



Cours de morphologie mathématique



Master 2 IMA – UPMC

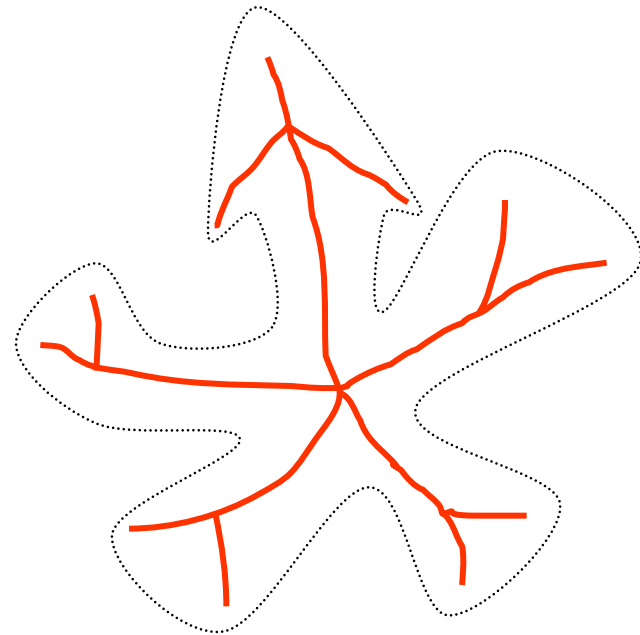
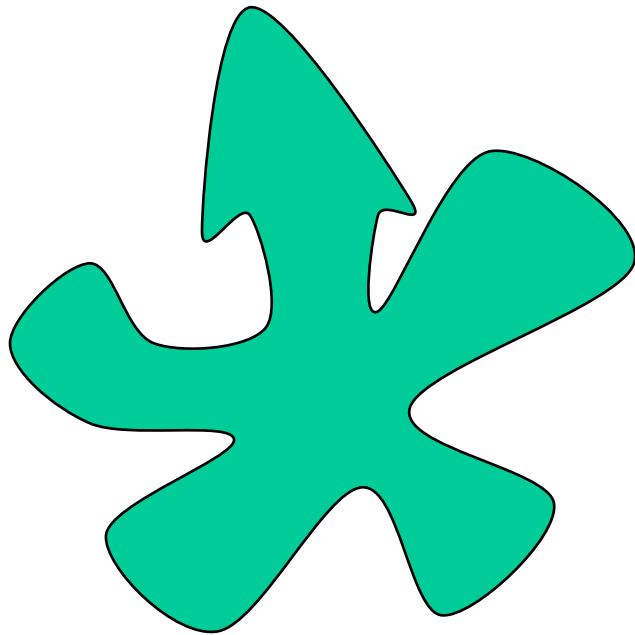
Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

Squelettes morphologiques

- Squelettes : introduction.
- Squelette morphologique euclidien.
- Squelette morphologique discret.
- Squelette et résidus.
- Squelettes connexes : Squelettes euclidiens multi-échelles (démonstration).

Squelettes : motivations

L'objectif de la squelettisation est de représenter un ensemble avec un minimum d'information, sous une forme qui soit à la fois simple à extraire et commode à manipuler.

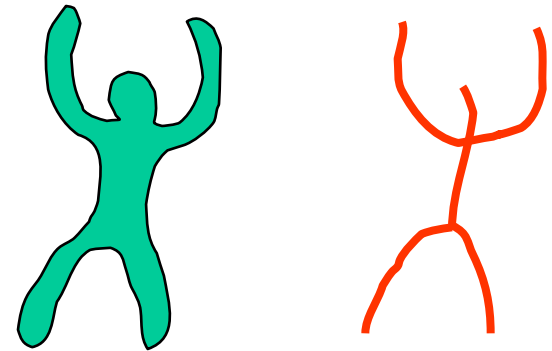


Remarque : Pour les squelettes, on se limitera dans le cadre de ce cours au cas des ensembles bidimensionnels (images binaires 2D), bien que certaines notions s'appliquent également aux dimensions supérieures.

