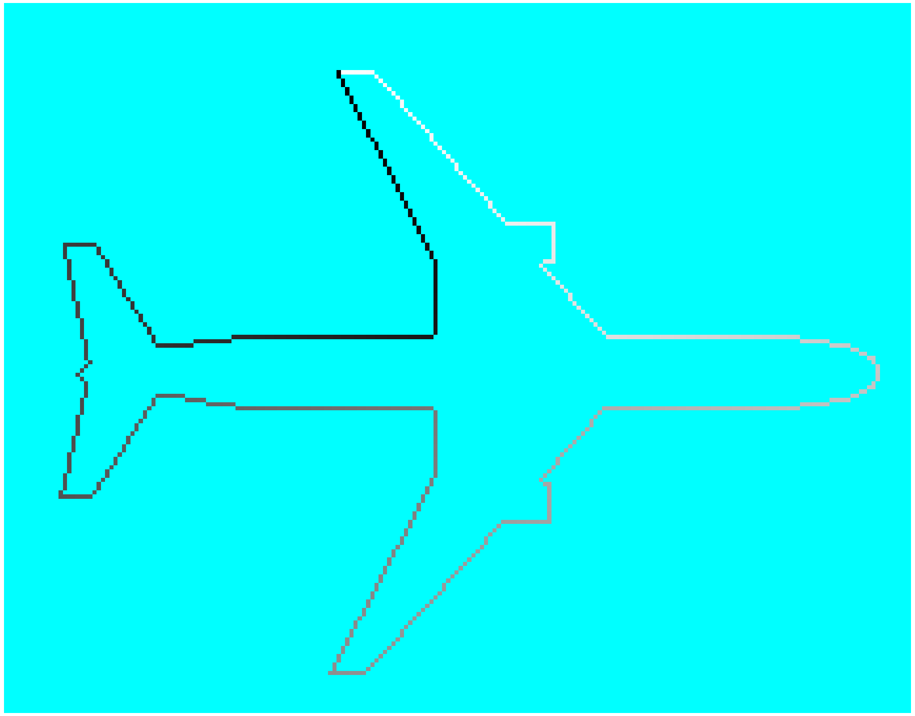


$\Pi_{\lambda_X}^{d_E}$

Propagation des étiquettes

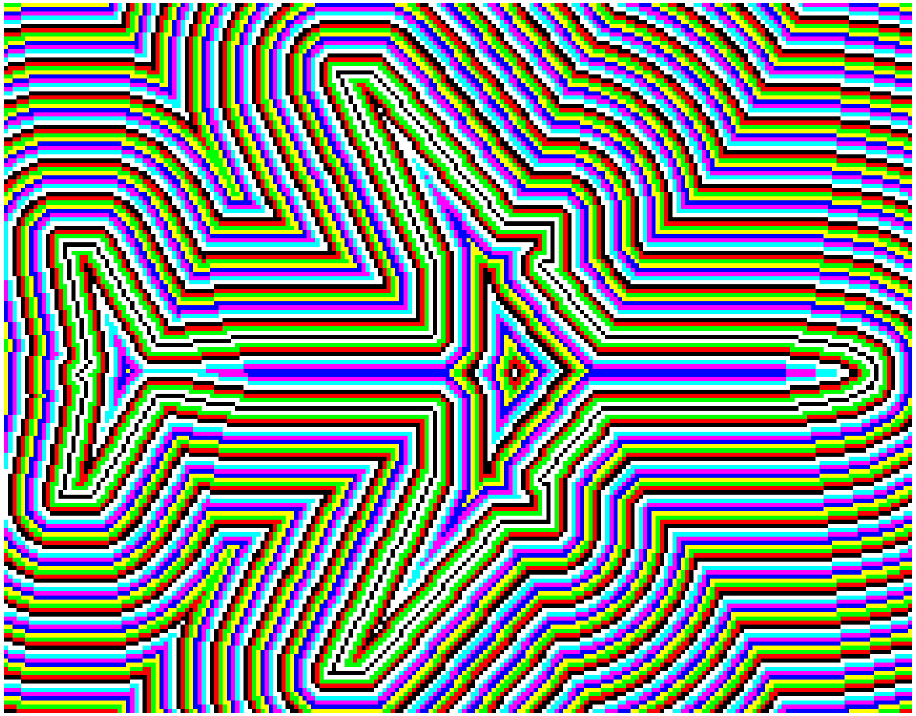


Λ_X (1 étiquette)



λ_X (679 étiquettes)

Propagation des étiquettes



$F^{d_E}_{(\partial^4 X)^c}$

$\Pi^{d_E}_{\lambda_X}$

Fonction de choc

• La fonction de choc associe à chaque pixel *p* une valeur proportionnelle à « l'éloignement » maximum entre le pixel du contour correspondant à l'étiquette de *p* et ceux qui correspondent à l'étiquette des pixels voisins de *p*.

