



Morphologie mathématique 2

RDMM - MR2 IMA UPMC P6

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

Morphologie Mathématique : Chapitre 2

COMPLEMENTS THEORIQUES ET PRATIQUES – FILTRAGE MORPHOLOGIQUE

I Compléments théoriques et pratiques

- (a) Fondements algébriques
- (b) Algorithmes de base
- (c) Formalisme EDP
- (d) Aspects architecturaux

II Filtrage morphologique

- (a) Filtres morphologiques
- (b) Analyse granulométrique
- (c) Filtres alternés séquentiels

Traitement d'images linéaire : structure fondamentale

Dans le cas du traitement d'images linéaire, la structure fondamentale est celle d'*espace vectoriel*.

structure
de base

ESPACE VECTORIEL

E espace vectoriel sur K

opérateurs
de base

Ce sont ceux qui préservent la structure et commutent avec les lois de base :

$$\forall \lambda \in K, \forall (x, y) \in E^2: f(\lambda x) = \lambda f(x) \text{ et } f(x + y) = f(x) + f(y)$$

isomorphismes d'espace vectoriel

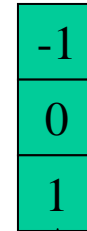
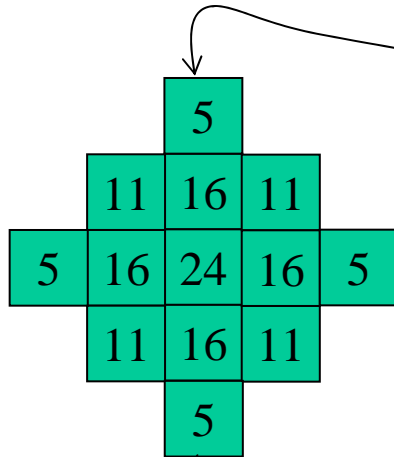


Applications linéaires

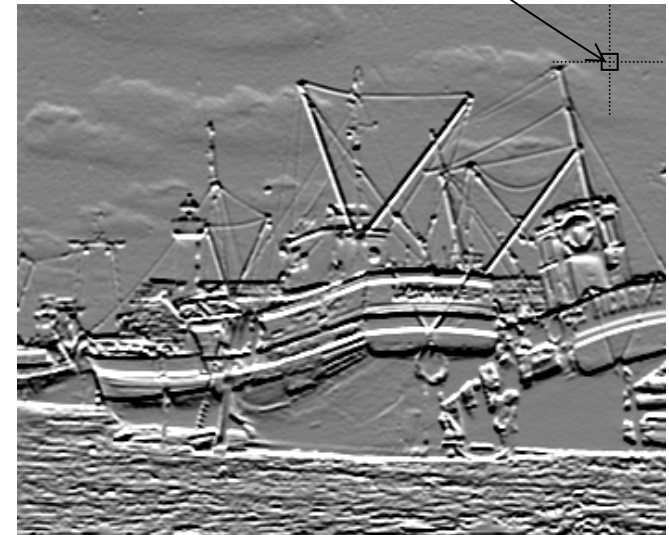


CONVOLUTIONS

Traitement linéaire : convolutions



Filtre passe-bas



Gradient vertical

Morphologie mathématique : structure fondamentale

Dans le cas de la morphologie mathématique, la structure fondamentale est celle de *treillis complet*.

structure
de base

TREILLIS COMPLET

(1) Ensemble ordonné (E, \leq)

$$\leq \begin{cases} \text{REFLEXIVE} & x \leq x \\ \text{ANTI-SYMETRIQUE} & x \leq y \text{ et } y \leq x \Rightarrow x = y \\ \text{TRANSITIVE} & x \leq y \text{ et } y \leq z \Rightarrow x \leq z \end{cases}$$

(2) Toute partie P de E admet : $\begin{cases} \bullet \text{ une borne sup} \\ \bullet \text{ une borne inf} \end{cases}$

Sup : plus petit des majorants $\vee P$

Inf : plus grand des minorants $\wedge P$

Morphologie mathématique : opérateurs de base

opérateurs
de base

Ceux qui préservent la structure...

$$x \leq y \Rightarrow \Phi(x) \leq \Phi(y)$$

CROISSANCE

...et commutent avec les lois de base :

sup \longrightarrow $\Phi(\vee \{x_i\}) = \vee \{\Phi(x_i)\}$

inf \longrightarrow $\Psi(\wedge \{x_i\}) = \wedge \{\Psi(x_i)\}$

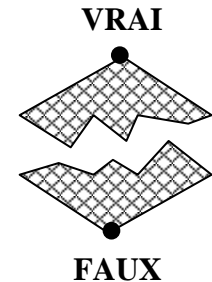
DILATATION

EROSION

Exemples de treillis complets

Treillis des formules booléennes

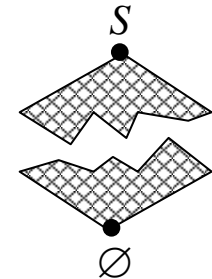
- *éléments* : formules booléennes f, g, h
- *relation d'ordre* : implication $f \rightarrow g$



- *sup* : OU logique
- *inf* : ET logique
- *éléments extrêmes* :

Treillis ensembliste

- *éléments* : les parties d'un ensemble S
- *relation d'ordre* : inclusion \subset

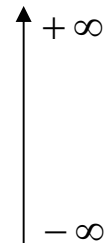


- *sup* : Union \cup
- *inf* : Intersection \cap
- *éléments extrêmes* :

Treillis des nombres

- *éléments* : nombres réels (ou nombres entiers)
- *relation d'ordre* : \leq (ordre total)

- *sup* : max
- *inf* : min
- *éléments extrêmes* :



Exemples de treillis complets

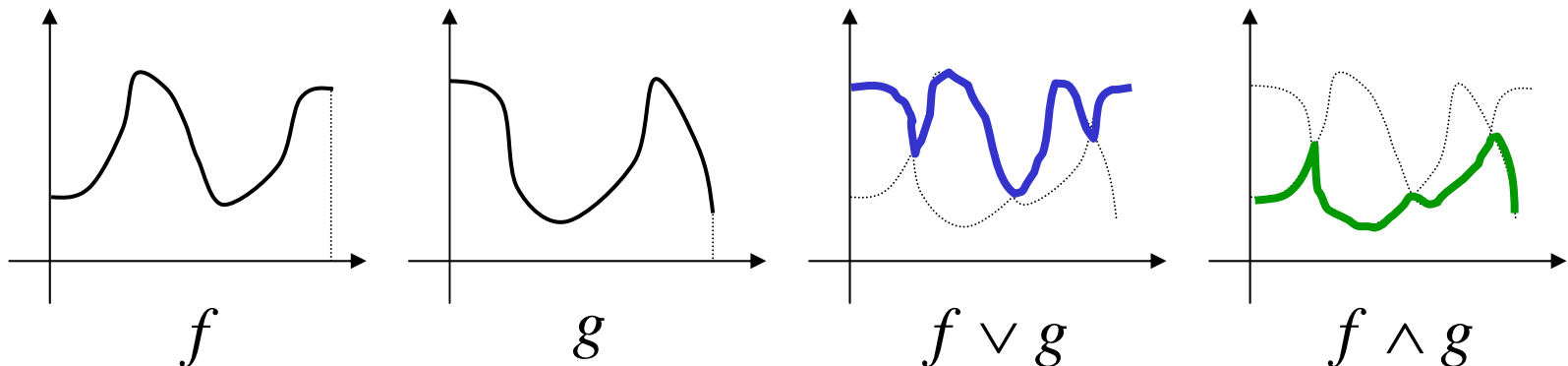
Treillis des fonctions

• *éléments* : les fonctions réelles ou numériques : $f : S \rightarrow \mathbf{R}$
ou $S \rightarrow \mathbf{Z}$

• *relation d'ordre* : $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in S, f(x) \leq g(x)$

• *sup* : $\vee \{f_i\}$
• *inf* : $\wedge \{f_i\}$

définies par :
$$\begin{cases} (\vee \{f_i\})(x) = \vee \{f_i(x)\} \\ (\wedge \{f_i\})(x) = \wedge \{f_i(x)\} \end{cases}$$



Le principe de dualité

Dans un treillis, les lois *Sup* et *Inf* jouent des rôles symétriques.

On appelle *involution* l'opérateur $\bar{\cdot} : E \rightarrow E$

qui permet d'échanger leur rôle :

$$\wedge \bar{P} = \overline{\vee P} \quad \text{et} \quad \vee \bar{P} = \overline{\wedge P}$$

On dit que deux opérateurs Φ et Φ^* sont *duaux* pour l'involution $\bar{\cdot}$.

si :

$$\boxed{\Phi(\bar{x}) = \overline{\Phi^*(x)}}$$

Exemples d'involutions

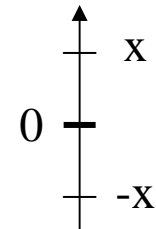
Treillis des formules booléennes

NON logique :

g	$\neg g$
0	1
1	0

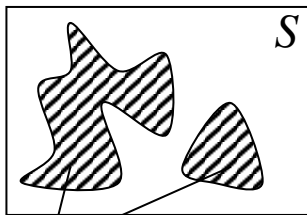
Treillis des nombres

opposé :

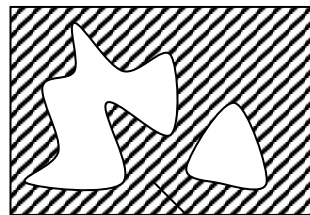


Treillis ensembliste

Complémentaire :



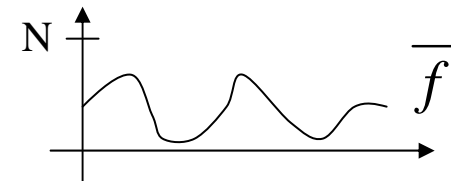
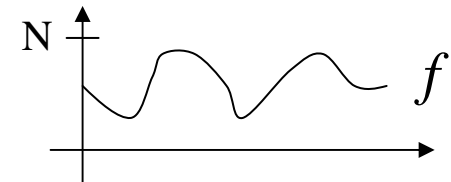
X



$X^c = S \setminus X$

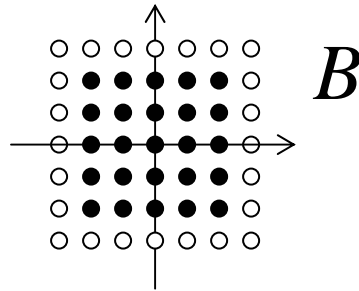
Treillis des fonctions dans $[0, N]$

$\bar{f} = N - f$:



Implantation des opérateurs de base

Ex : élément structurant carré de coté c .