Squelettes : propriétés recherchées (1)

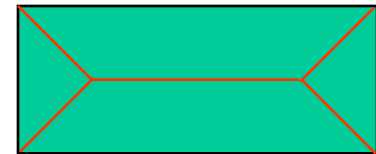
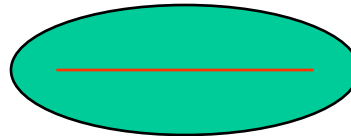
Préservation de la géométrie

Le squelette doit rendre compte des propriétés géométriques de la forme : ramifications, parties allongées...



Épaisseur nulle

Le squelette doit être constitué de courbes sans épaisseur.



Préservation de la topologie

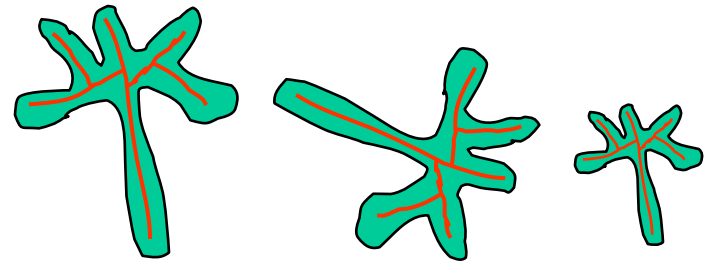
Le squelette doit conserver les relations de connexité : même nombre de composantes connexes, même nombre de trous par composante connexe.



Squelettes : propriétés recherchées (2)

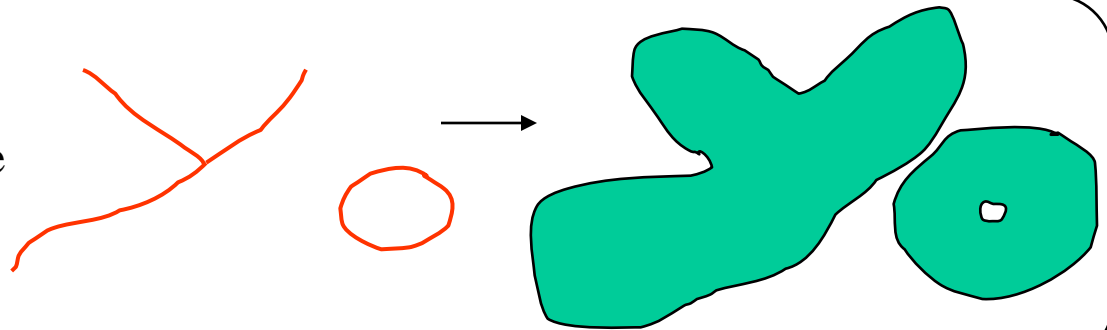
Invariance aux transformations affines

Le squelette doit commuter avec la translation, la rotation et l'homothétie



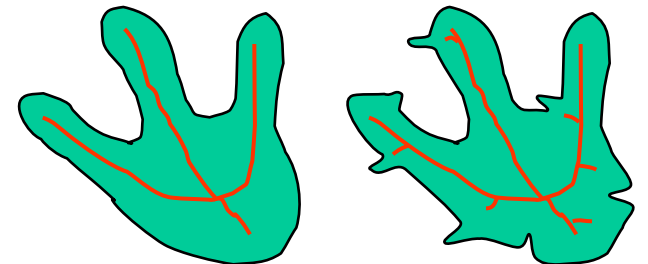
Réversibilité

Le squelette doit permettre de retrouver la forme originale



Continuité

Une petite modification de la forme originale doit induire une petite modification du squelette