• L'éloignement est associé à une fonction de coût κ définie sur le contour, où chaque pixel est identifié par sa paire d'étiquette (Λ,λ).

On note $N_X(p)$ le point du contour de X le plus proche de p :

$$N_X(p) = \left(x_p + R_x(p), y_p + R_y(p)\right)$$

Fonction de choc 8-connexe :

$$S_8(p) = \max_{d_4(p,q)=1} \kappa(N_X(p), N_X(q))$$

Fonction de choc 4-connexe :

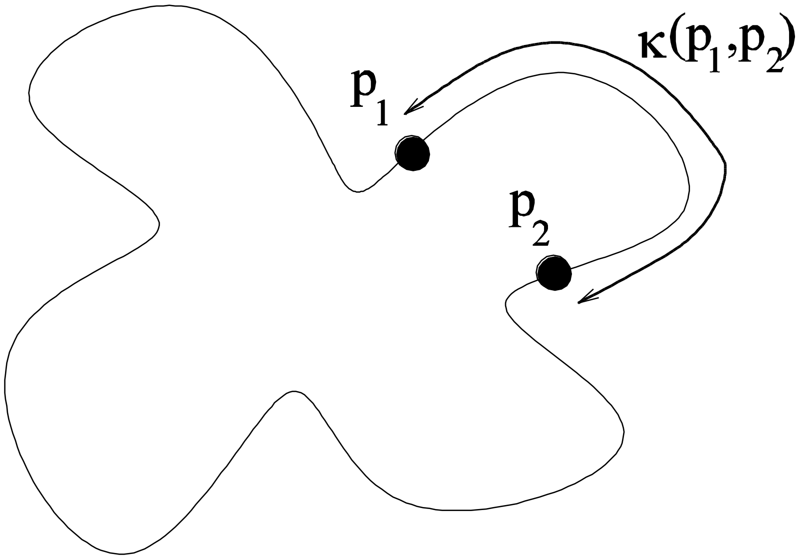
$$S_4(p) = \max_{d_8(p,q)=1} \kappa(N_X(p), N_X(q))$$

Remarquer la dualité : on calcule la valeur maximale dans le 4-voisinage pour un squelette 4-connexe, et réciproquement.

Fonction de choc

La fonction de coût associée à la fonction de choc est la distance géodésique entre 2 points du contour $p_1 = N_X(p)$ et $p_2 = N_X(q)$, le long du contour de X :