Méthode triviale :

```

DILATE (Image_IN X, Image_OUT Y, Elt_struct B) {
  Pour tout pixel  $p \in X$  {
     $Y(p) = 0;$ 
    Pour tout  $b \in B$  {
       $Y(p) = Y(p) \text{ OU } X(p-b);$ 
    }
  }
}
    
```



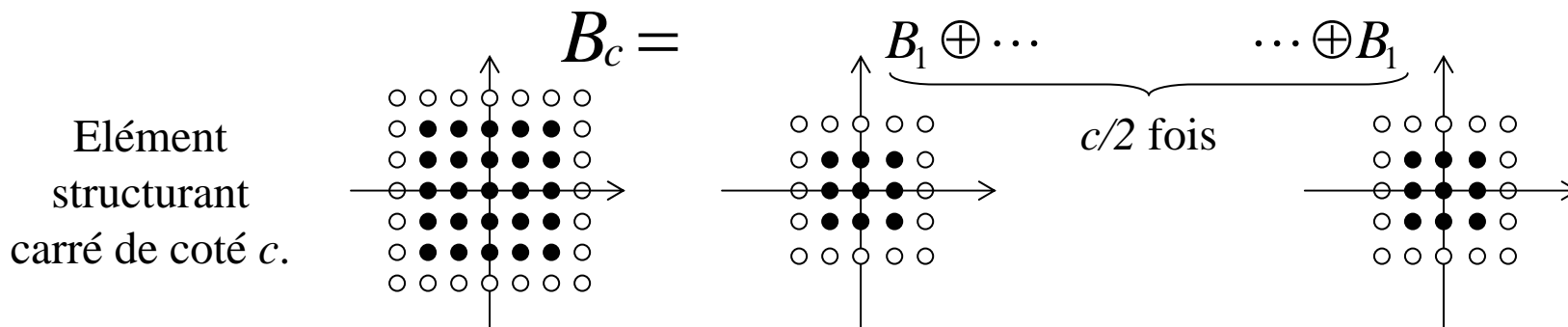
X



$\delta_B(X)$

Complexité
du calcul par
pixel : c^2

Implantation des opérateurs de base



(associativité de la dilatation)

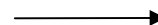
Complexité du calcul par pixel : $4c$



X



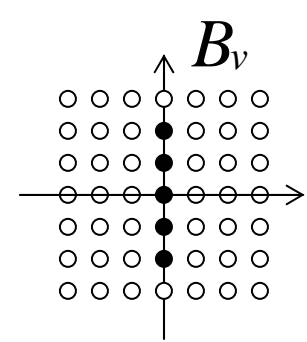
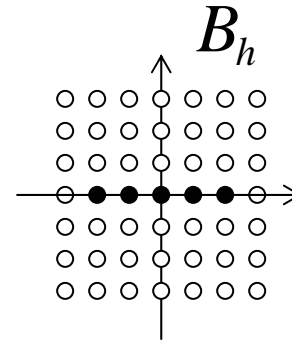
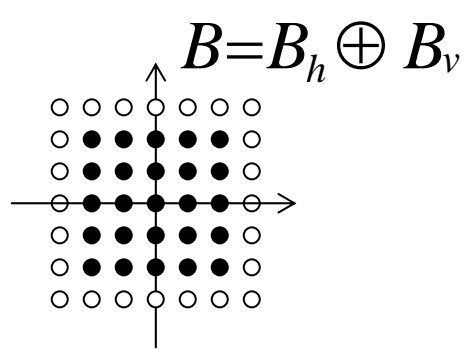
$\delta_{B_1}(X)$



$\delta_{B_1}(\delta_{B_1}(X)) = \delta_{\delta_{B_1}(B_1)}(X) = \delta_B(X)$

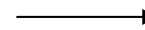
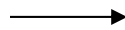
Implantation des opérateurs de base

Élément
structurant
carré de coté c .



(décomposition des polyèdres de Steiner)

Complexité du calcul par pixel : $2c$



X

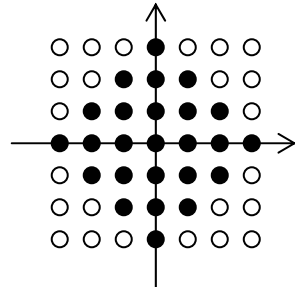
$\delta_{B_h}(X)$

$\delta_{B_v}(\delta_{B_h}(X)) = \delta_{\delta_{B_v}(B_h)}(X) = \delta_B(X)$

Erosions binaires et distances discrètes

Pour les ensembles (images binaires), dans le cas où l'élément structurant est une boule d'une distance discrète, il est avantageux de calculer l'érodé *par seuillage de la transformée en distance* :

ex :



distance de la
4-connexité

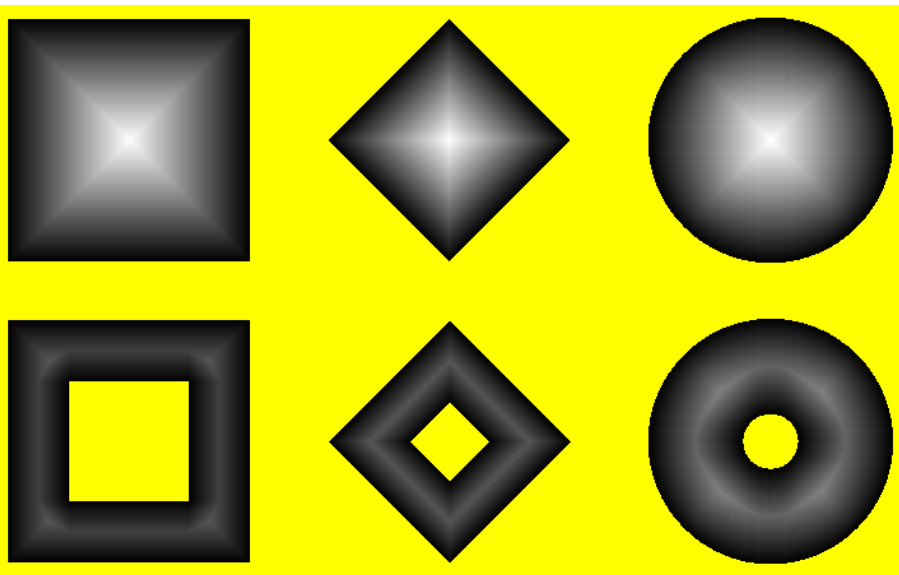
$$d_4(a, b) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$$

$$\text{en effet : } p \in \mathcal{E}_{B_\lambda}(X) \Leftrightarrow F_X^d(p) \geq \lambda$$

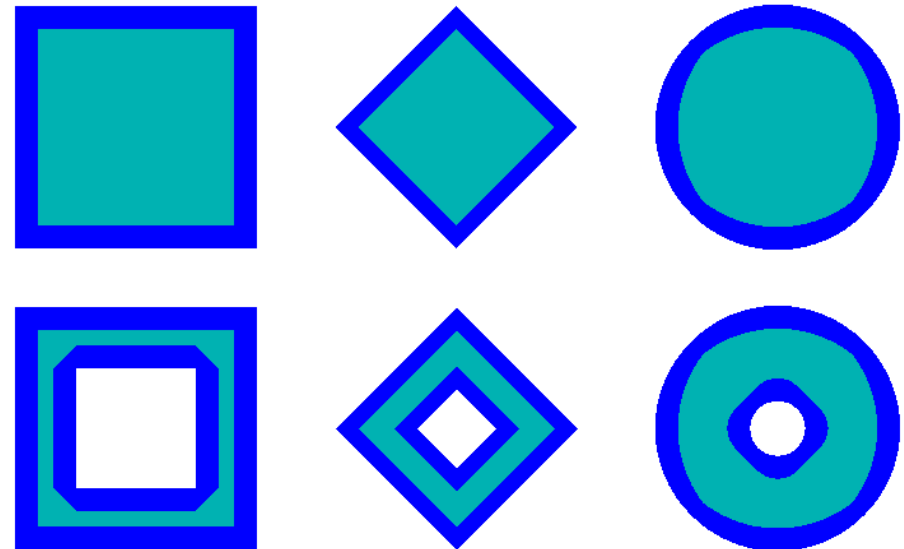
transformée en distance
 d de l'ensemble X :

$$F_X^d : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{N}$$

$$p \mapsto d(p, X^c)$$



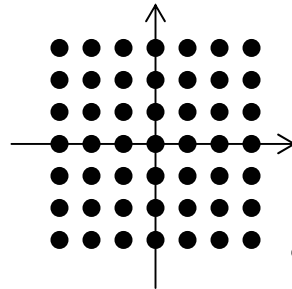
Transformée en distance d_4



Erosion par une boule de d_4

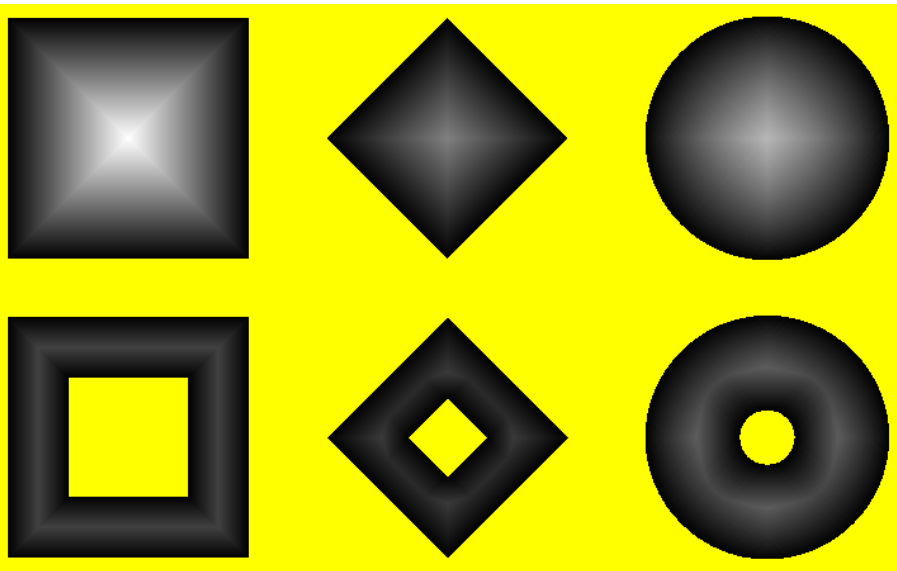
Erosions binaires et distances discrètes

ex :

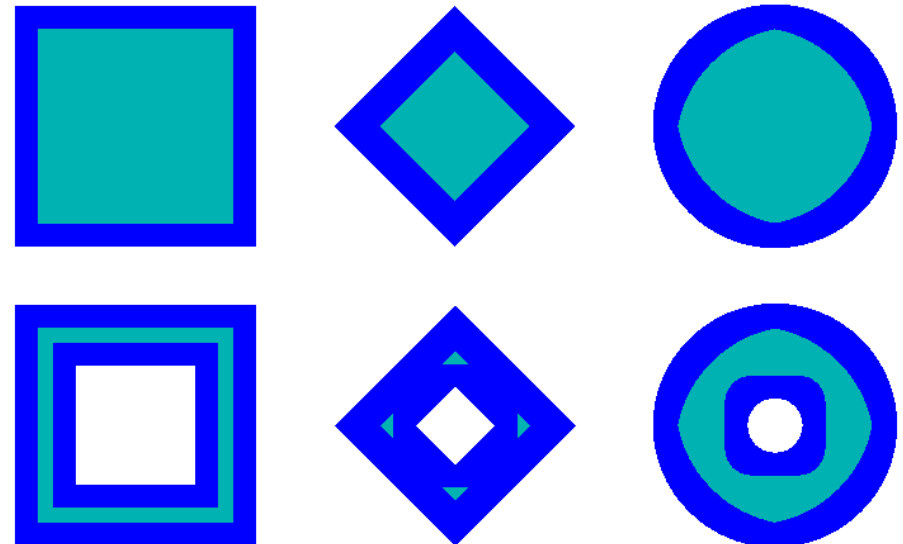


distance de la
8-connexité

$$d_8(a,b) = \max(|x_a - x_b|, |y_a - y_b|)$$



Transformée en distance d_8

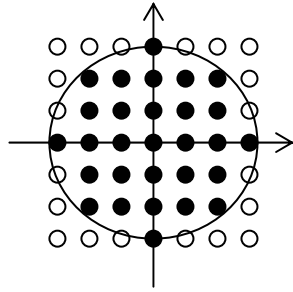


Erosion par une boule de d_8

Erosions binaires et distances discrètes

ex :