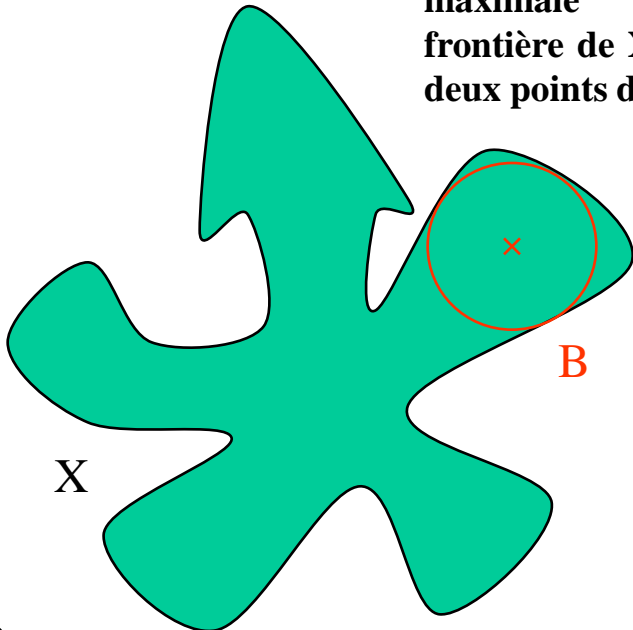
Squelette morphologique

Le squelette morphologique est fondée sur la notion d'axe médian (Blum 67). Il utilise la notion de boule maximale :

Une boule B est dite maximale dans X si :

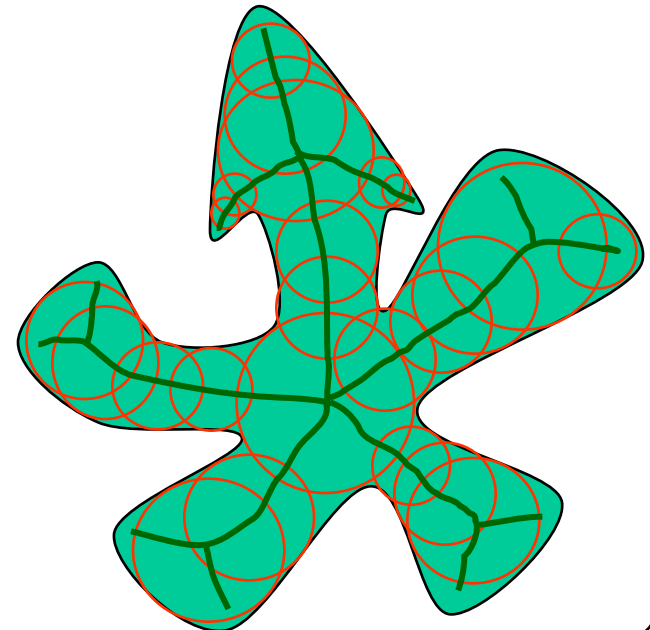
$$B \subset B' \subset X \Rightarrow B' = B$$

Propriété : une boule maximale touche la frontière de X en au moins deux points distincts



Le squelette morphologique (euclidien) est la réunion des centres de boules (euclidiennes) maximales :

$$S(X) = \bigcup_{\rho \geq 0} \{ x \in \mathbf{R}^2; B(x, \rho) \text{ est maximale dans } X \}$$



Propriétés du squelette morphologique (1)

De par sa définition, le squelette morphologique euclidien respecte la géométrie de la forme originale, et il est invariant par homothétie. Il possède de plus les propriétés suivantes :

- Il est sans épaisseur (d'intérieur vide).

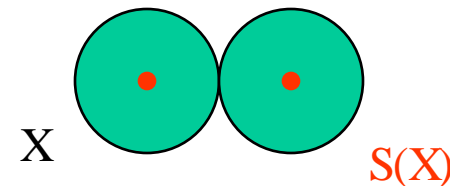
- Il est anti-extensif et idempotent :

$$S(X) \subset X$$

$$S(S(X)) = S(X)$$

- Si X est ouvert, alors X et $S(X)$ ont la même topologie.