$$\kappa(p_1, p_2) = d_{\partial_X}(p_1, p_2)$$

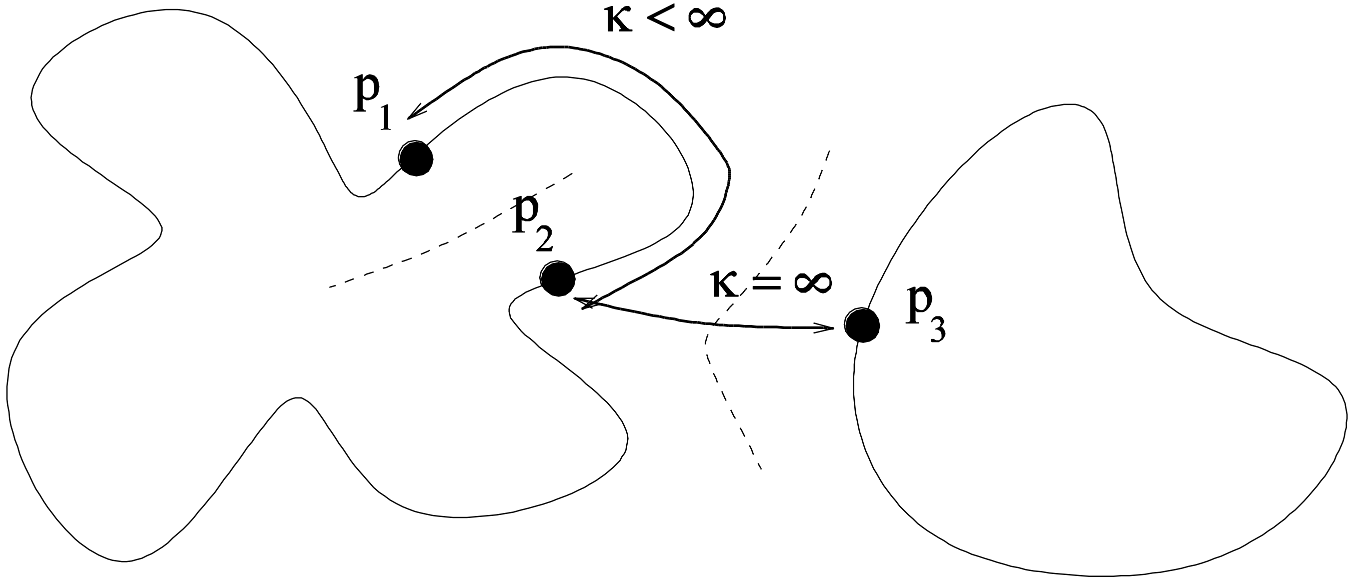


Fonction de choc

La fonction de choc associée à la distance géodésique se calcule très simplement en comparant les étiquettes Λ_X et λ_X entre 2 pixels p et q adjacents :

(1) Si $\Lambda_X(p) \neq \Lambda_X(q)$, alors p est à la frontière des zones d'influence de plusieurs contours connexes, et donc :

$$\kappa(N_X(p), N_X(q)) = \infty$$



Fonction de choc

(2) Si $\Lambda_X(p) = \Lambda_X(q)$, alors la fonction de choc est égale à la différence des étiquettes λ_X, *modulo* le nombre total de pixel du contour contenant p et q.

Fonction de choc symétrique

$$\kappa(N_X(p), N_X(q)) = \left|\Pi^d_{\lambda_X}(p) - \Pi^d_{\lambda_X}(q)\right| \bmod \underbrace{\left|\partial^p_X\right|}$$

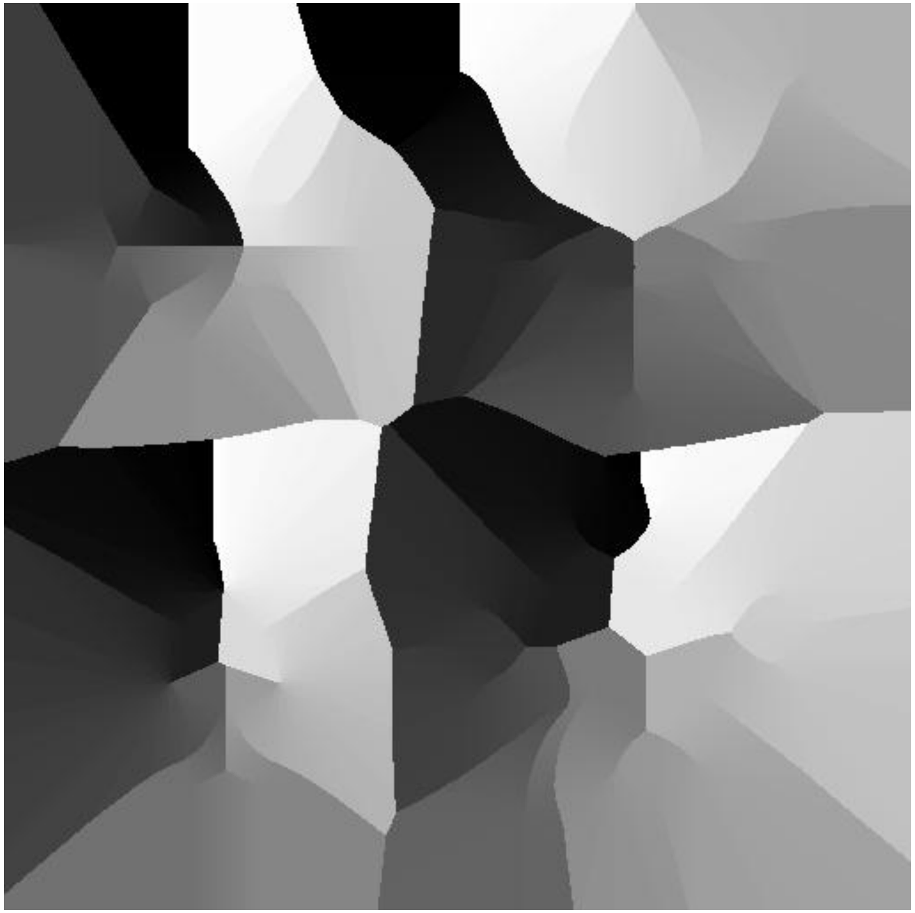
Nombre de pixels de la composante connexe du contour de X contenant p.