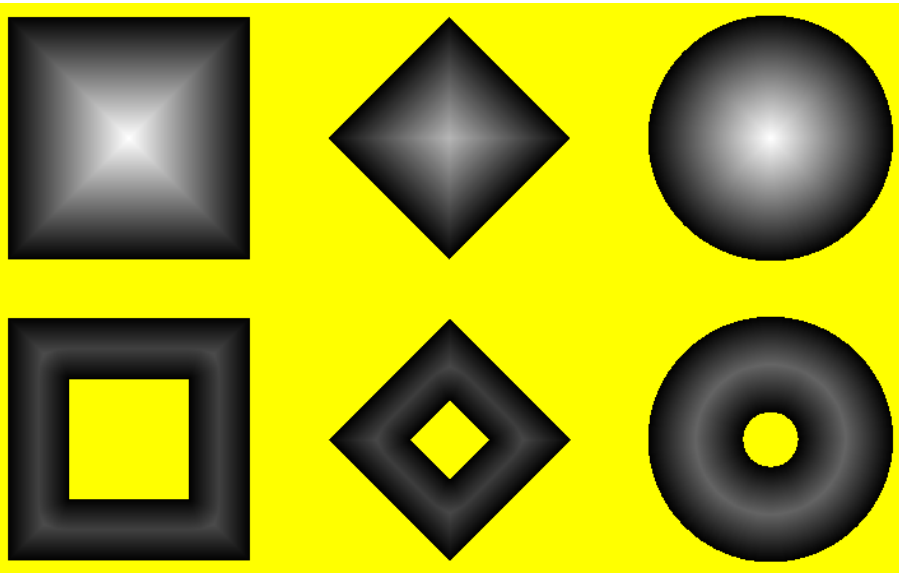
distance euclidienne (ou pseudo-euclidienne)



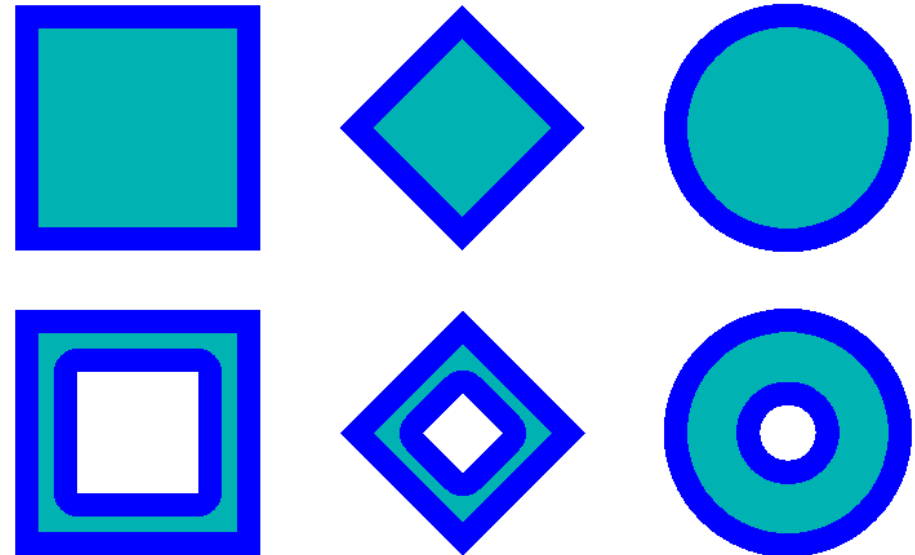
$$d_e(a, b) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

Grâce aux techniques de calcul récursif de la transformée en distance, la complexité du calcul par pixel devient constante : $(O(1))$

→ Cf TP n°1



Transformée en distance *pseudo-euclidienne*



Erosion par une boule *pseudo-euclidienne*

Opérateurs de base en niveaux de gris

L'implantation de l'érosion par calcul de la fonction distance n'est valable que pour les opérateurs ensemblistes. Existe-t-il des algorithmes pour le calcul de l'érosion en niveaux de gris, dont la complexité soit indépendante de la taille de l'élément structurant ?

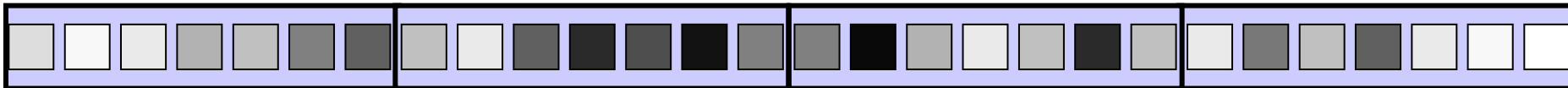
OUI ! Dans le cas d'élément structurant 1D (segment), nous détaillons ci-dessous l'algorithme de Van Herk :

Soit X une image 1D à valeurs numériques :



Soit B un segment de taille K ($K = 2p + 1$). Supposons qu'on souhaite calculer l'érosion de X par B .

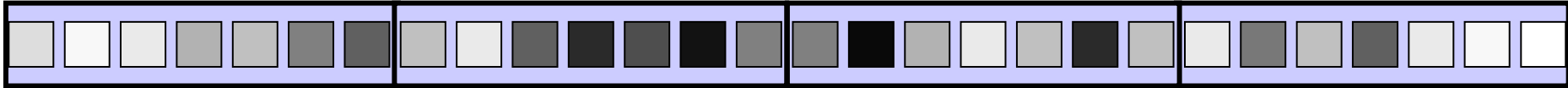
On « partitionne » X en segment de taille K :



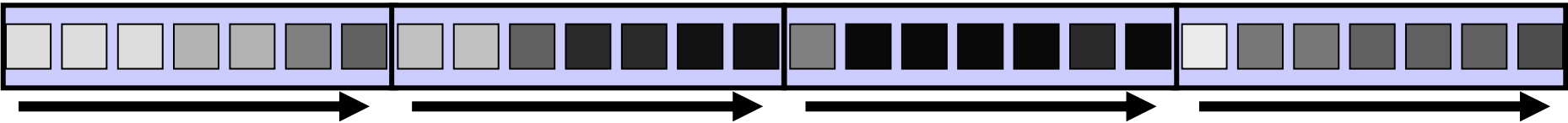
L'algorithme de Van Herk comprend 3 phases :

Van Herk / extrema récursifs par blocs

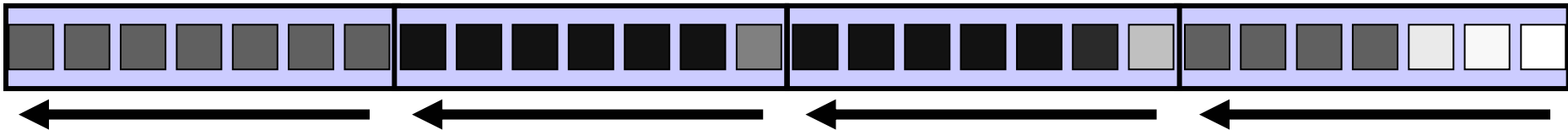
$X =$



$E_1 =$



$E_2 =$



Phase (1) :

```
for (i = 0; i < W ; i++)  
  if (i % K == 0)  
    E1[i] = X[i];  
  else  
    E1[i] = min(E1[i-1], X[i]);
```

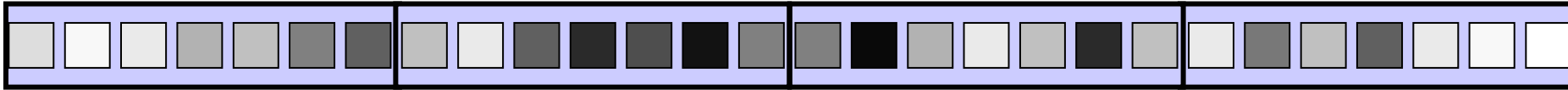
Phase (2) :

```
for (i = W-1; i > 0 ; i--)  
  if (i % K == 0)  
    E2[i] = X[i];  
  else  
    E2[i] = min(E2[i+1], X[i]);
```

Rq : les calculs de E_1 et de E_2 sont indépendants et peuvent être réalisés en parallèle.

Van Herk / Calcul érosion/dilatation

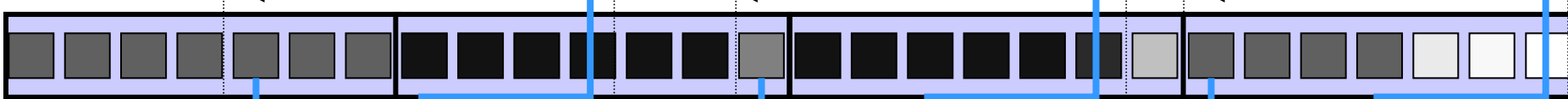
$X =$



$E_1 =$



$E_2 =$

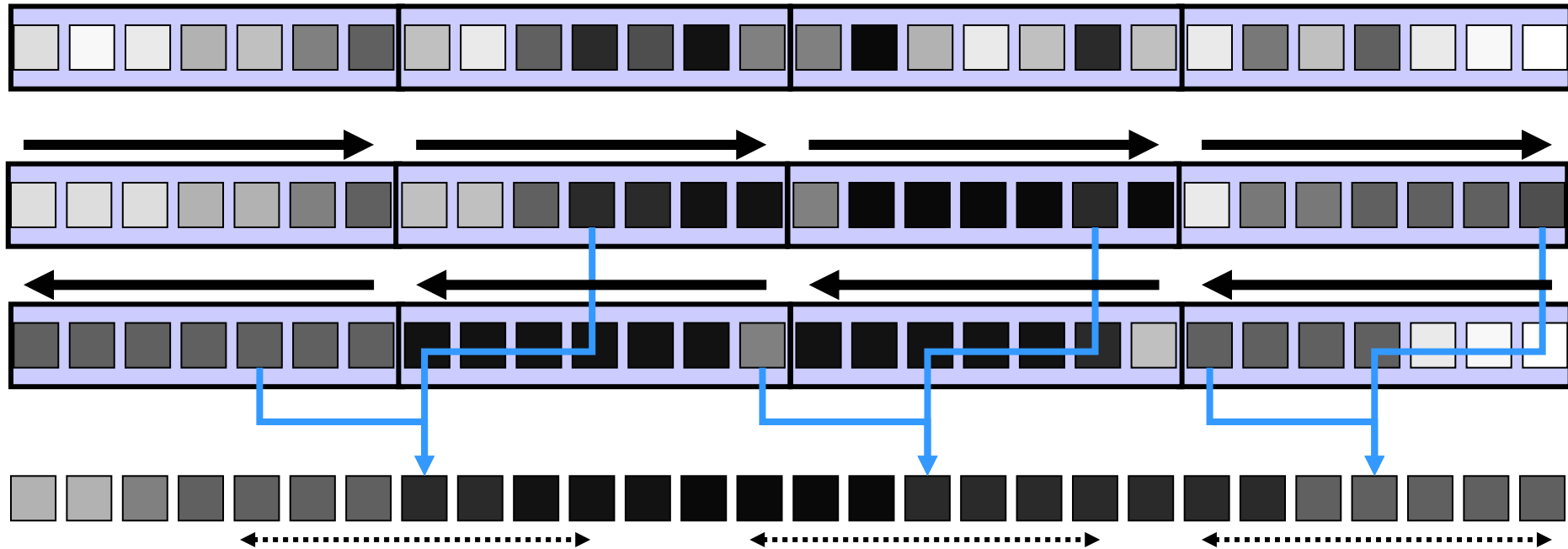


$E =$



Phase (3): for (i = 0; i < W ; i++)
 E[i] = min(E₁[i+K/2], E₂[i-K/2]);

Van Herk / Conclusion



- ❑ Complexité : 3 min/max quelque soit la longueur de l'élément structurant.
- ❑ Adapté à un calcul séquentiel, mais compatible avec un parallélisme de données.
- ❑ Adaptable à des éléments structurants rectilignes de n'importe quelle orientation.