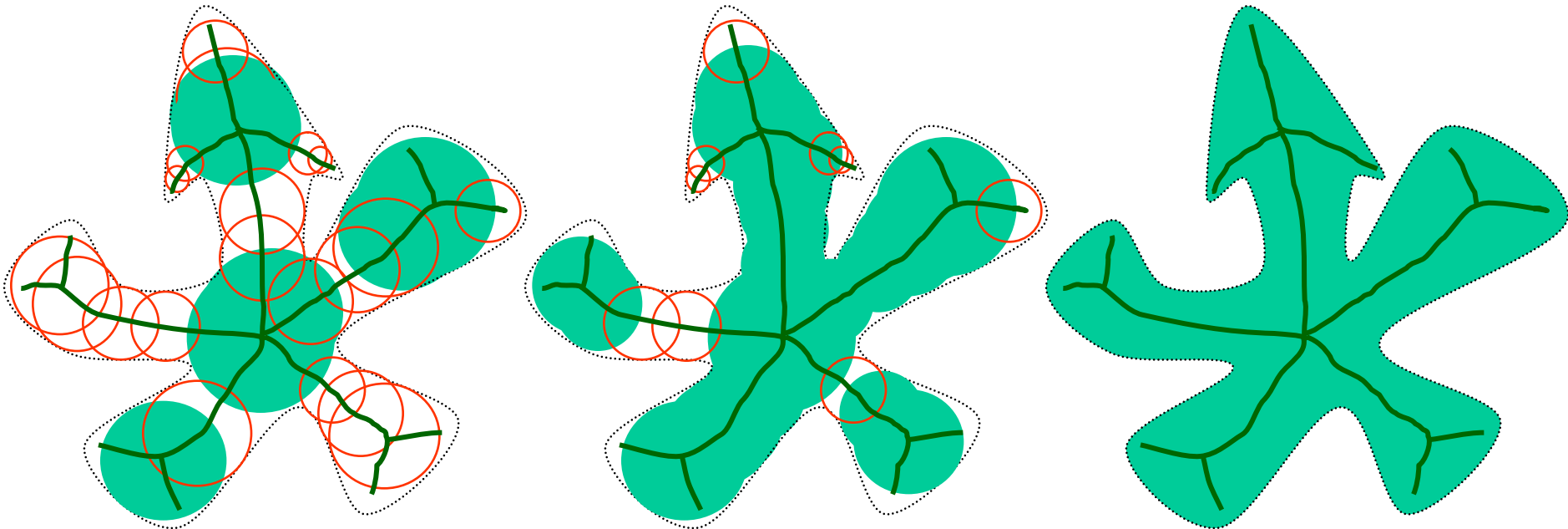
Contre-exemple :



Propriétés du squelette morphologique (2)

Réversibilité :

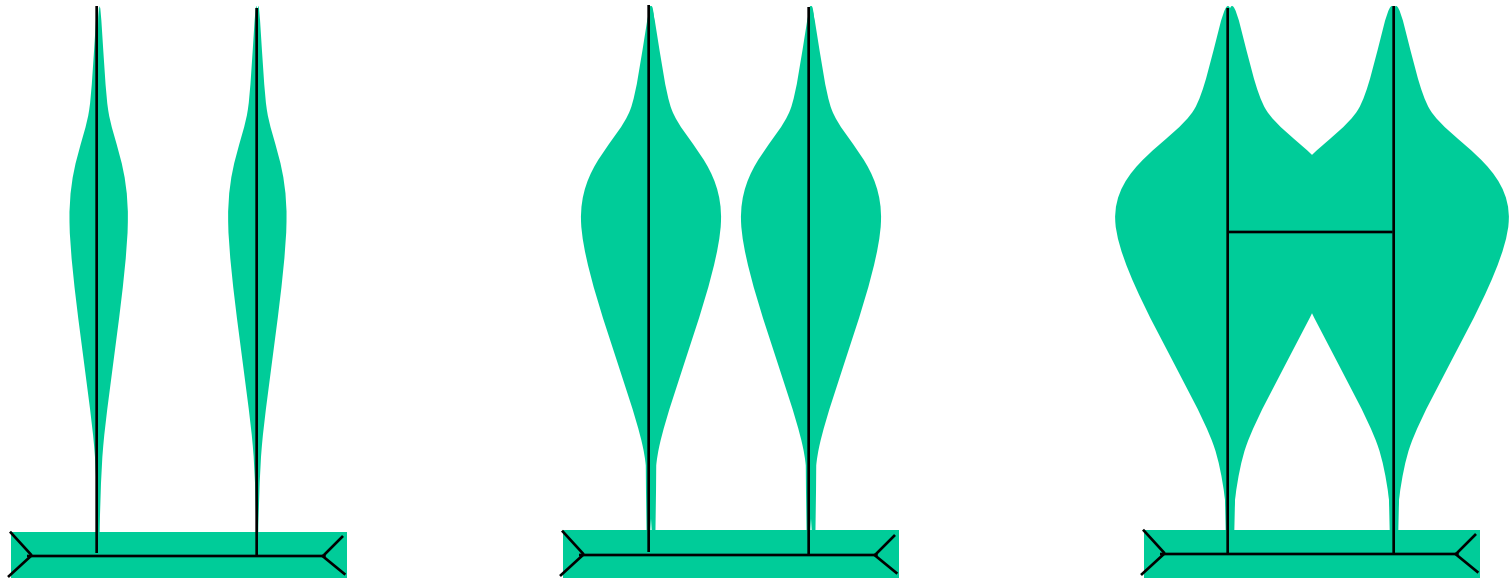
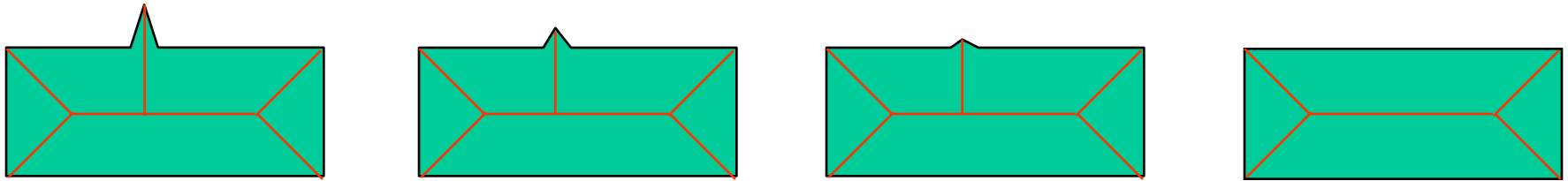
La donnée de la transformée en distance euclidienne de X sur $S(X)$ permet de reconstruire exactement X :