Fonction de choc asymétrique

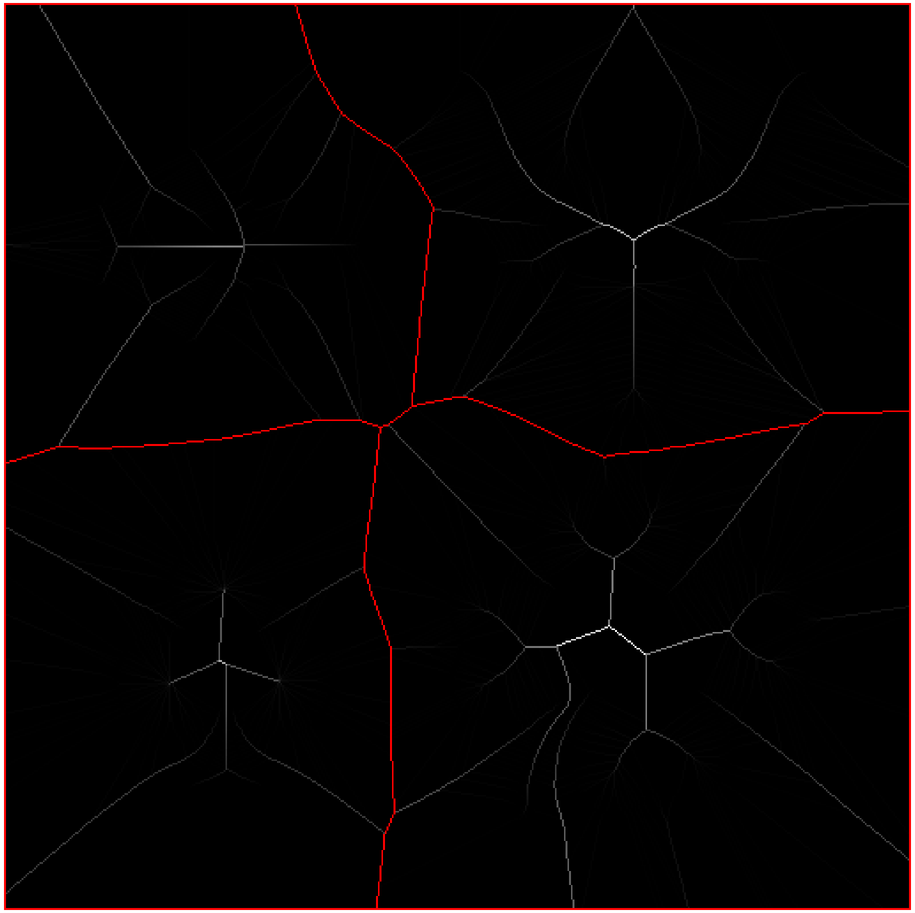
$$\kappa(N_X(p), N_X(q)) = \left(\Pi^d_{\lambda_X}(p) - \Pi^d_{\lambda_X}(q)\right) \bmod \left|\partial^p_X\right|$$

La fonction de choc symétrique produit un squelette centré mais d'épaisseur 2, tandis que la fonction de choc asymétrique produit un squelette d'épaisseur 1, avec une erreur possible de placement d'un demi-pixel.

Fonction de choc



$\Pi_{\lambda_X}^{d_E}$

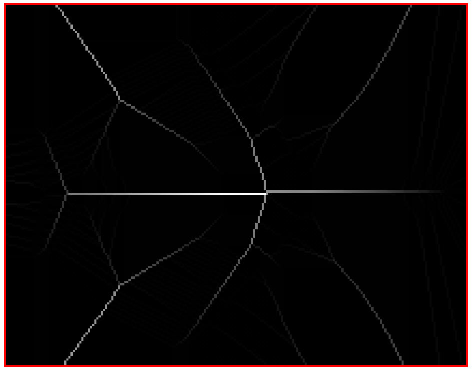


$S_8\left(\Pi_{\lambda_X}^{d_E}\right)$

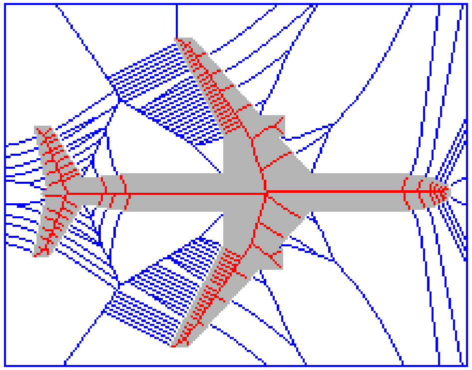
Squelette multi-échelles

Une fois la fonction de choc S définie, le squelette à l'échelle σ est simplement défini comme le seuil de niveau σ de la fonction de choc :