[Van Herk 92]

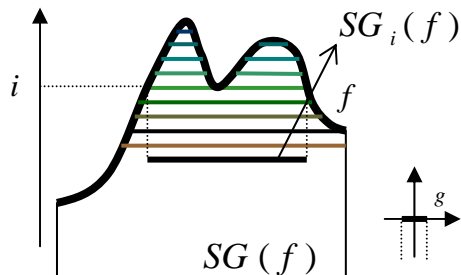
Opérations sur les ensembles de niveau

Par définition, la dilatation (resp. l'érosion) fonctionnelle par un élément structurant plan g peut être calculée à partir des dilatations (resp. érosions) des sections du sous-graphe (ensembles de niveau) par le support de g .



$$f \leftrightarrow SG(f)$$

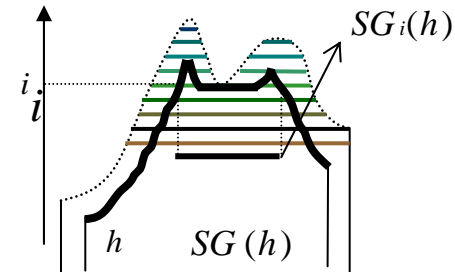
$$SG(f) = \bigcup_{i \in \mathbb{R}} SG_i(f) \times \{i\}$$



$$SG_i(f) = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \geq i\}$$

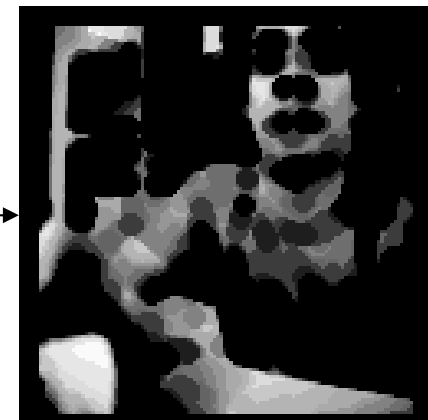


$$SG_i(h) = \mathcal{E}_{\text{supp}(g)}(SG_i(f))$$



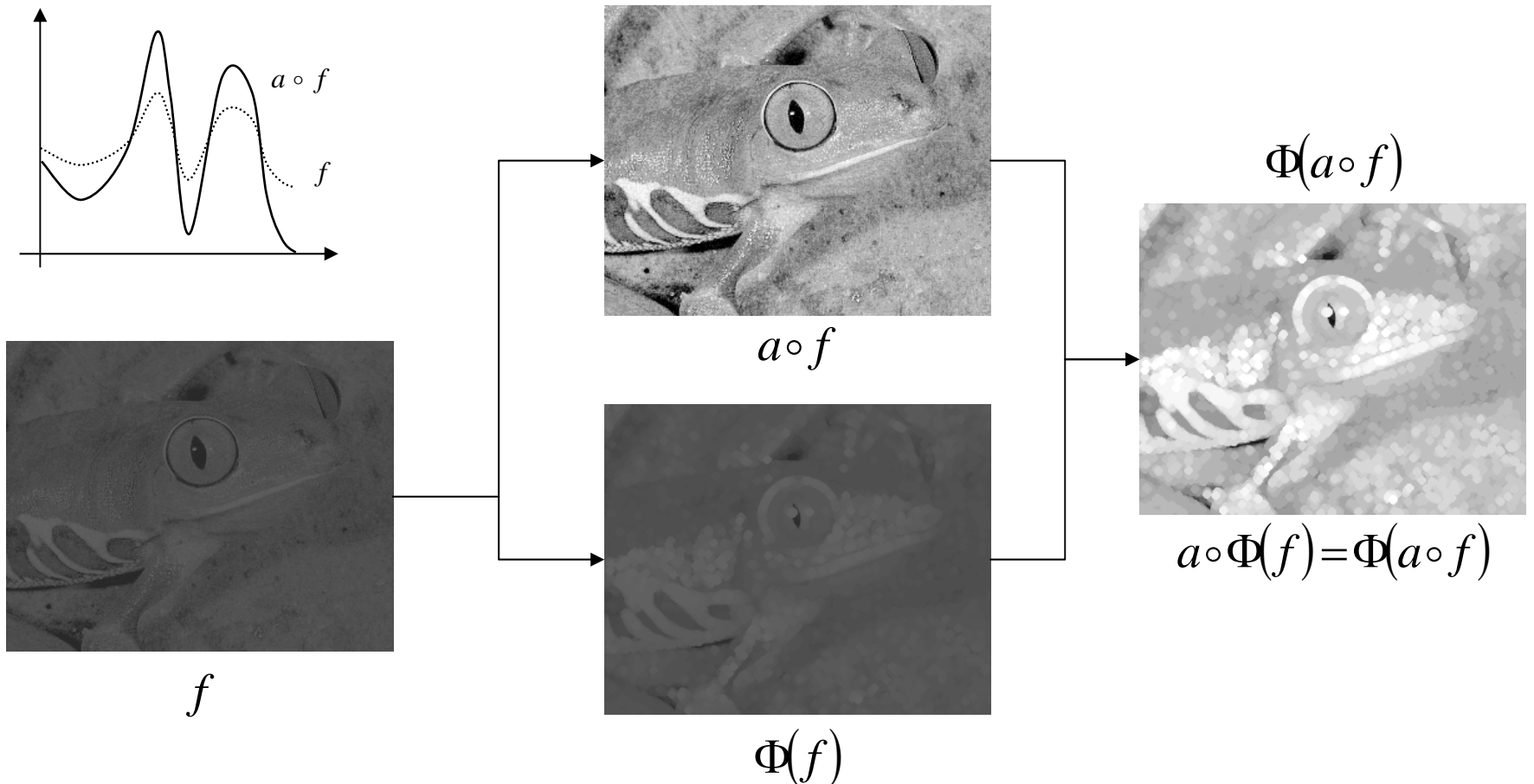
$$SG(h) = \bigcup_{i \in \mathbb{R}} SG_i(h) \times \{i\}$$

$$SG(h) \leftrightarrow h = \mathcal{E}_g(f)$$



Invariance par changement de contraste

Une conséquence de la propriété précédente est *l'invariance par changement de contraste* : les opérateurs morphologiques *commutent* avec les *anamorphoses*, c'est-à-dire les transformations croissantes des niveaux de gris :



Invariance par changement de contraste

Une transformation invariante par contraste (i.e. une transformation morphologique) doit respecter les relations d'inclusion (= ordre) des ensembles de niveau. On montre que cela correspond à un déplacement de lignes de niveau (i.e. frontière des ensembles de niveau) dans la direction de leur courbure, et proportionnellement au module du gradient. Exprimé en termes d'équations aux dérivées partielles (EDP), cela se traduit par une équation de la forme :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \|\nabla I\| G(\text{curv}(I), t)$$

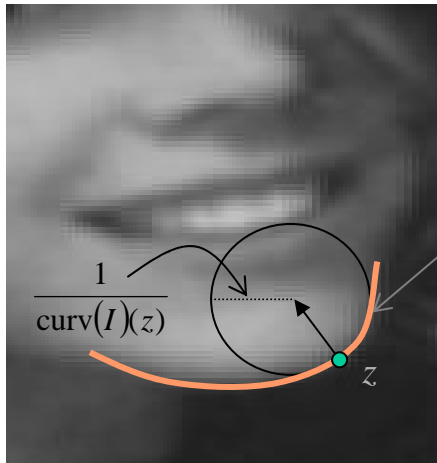
où l'on note
$$\begin{cases} I_x = \frac{\partial I}{\partial x} & I_{xx} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \\ I_y = \frac{\partial I}{\partial y} & I_{yy} = \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \end{cases} \quad I_{xy} = \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y}$$

Avec :
$$\text{curv}(I) = \text{div} \left(\frac{\nabla I}{\|\nabla I\|} \right) = \frac{I_{xx} I_y^2 - 2 I_{xy} I_x I_y + I_{yy} I_x^2}{(I_x^2 + I_y^2)^{3/2}}$$

et avec $G(x,y)$ continue et croissante par rapport à x .

Dilatation : $G(x,y) = I$;
$$\frac{\partial I}{\partial t} = \|\nabla I\|$$

Erosion : $G(x,y) = -I$;
$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\|\nabla I\|$$



courbe isophote de
valeur $I(z)$

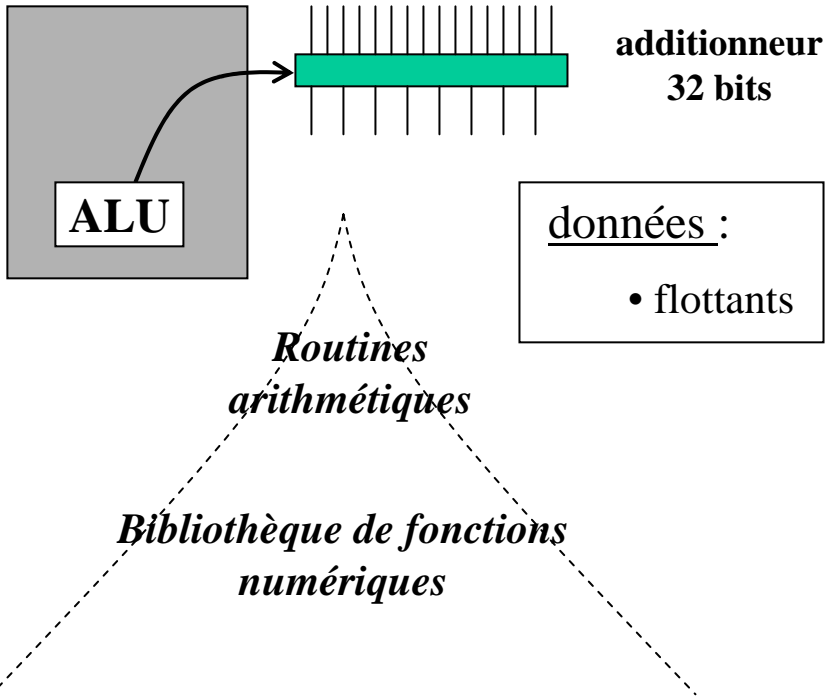
La courbure de I au point z est égale à l'inverse du rayon du cercle osculateur à la courbe isophote en z , c'est-à-dire à la courbe de niveau :

$$I^{I(z)} = \{(x,y) / I(x,y) = I(z)\}$$

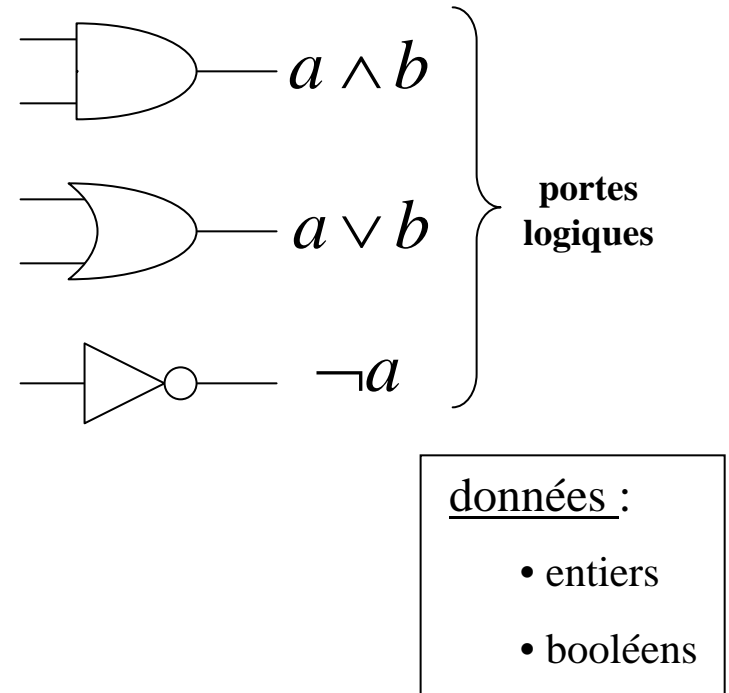
L'intérêt du formalisme EDP est de fournir un cadre rigoureux aux transformations utilisant des éléments structurants infinitésimaux, mais également de généraliser les filtres (espaces d'échelles) morphologiques (cf. Chap. 3).