Propriétés du squelette morphologique (3)

Non-continuité :

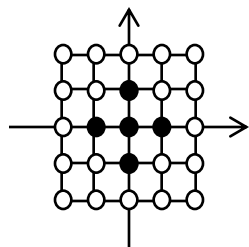
Le squelette morphologique euclidien n'est pas une transformation continue :



Squelette morphologique : passage au discret

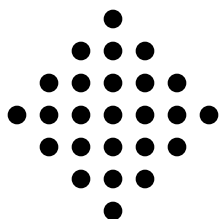
Dans le cas discret, les boules maximales sont les boules d'une distance discrète donnée

Exemples :

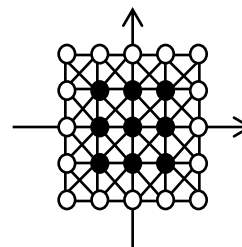


voisinage élémentaire
de l'origine

Distance d_4

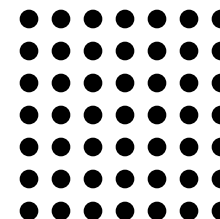


boule de rayon 3



voisinage élémentaire
de l'origine

Distance d_8



boule de rayon 3

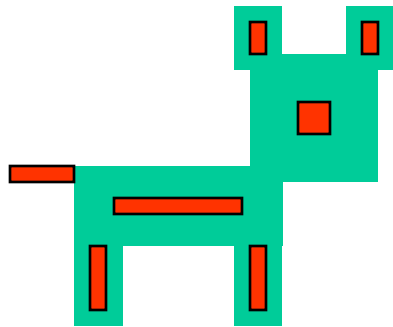
PROPRIÉTÉ

Un point x est centre d'une boule maximale de rayon r dans X si et seulement si il appartient à l'érodé de X par une boule de taille r , mais pas à l'ouvert de cet érodé par la boule élémentaire :

$$S_r(X) = \left\{ x \in \mathbf{Z}^2; B(x, r) \text{ est maximale dans } X \right\} \\ = \mathcal{E}_{B(0,r)}(X) \setminus \gamma_{B(0,1)}(\mathcal{E}_{B(0,r)}(X))$$

Squelette morphologique : passage au discret

Par conséquent, le squelette morphologique est égal à l'union des résidus d'ouverture des érodés successifs de la forme originale :