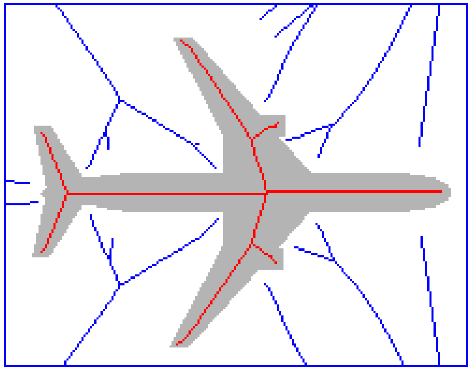
$$Sk_\sigma(X) = \{z; S(z) > \sigma\}$$



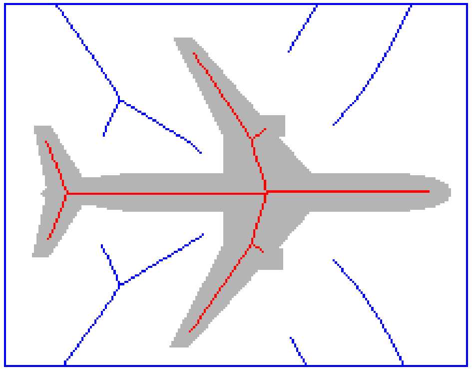
$S_8\left(\Pi_{\lambda_X}^{d_E}\right)$



$Sk_1(X)$



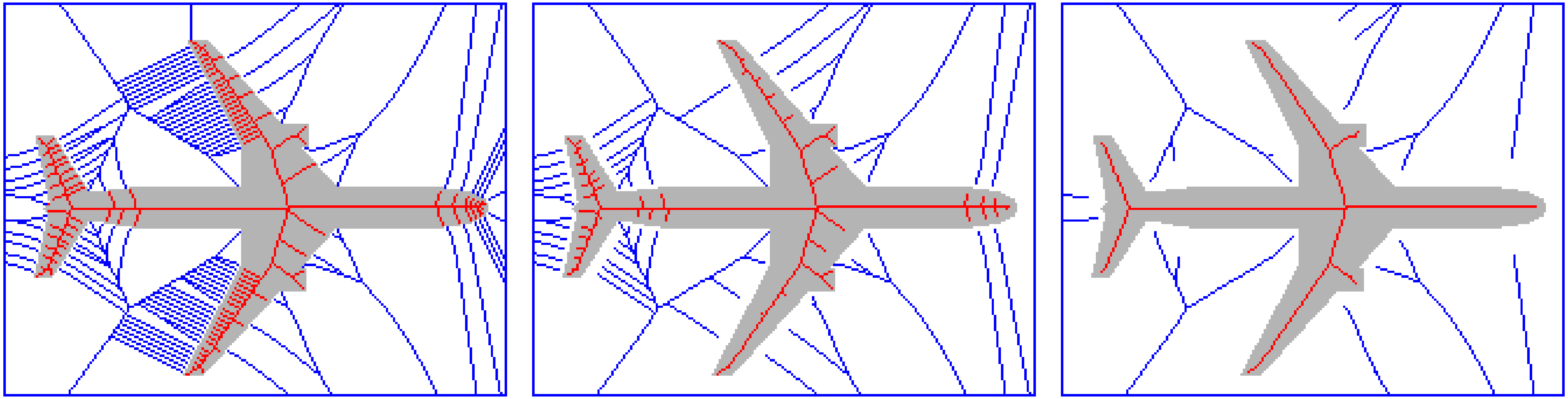
$Sk_5(X)$



$Sk_{20}(X)$

Squelette multi-échelles

PROPRIETE : La fonction de choc associée à la distance géodésique le long du contour est connexe-monotone : pour tout entier n, l'ensemble des pixels dont la fonction de choc est supérieure à n a le même nombre de composantes connexes que l'image initiale :