Morphologie mathématique : le point de vue architectural

TRAITEMENT LINEAIRE



MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

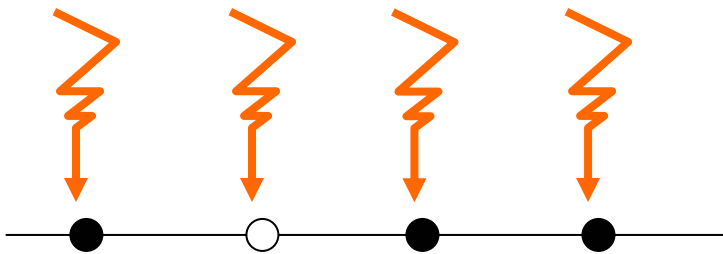
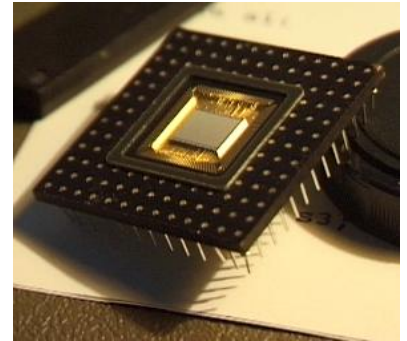


La morphologie mathématique épouse les structures les plus intimes des calculateurs numériques.

La rétine TCL

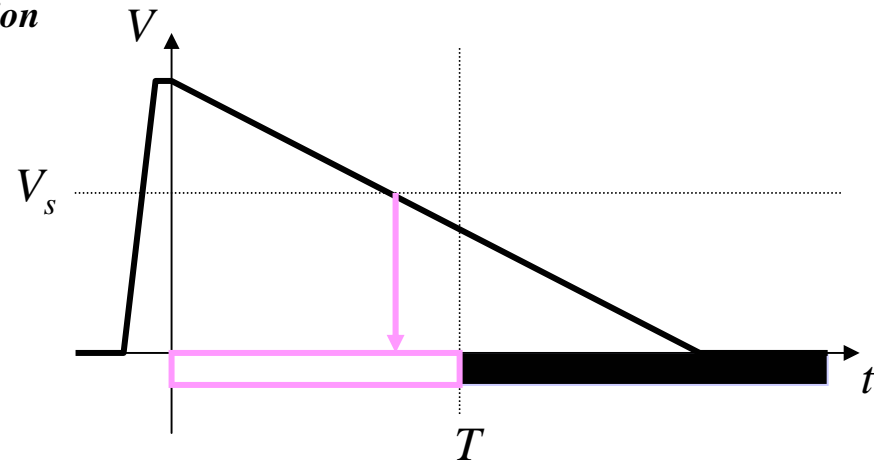
Rétine numérique : machine massivement parallèle à entrée optique

Rétine TCL (Bernard - Zavidovique - Devos 1993) : Matrice de 65x76 éléments composés d'un photocapteur et d'une "unité de calcul" de 3 bits par pixel :



*Plan
d'acquisition*

ACQUISITION
binaire :

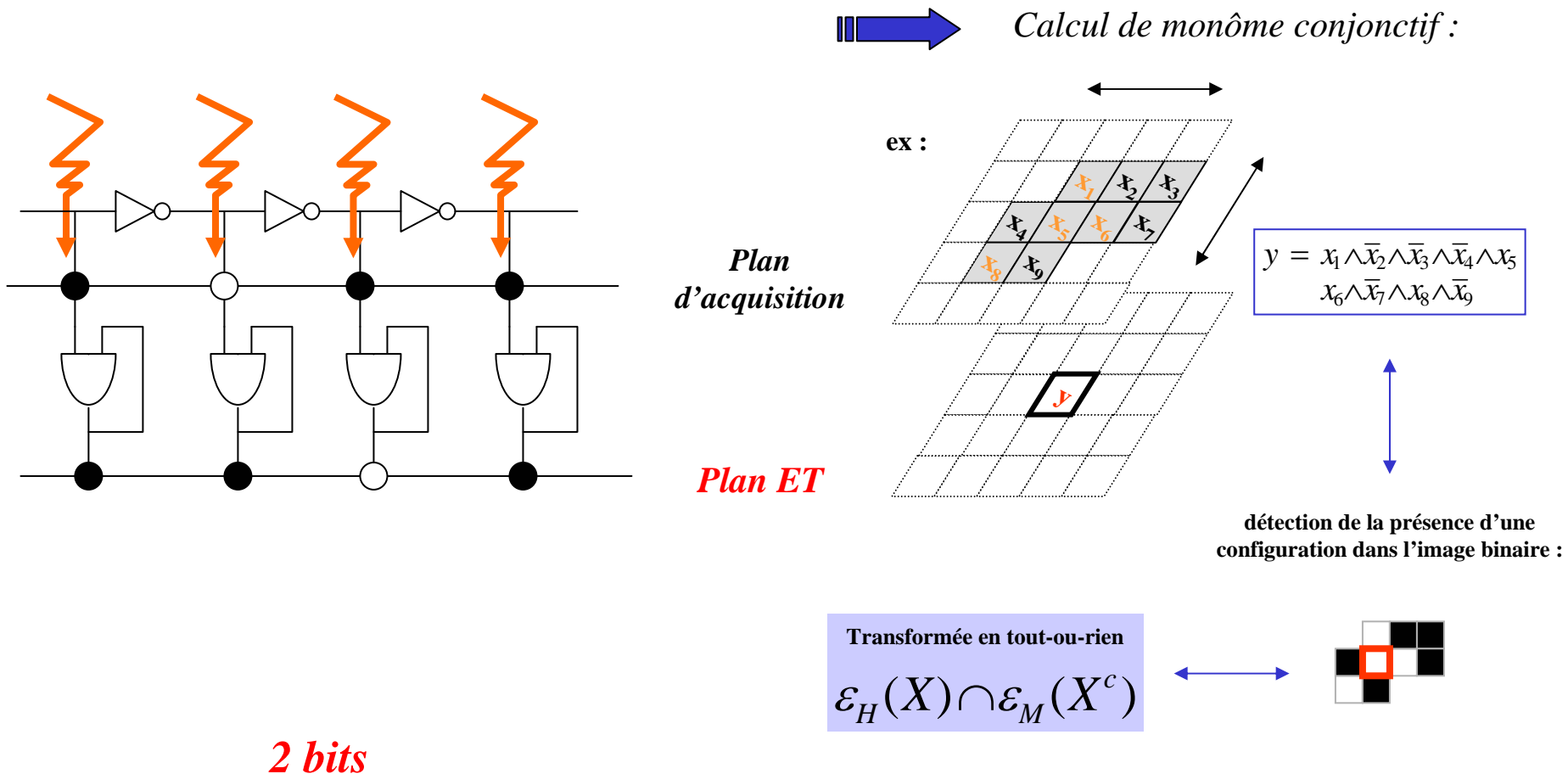


Comparaison du niveau de charge
d'une photodiode au temps T par
rapport au seuil V_s

1 bit

La rétine TCL

- Translation (éventuellement complémentation) sur le plan 1
- Calcul du ET logique sur le plan 2



La rétine TCL

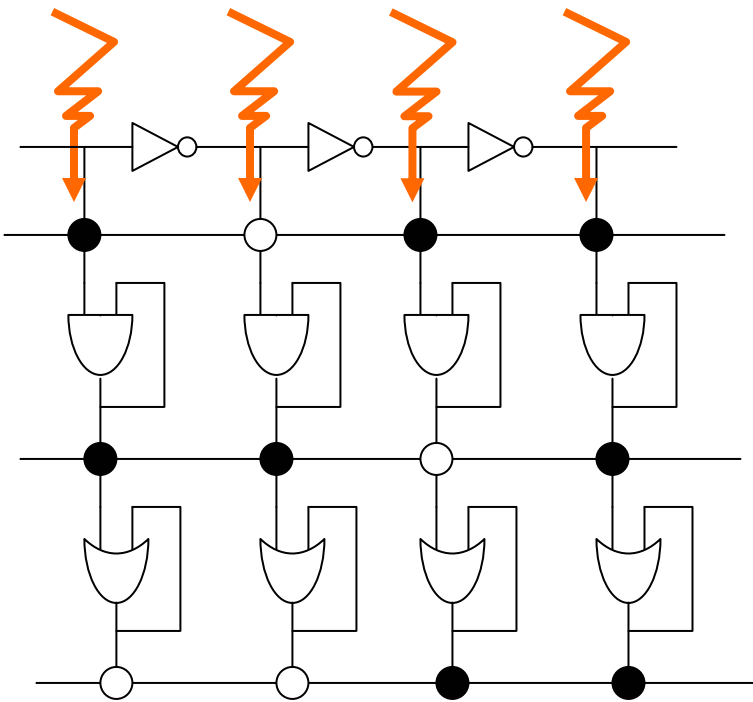
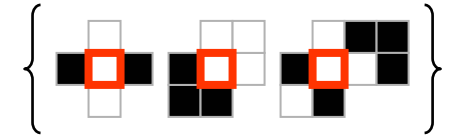
TCL = Traitement Combinatoire Local

Union de transformées
en tout-ou-rien :

$$\bigcup_i [\varepsilon_{H_i}(X) \cap \varepsilon_{M_i}(X^c)]$$



détection de la présence d'une parmi
un ensemble de configurations dans
l'image binaire :