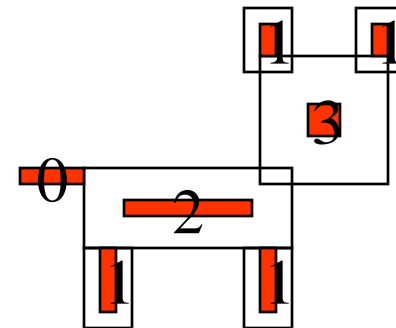


$$\begin{aligned}
 S(X) &= \bigcup_{r \in \mathbb{N}} S_r(X) \\
 &= \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \varepsilon_{B(0,r)}(X) \setminus \gamma_{B(0,1)}(\varepsilon_{B(0,r)}(X))
 \end{aligned}$$

Lantuéjoul 78

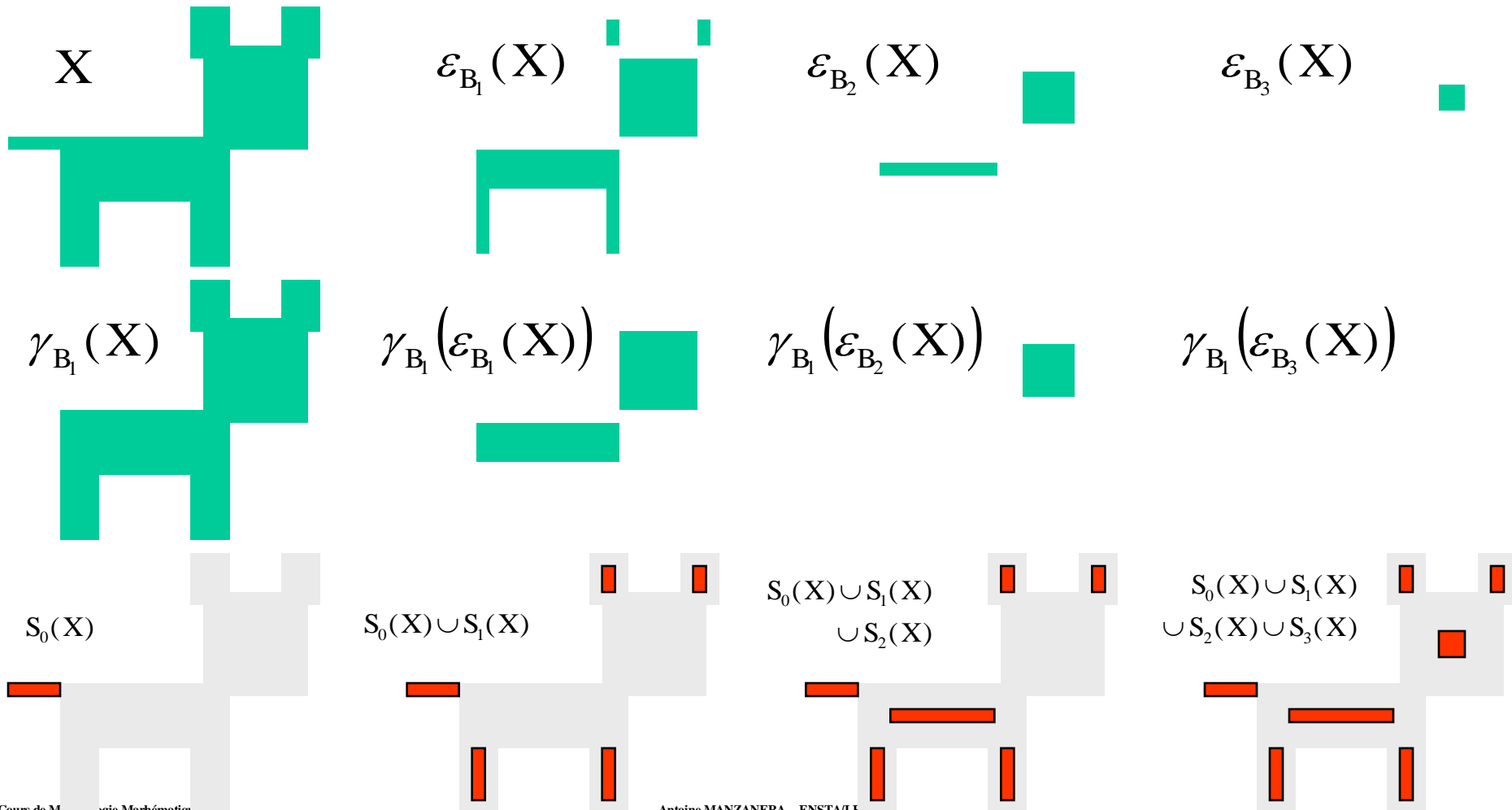
Formule d'inversion du squelette morphologique :