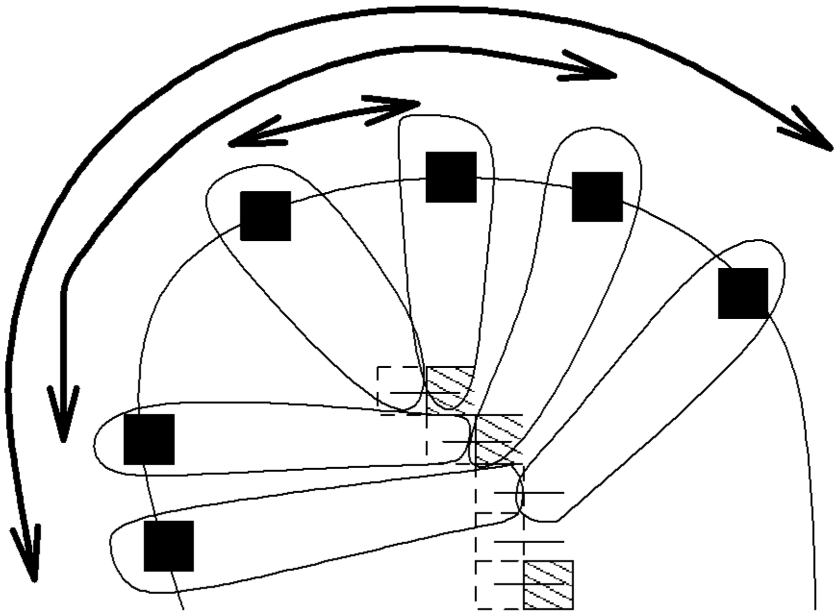


$Sk_1(X)$ $Sk_2(X)$ $Sk_5(X)$

Connectivité des squelettes multi-échelles

La propriété de connexe-monotonie de la fonction de choc est due au fait que les zones d'influence des pixels du contour sont connexes :

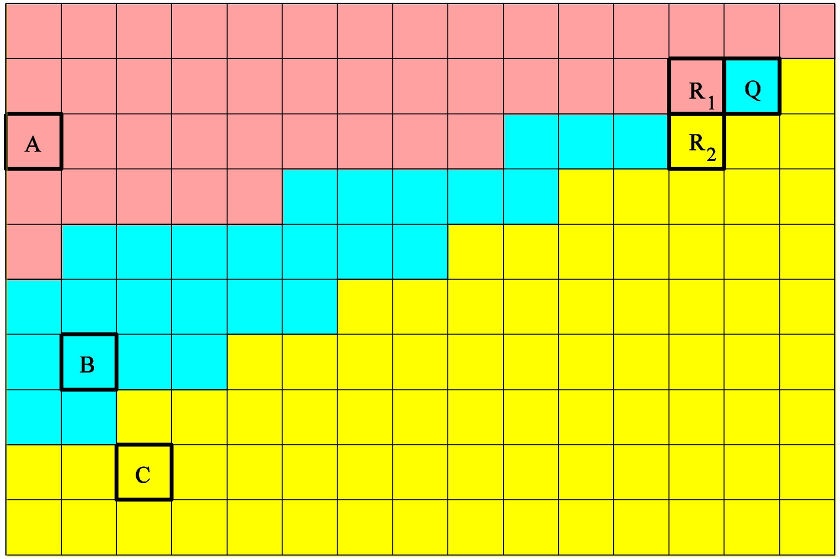
La connectivité des zones d'influence des pixels implique la croissance de la fonction de choc le long du squelette à partir des extrémités :



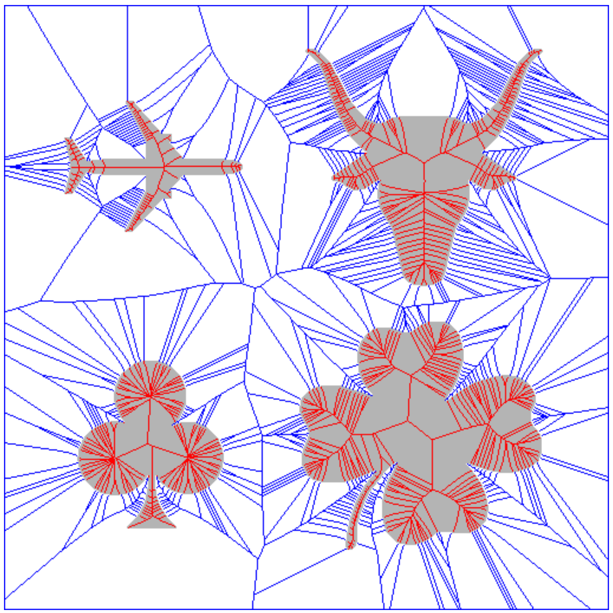
Connectivité des squelettes multi-échelles

La connectivité des zones d'influence des pixels est aussi une condition nécessaire de connectivité des squelettes multi-échelles. En ce sens l'algorithme DL pour le calcul de la fonction distance quasi-euclidienne est plus adapté qu'une transformée en distance euclidienne exacte :