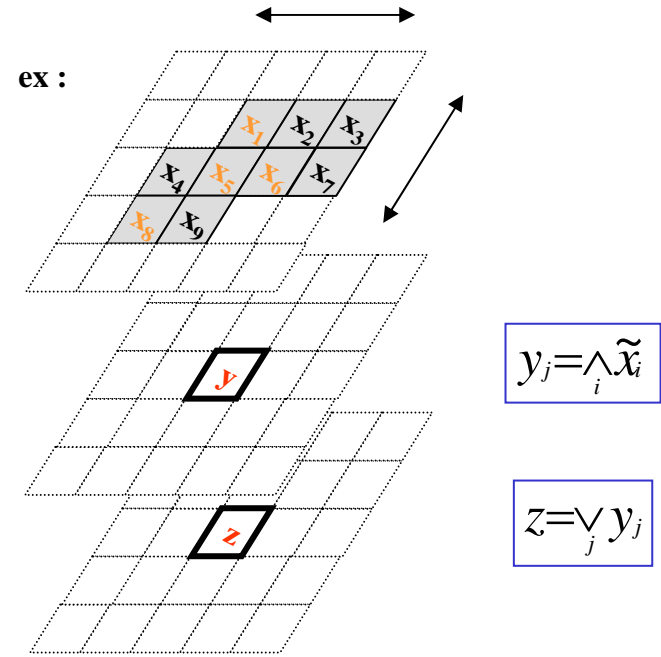


3 bits

*Plan
d'acquisition*

Plan ET

Plan OU



$$y_j = \bigwedge_i \tilde{x}_i$$

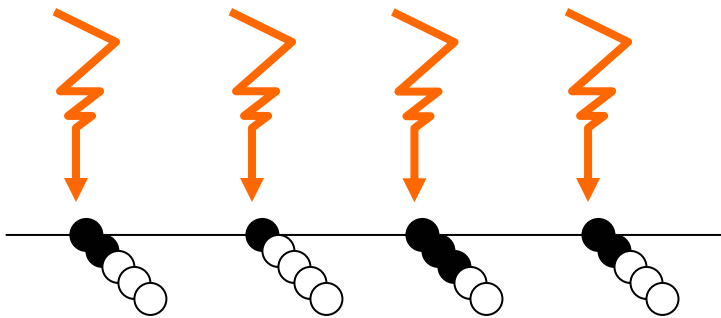
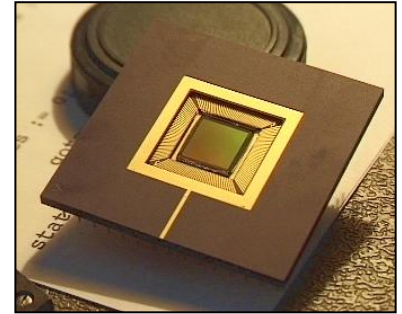
$$z = \bigvee_j y_j$$

forme disjonctive

→ *machine booléenne universelle !*

La rétine NSIP

Rétine *Pvlsar* (Paillet - Bernard - Mercier 1997) : Matrice de 128x128 éléments composés d'un photocapteur, d'une unité de codage analogique numérique et d'une "unité de calcul" de 5 bits par pixel :

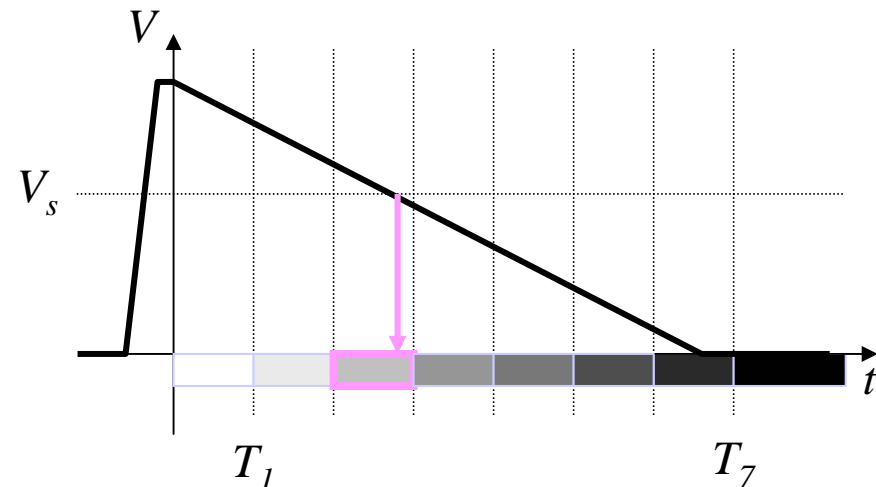


Acquisition numérique sur n bits

NSIP (Near sensor Image Processing, Eklund - Aström 1993) :

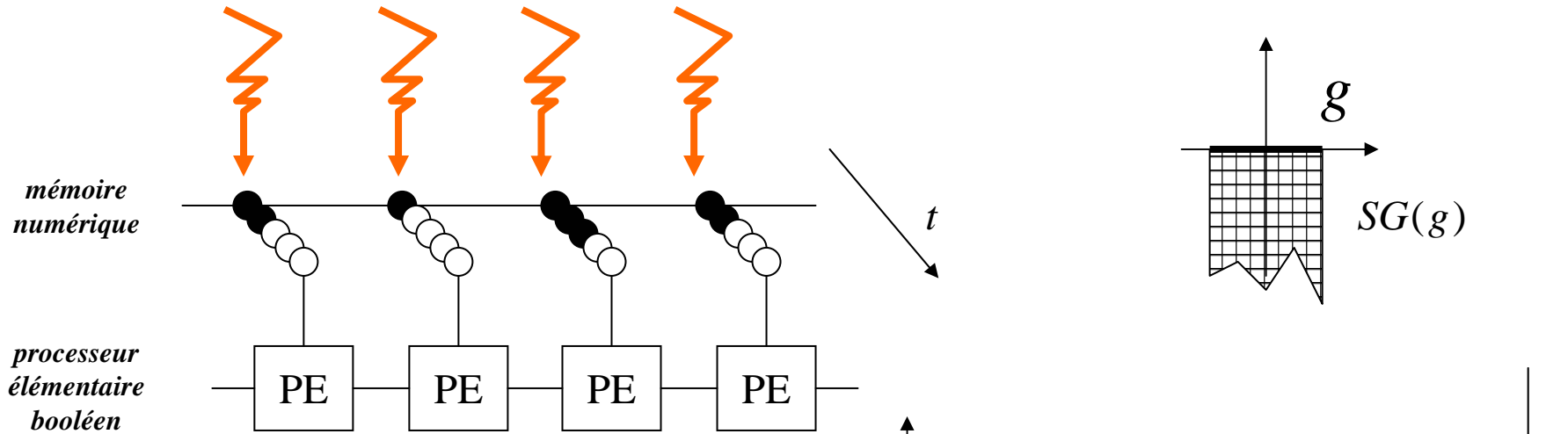
Procédé de codage numérique par multiseuillage

ACQUISITION
numérique :



Comparaison du niveau de charge d'une photodiode
aux n temps T_i par rapport au seuil V_s

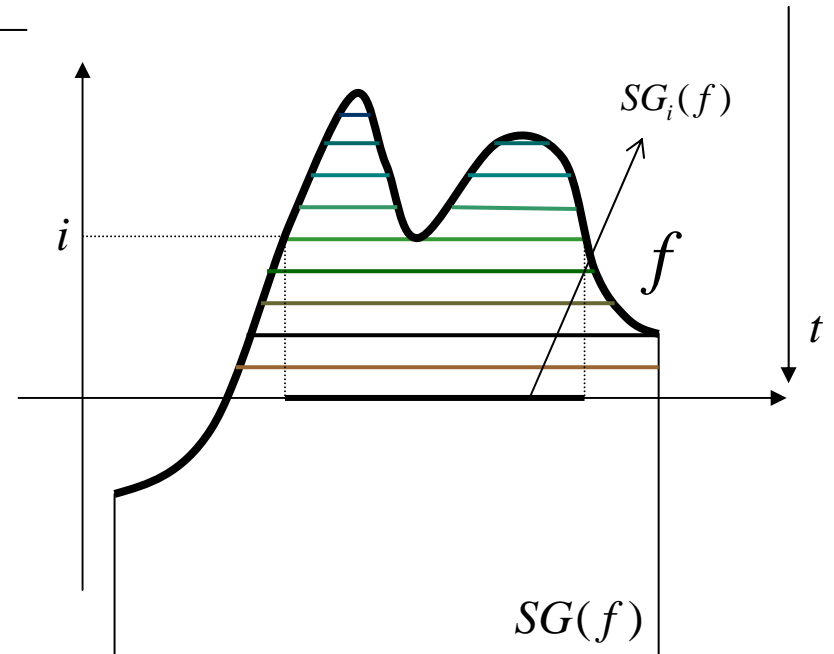
La rétine NSIP



Les traitements binaires effectués pendant l'acquisition correspondent aux opérations ensemblistes effectuées sur les sections $SG_i(f)$ du sous-graphe de la fonction numérique f :

$$SG_i(f) = \{x \in \mathbf{R}^n / f(x) \geq i\}$$

et
$$SG(f) = \bigcup_{i \in \overline{\mathbf{R}}} SG_i(f) \times \{i\}$$



2e Partie : Filtrage morphologique – analyse granulométrique

- Filtres morphologiques.
- Ouvertures et fermetures algébriques.
- Analyse granulométrique.
- Filtres alternés séquentiels.
- Pyramides et espaces d'échelles morphologiques.

L'approche morphologique du filtrage



En traitement linéaire des images, filtrer, c'est *éliminer* certaines *composantes fréquentielles* des images.

Filtrage = Convolution



En morphologie mathématique, filtrer, c'est *simplifier* l'image en supprimant certaines structures géométriques (en général implicitement définies par un ou plusieurs éléments structurants).

Le filtre morphologique simplifie l'image en préservant la structure, mais il perd en général de l'information (→ Croissance).

Le filtre morphologique est stable et possède une classe d'invariance connue (→ Idempotence).



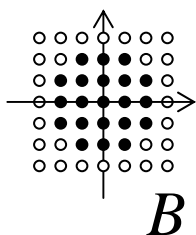
Rappel : ouvertures et fermetures morphologiques

l'ouverture morphologique de X par B.

$$\gamma_B(X) = X \circ B = \delta_{\check{B}}(\varepsilon_B(X)) = (X \ominus \check{B}) \oplus B$$

la fermeture morphologique de X par B.

$$\varphi_B(X) = X \bullet B = \varepsilon_{\check{B}}(\delta_B(X)) = (X \oplus \check{B}) \ominus B$$



X



$\gamma_B(X)$



$\varphi_B(X)$

CROISSANCE

$$x \leq y \Rightarrow \begin{cases} \gamma_B(x) \leq \gamma_B(y) \\ \varphi_B(x) \leq \varphi_B(y) \end{cases}$$

IDEMPOTENCE

$$\begin{aligned} \gamma_B(\gamma_B(x)) &= \gamma_B(x) \\ \varphi_B(\varphi_B(x)) &= \varphi_B(x) \end{aligned}$$

EXTENSIVITE

L'ouverture est anti-extensive : $\gamma_B(x) \leq x$

La fermeture est extensive : $x \leq \varphi_B(x)$

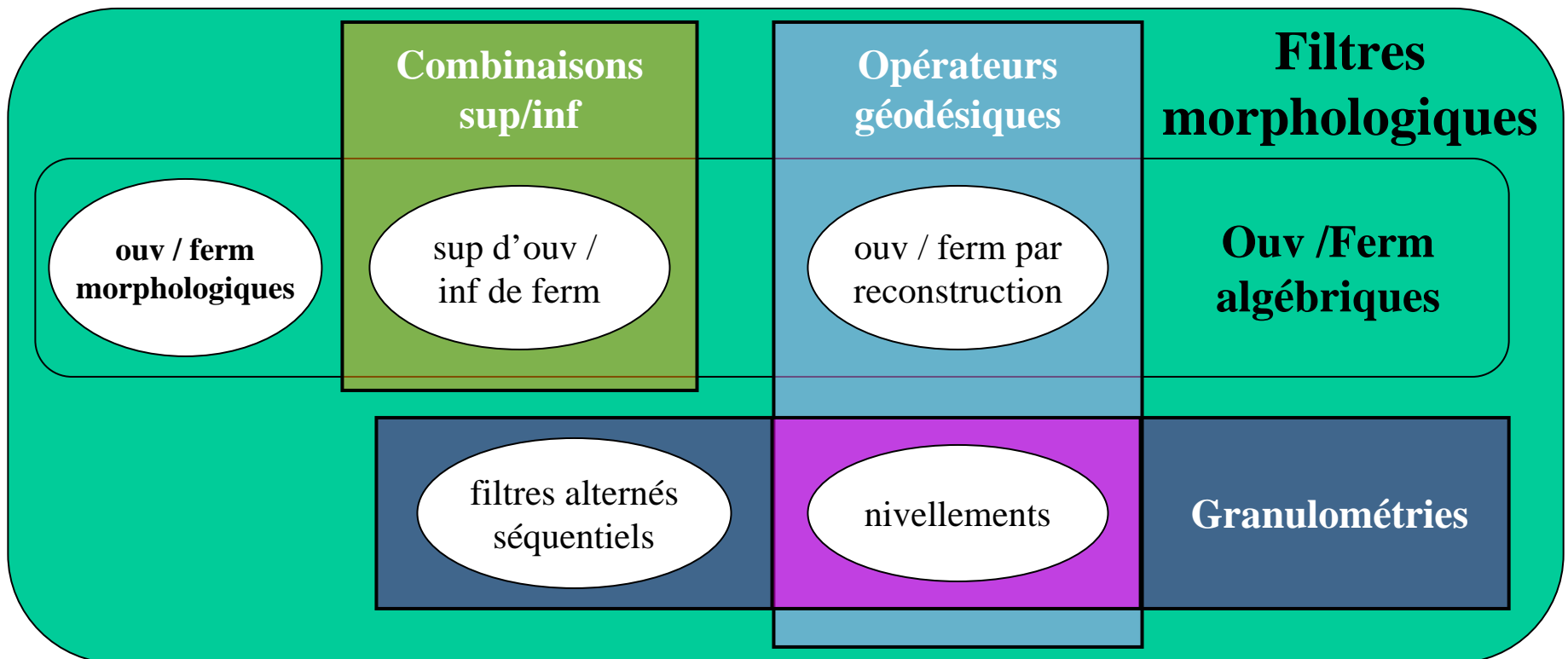
Filtres morphologiques

Un *filtre morphologique* est un opérateur ψ croissant et idempotent :