$$X = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \delta_{B(0,r)}(S_r(X))$$



Squelette morphologique : passage au discret

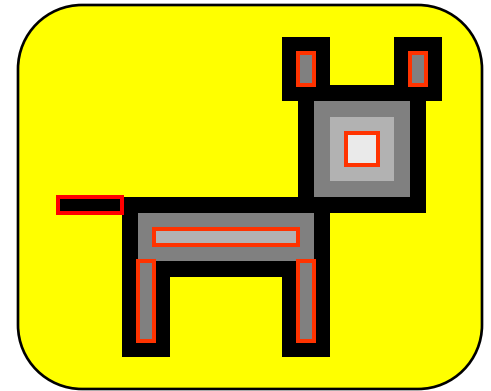
La formule de Lantuéjoul fournit un moyen explicite de calculer le squelette morphologique :



Squelette morphologique : passage au discret

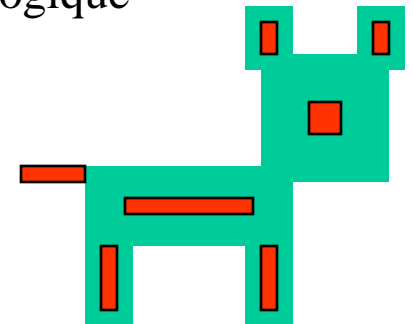
Comme l'ensemble des résidus d'ouverture coïncide avec l'ensemble des maxima locaux de la transformée en distance, le squelette morphologique discret est égal aux maxima locaux de la transformée en distance :

$$S(X) = \{x \in X; \forall y, \delta(x, y) = 1 \Rightarrow \delta(y, X^c) \leq \delta(x, X^c)\}$$



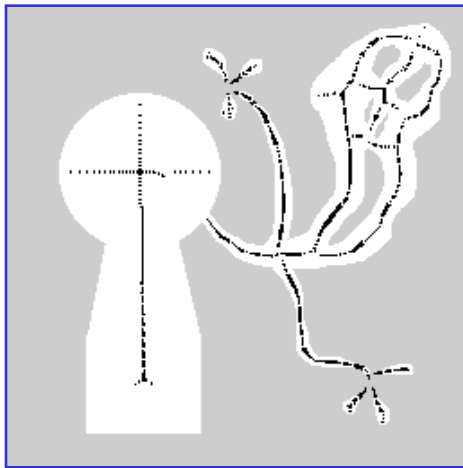
Contrairement au cas continu, le squelette morphologique ne préserve pas la topologie de la forme originale :

Les algorithmes de squelettisation connexe traitent donc le problème de préservation de la topologie directement dans le cadre discret.



Squelette morphologique / Erodés ultimes

REMARQUE : Noter les parallèles entre le squelette morphologique et les érodés ultimes :



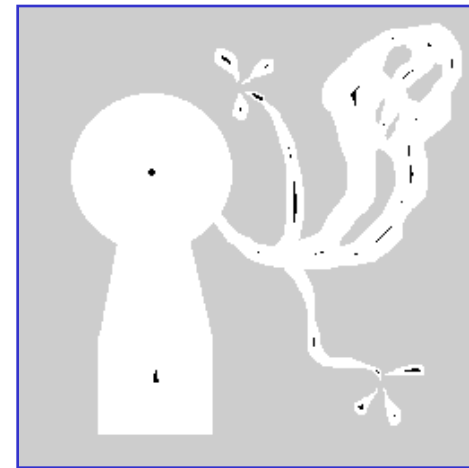
Squelette morphologique

||

Maxima locaux de la transformée en distance

||

Résidus d'ouverture



Erodés ultimes

||

Maxima régionaux de la transformée en distance

||

Résidus d'ouverture par reconstruction



Les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) x est un résidu d'ouverture de X

$$\exists n \in \mathbb{N} \ / \ x \in (X \ominus B_n) \text{ et } x \notin \gamma_{B_1}(X \ominus B_n)$$