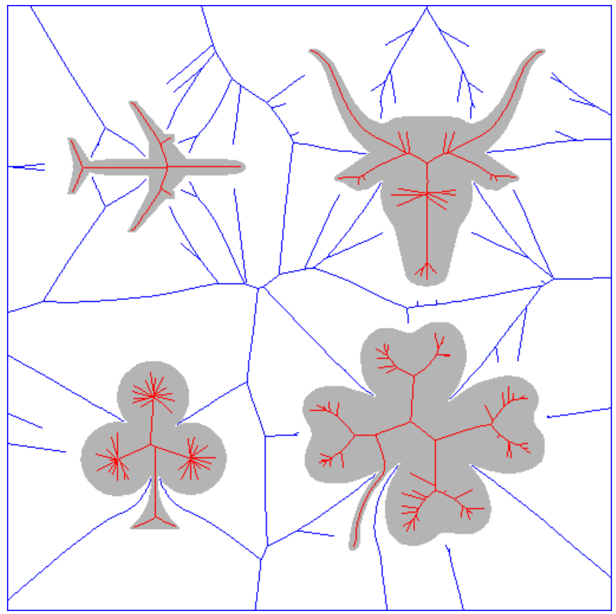
En se basant sur la distance euclidienne exacte, on pourrait construire un chemin connexe reliant A, B et C, qui aurait un (exo-)squelette déconnecté :



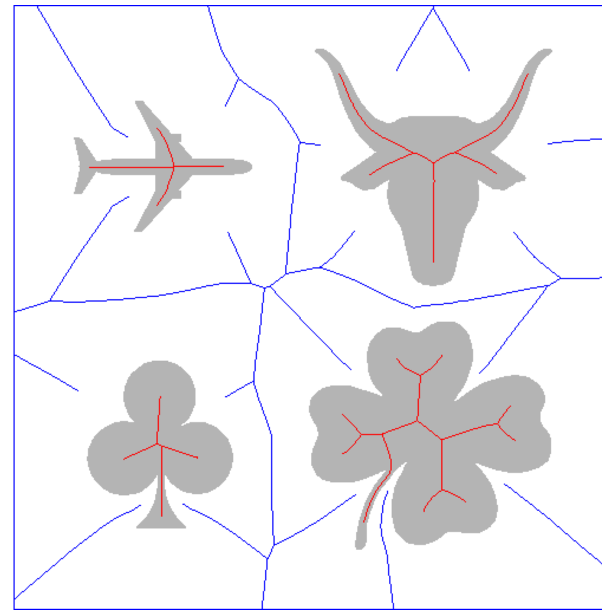
Squelettes multi-échelles



$Sk_1(X)$



$Sk_5(X)$

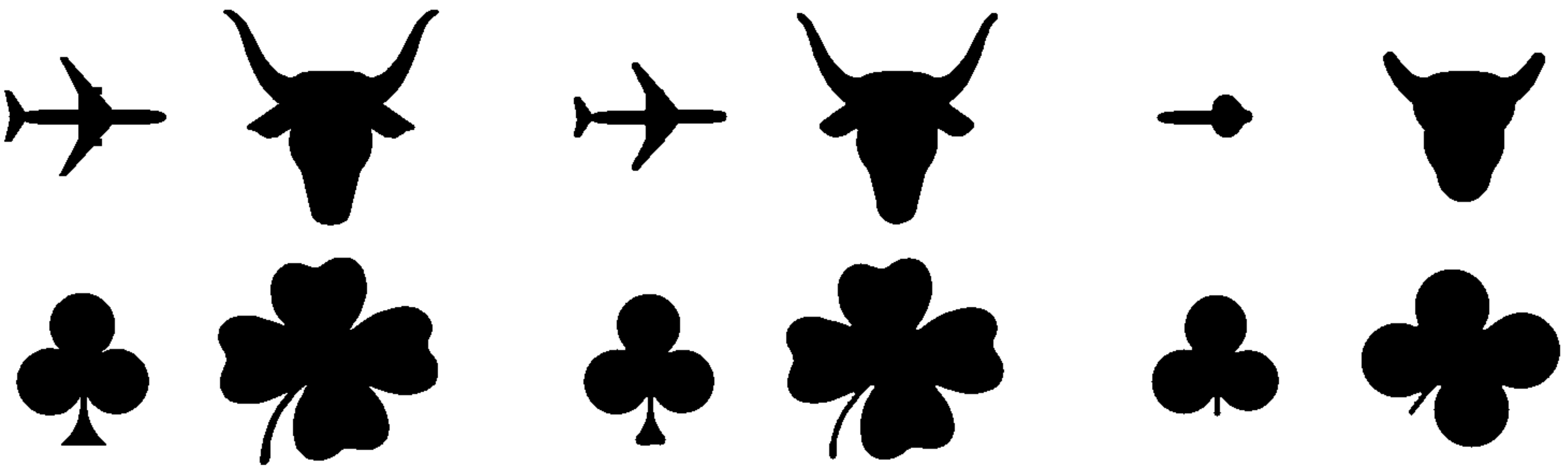


$Sk_{50}(X)$

Reconstruction multi-échelles

La reconstruction de l'image X à l'échelle σ s'obtient par la formule d'inversion du squelette :