$$x \leq y \Rightarrow \psi(x) \leq \psi(y)$$

$$\psi(\psi(x)) = \psi(x)$$

On peut construire différentes familles de filtres morphologiques à partir des filtres de base, l'ouverture et la fermeture morphologiques :



Ouvertures et fermetures algébriques

Les ouvertures et fermetures algébriques généralisent les ouvertures et fermetures morphologiques.

- Une **ouverture algébrique** est un filtre morphologique anti-extensif.
- Une **fermeture algébrique** est un filtre morphologique extensif.

PROPRIETE

- Un sup d'ouvertures morphologiques est une ouverture algébrique
- Un inf de fermetures morphologiques est une fermeture algébrique

ex :

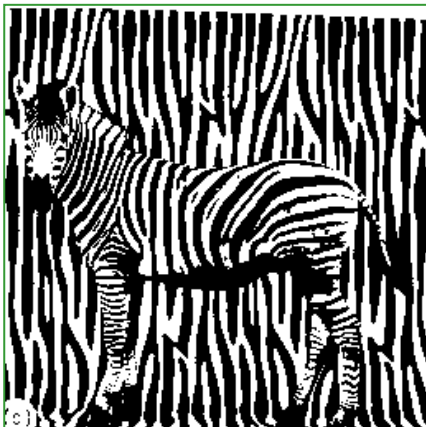
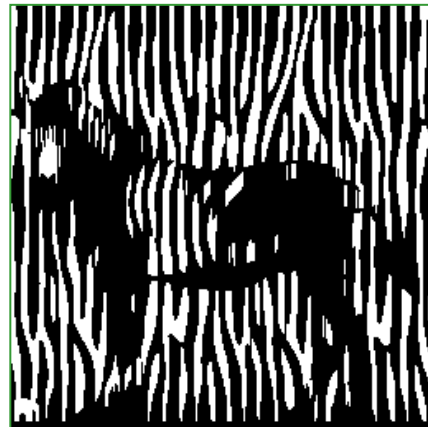
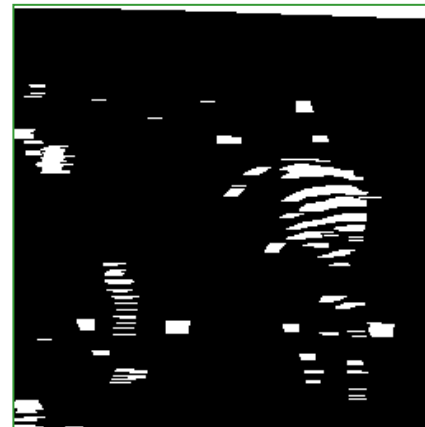


Image originale



Ouverture morphologique par un segment vertical



Ouverture morphologique par un segment horizontal



Ouverture algébrique par union des deux ensembles

Granulométries

L'analyse granulométrique est l'étude de la taille des objets fondée sur le principe du *tamissage* : sélection des objets par un ensemble de tamis de différentes tailles.

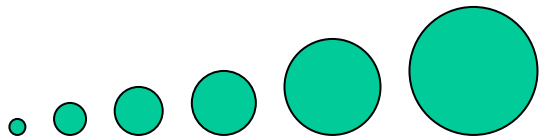
Formellement, une granulométrie peut être définie par une famille d'ouvertures :

$$(\gamma_\lambda)_{\lambda \geq 0} \quad \text{telle que :}$$

$$0 \leq \lambda \leq \lambda' \Rightarrow \gamma_\lambda \gamma_{\lambda'} = \gamma_{\lambda'} \gamma_\lambda = \gamma_{\lambda'}$$

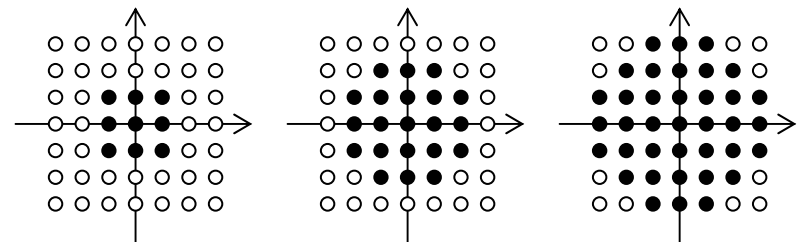
ex1 : $(\gamma_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}^+}$

Ouvertures par des boules euclidiennes de rayon λ



ex2 : $(\gamma_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{N}}$

Ouvertures par une suite croissante de boules discrètes



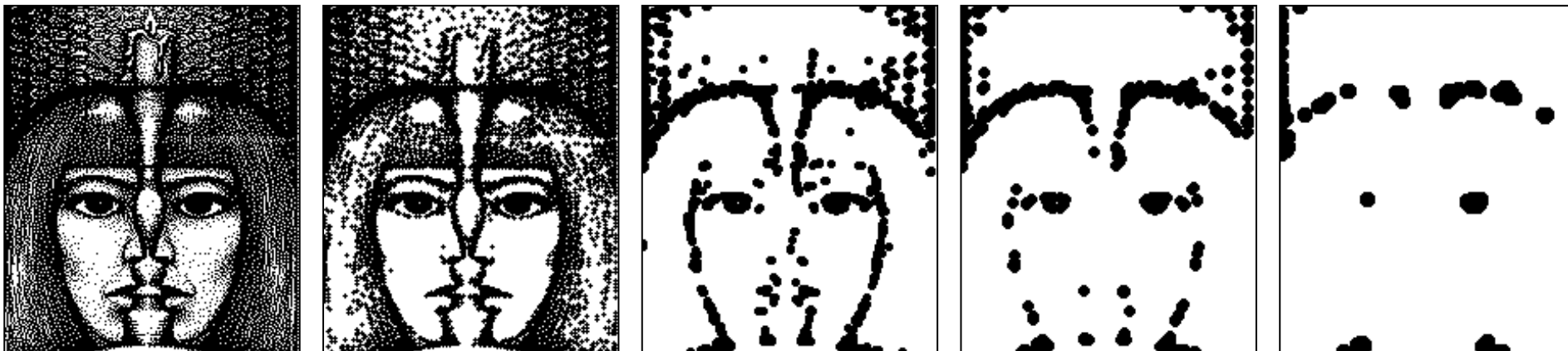
Granulométrie et anti-granulométrie

La famille des opérateurs duaux (fermetures de taille croissante) est une anti-granulométrie :

granulométrie



anti-granulométrie

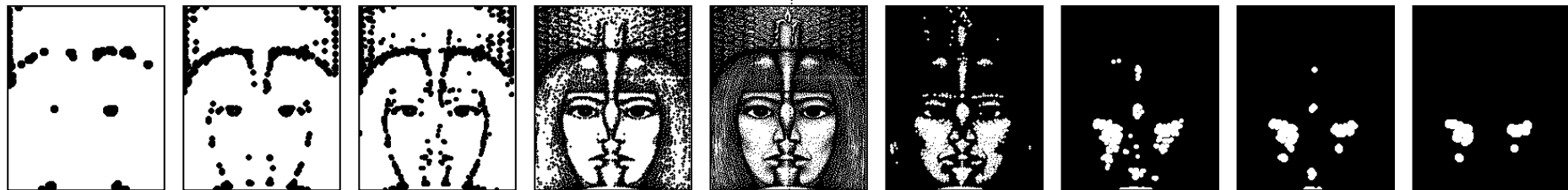
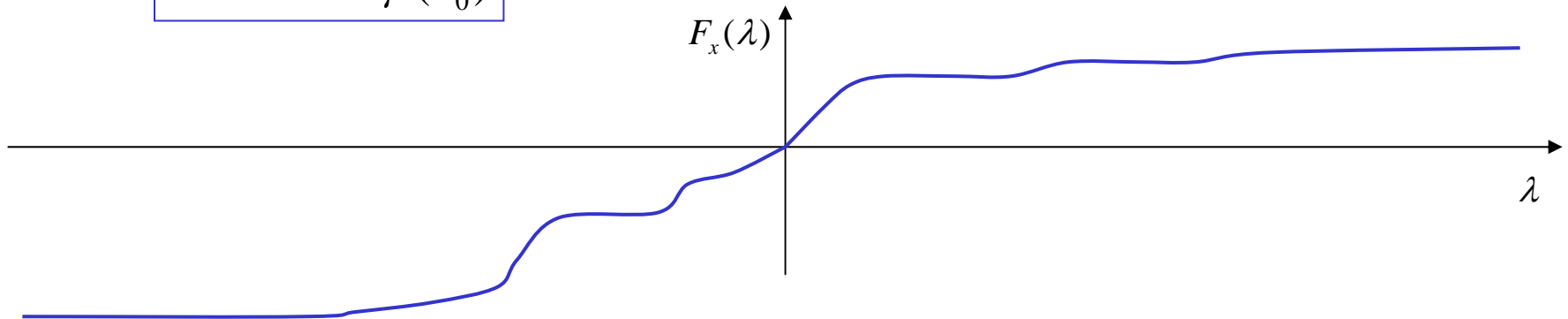


Fonction de distribution granulométrique

Soit μ une mesure bornée sur un treillis E (aire, intégrale...)

Pour $x \in E$, on note x_λ (resp. $x_{-\lambda}$) l'image de x par l'opérateur de granulométrie (resp. d'anti-granulométrie) d'indice λ .