(2) x est un maximum local de la fonction distance dans X

$$\forall y \ \delta(x, y) = 1 : \delta(y, X^c) \leq \delta(x, X^c)$$

(3) x est centre d'une boule maximum dans X

$$\exists n \in \mathbb{N} \ / \ B(x, n) \subset B(y, m) \subset X \Rightarrow (y, m) = (x, n)$$

$$(1) \Leftrightarrow (2)$$

x est un résidu d'ouverture de X

$$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} / x \in (X \ominus B_n) \text{ et } x \notin \gamma_{B_1}(X \ominus B_n)$$

$$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} / x \in (X \ominus B_n) \text{ et } x \notin [(X \ominus B_n) \ominus B_1] \oplus B_1$$

$$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} / x \in (X \ominus B_n) \text{ et } x \notin [(X \ominus B_{n+1}) \oplus B_1]$$

$$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} / x \in (X \ominus B_n) \text{ et } \forall y, \delta(x, y) = 1 : y \notin (X \ominus B_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} / \delta(x, X^c) \geq n \text{ et } \forall y, \delta(x, y) = 1 : \delta(y, X^c) < n + 1$$

soit x est un maximum local de la fonction distance dans X

(3) \Rightarrow (2)

x est un centre de boule maximum dans X

alors $\delta(x, X^c) = n$

Supposons $\exists y, \delta(x, y) = 1$ et $\delta(y, X^c) > n$

Mais dans ce cas $\exists p, B(x, n) \subset B(y, p) \subset X$

ce qui contredit l'hypothèse

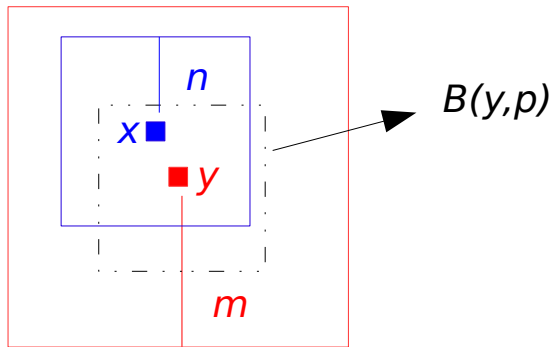
donc x est un maximum local de la fonction distance dans X

(2) \Rightarrow (3)

Soit x un maximum local de la fonction distance dans X

Soit $B(x,n)$ la plus grosse boule de centre x contenue dans X

Supposons $\exists(y,m) \mid (y,m) \neq (x,n)$ et $B(x,n) \subset B(y,m) \subset X$ nota : $m < n$



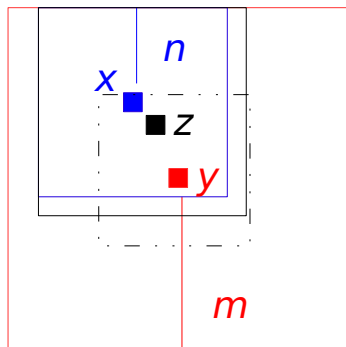
Considérons alors : $B(y,p) = B(y,m) \ominus B_n$

$x \in B(y,p)$ puisque $B(x,n) \subset B(y,m)$

mais : $x \notin (B(y,p) \ominus B_1)$

car sinon : $B(x,n+1) \subset B(y,m) \subset X$

...or $B(x,n)$ est la plus grosse boule de centre x contenue dans X



Par conséquent : $\exists z, \delta(x,z) = n \mid z \in (B(y,p) \ominus B_1)$

Mais alors : $B(z,n+1) \subset B(y,m) \subset X$

et donc $\delta(z, X^c) = n+1$

ce qui contredit l'hypothèse.

donc x est un centre de boule maximum dans X