$$R_\sigma(X) = \bigcup_{z \in Sk_\sigma(X)} B_z(F_X^d(z))$$



X $\quad$ $R_{20}(X)$ $\quad$ $R_{100}(X)$

Carte de reconstruction

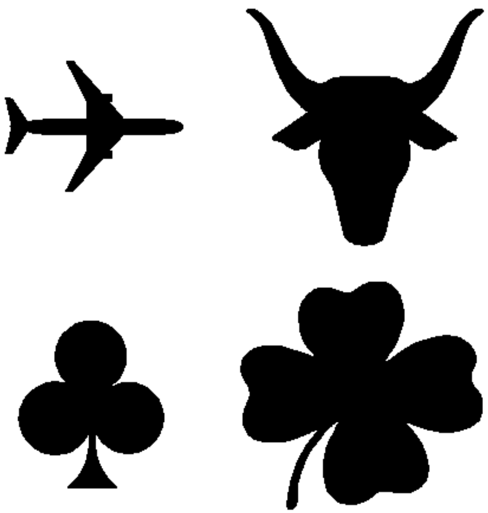
Toutes les reconstructions pour l'ensemble des échelles peuvent être obtenues rapidement à partir de la carte de reconstruction définie comme suit :

$$M_X(p) = \max_{z \in Sk_1(X);\ p \in B_z(F_X^d(z))} S_X(z)$$

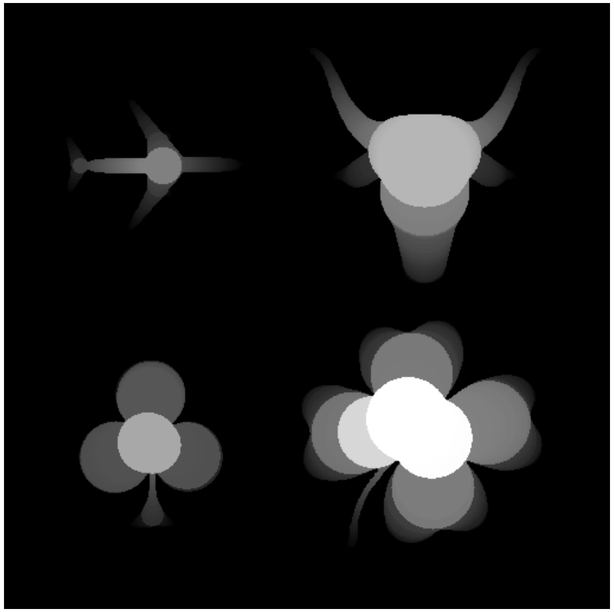
La reconstruction de l'image *X* à l'échelle σ s'obtient ensuite par seuillage de la carte de reconstruction à la valeur σ :

$$R_\sigma(X) = \{ z\ ;\ M_X(z) > \sigma \}$$

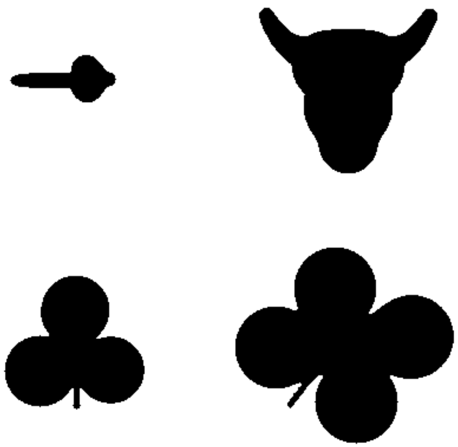
Carte de reconstruction



X



M_X



$\{z; M_X(z) > 100\}$

Squelettes morphologiques / Connexes – Conclusion

A RETENIR POUR CE COURS :

• Définition du squelette morphologique discret : Maxima Locaux de la Transformée en Distance ↔ Centres des Boules Maximales ↔ Résidus d'ouvertures

• Propriétés du squelette morphologique discret : ☺Réversible ☺Rapide ☹Non connexe

• Squelettes connexe par fonctions de choc : Connexité des zones d'influence associées à une transformée en distance

• Squelettes multi-échelles : Seuillage de la fonction de choc et reconstruction à divers degrés de détail