On note $F_x(\lambda) = 1 - \frac{\mu(x_\lambda)}{\mu(x_0)}$ la fonction de distribution sur x de la granulométrie $(\mathcal{V}_\lambda)_\lambda$



anti-granulométrie

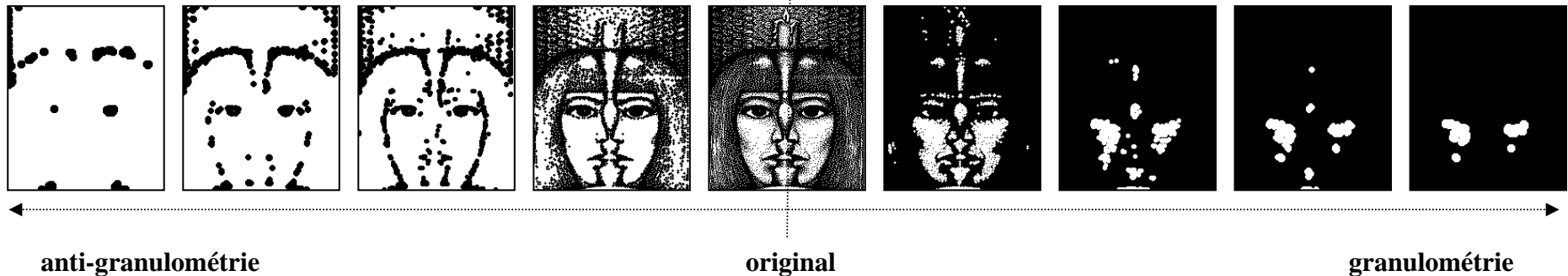
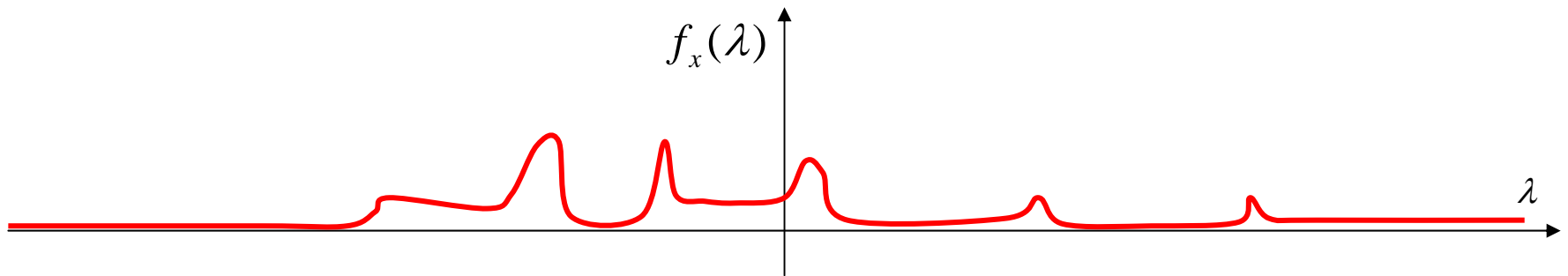
original

granulométrie

Spectre granulométrique

Le spectre granulométrique est la dérivée de la fonction de distribution granulométrique :

$$f_x(\lambda) = F'_x(\lambda)$$



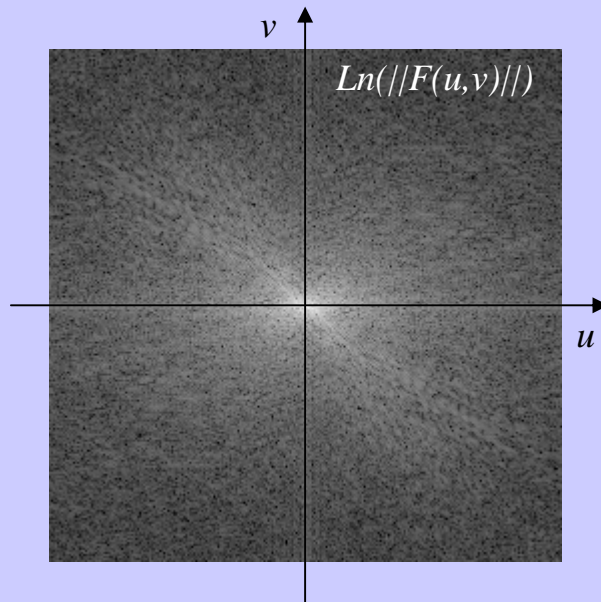
L'analyse granulométrique

→ Etude quantitative des images par la mesure de la contribution de chaque composante à l'image globale :

Traitement linéaire :

Transformée de Fourier

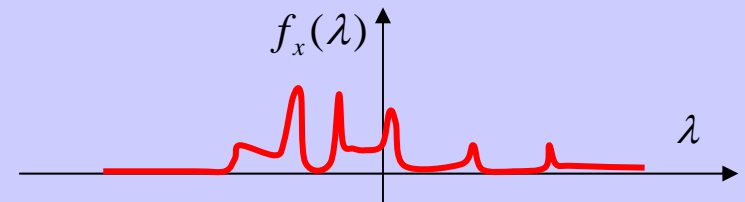
Composantes = sinusoides complexes



Morphologie mathématique :

Analyse granulométrique

Composantes = famille de boules



Historiquement : une des premières application de la morphologie mathématique était l'étude quantitative des sols poreux par analyse granulométrique de coupes microscopiques.

Construction des filtres alternés

L'ensemble des filtres sur un treillis complet E forme un treillis \mathfrak{F}

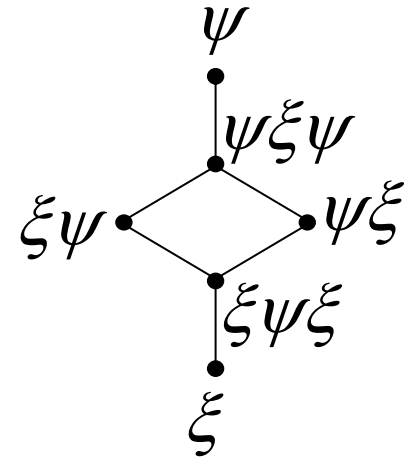
Théorème

Soient $\xi, \psi \in \mathfrak{F}$ tels que $\xi \leq \psi$

- L'ensemble ci-contre est un sous-treillis de \mathfrak{F} :
- De plus, on a l'équivalence :

$$\psi\xi \leq \xi\psi \Leftrightarrow \psi\xi\psi = \xi\psi \Leftrightarrow \xi\psi\xi = \psi\xi$$

Matheron 1988



dem : (1) filtres (idempotence) : $\xi\psi = \xi\xi\xi\psi \leq \xi\psi\xi\psi \leq \xi\psi\psi\psi = \xi\psi$
 $\xi\psi\xi = \xi\xi\xi\xi\psi\xi \leq \xi\psi\xi\xi\psi\xi \leq \xi\psi\psi\psi\psi\xi = \xi\psi\xi$

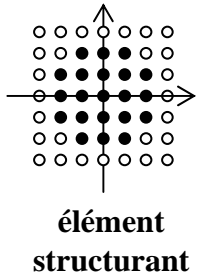
(2) ordres : $\xi = \xi\xi\xi \leq \xi\psi\xi \leq \psi\psi\xi = \psi\xi = \psi\xi\xi \leq \psi\xi\psi \leq \psi\psi\psi = \psi$
 $\xi\psi\psi = \xi\psi = \xi\xi\psi \leq \psi\xi\psi \leq \psi\psi\psi = \psi$

(3) plus petit majorant :
 soit ζ un filtre tel que $\zeta \geq \xi\psi$ et $\zeta \geq \psi\xi$ alors $\zeta = \zeta\zeta \geq \psi\xi\xi\psi = \psi\xi\psi$

(4) équivalence : $\xi\psi = \psi\xi\psi \Rightarrow \xi\psi \geq \psi\xi\xi = \psi\xi$
 et $\psi\xi \leq \xi\psi \Rightarrow \psi\xi\psi \leq \xi\psi\psi = \xi\psi = \xi\xi\psi \leq \psi\xi\psi$

Exemple de filtres alternés

On prend : $\xi = \gamma$ (ouverture morphologique) $\psi = \varphi$ (fermeture morphologique)



Filtres alternés séquentiels

Soit $(\gamma_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ une granulométrie, et $(\gamma_\lambda^* = \varphi_\lambda)_{\lambda \geq 0}$

l'anti-granulométrie associée

Alors les opérateurs suivants :

$$\Theta_\lambda = \varphi_\lambda \gamma_\lambda \cdots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1$$

$$\Xi_\lambda = \gamma_\lambda \varphi_\lambda \cdots \gamma_2 \varphi_2 \gamma_1 \varphi_1$$

sont des filtres, dits *filtres alternés séquentiels* associés à la granulométrie $(\gamma_\lambda)_{\lambda \geq 0}$

Propriétés d'absorption :

$$\lambda \leq \lambda' \Rightarrow \begin{cases} \Theta_{\lambda'} \Theta_\lambda = \Theta_{\lambda'} & \text{mais } \Theta_\lambda \Theta_{\lambda'} \leq \Theta_{\lambda'} \\ \Xi_{\lambda'} \Xi_\lambda = \Xi_{\lambda'} & \text{mais } \Xi_\lambda \Xi_{\lambda'} \leq \Xi_{\lambda'} \end{cases}$$

Filtres alternés séquentiels : démonstration des propriétés

Filtre morphologique (idempotence) :

$$\lambda \leq \lambda' \Rightarrow \gamma_{\lambda'} \leq \gamma_{\lambda} \leq \varphi_{\lambda} \leq \varphi_{\lambda'} \quad (*)$$

$$(*) \Rightarrow \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \geq \gamma_{\lambda} \gamma_{\lambda} = \gamma_{\lambda} \geq \gamma_{\lambda'} \Rightarrow \varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \geq \varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \gamma_{\lambda} = \varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'}$$

et $(*) \Rightarrow \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \leq \varphi_{\lambda} \varphi_{\lambda} = \varphi_{\lambda} \leq \varphi_{\lambda'} \Rightarrow \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \leq \varphi_{\lambda'} \varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} = \varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'}$

donc $\lambda \leq \lambda' \Rightarrow \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \leq \varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \leq \varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda}$

d'où $\varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1 \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1 \geq \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1 = \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1$

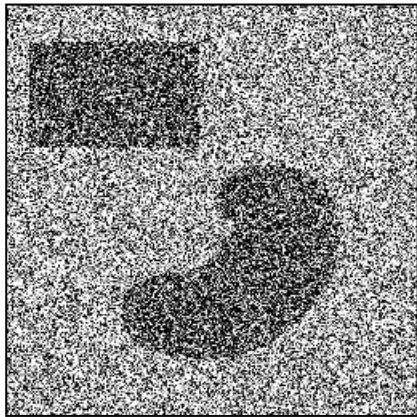
et $\varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1 \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1 \leq \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1 = \varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1$

Propriétés d'absorption :

$$\begin{aligned} \Theta_{\lambda'} \Theta_{\lambda} &= (\varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \dots \varphi_{\lambda+1} \gamma_{\lambda+1}) (\varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1) (\varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1) \\ &= (\varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \dots \varphi_{\lambda+1} \gamma_{\lambda+1}) (\varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1) = \Theta_{\lambda'} \end{aligned}$$

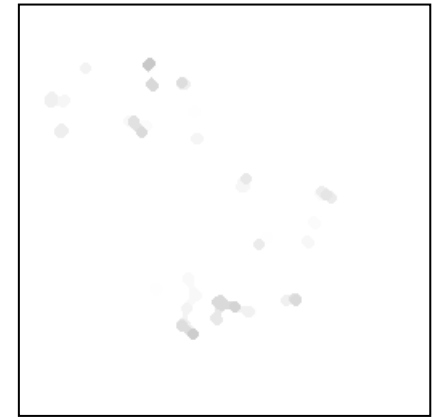
$$\begin{aligned} \Theta_{\lambda} \Theta_{\lambda'} &= (\varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1) (\varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \dots \varphi_{\lambda+1} \gamma_{\lambda+1}) (\varphi_{\lambda} \gamma_{\lambda} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1) \\ &\leq \Theta_{\lambda'} \end{aligned}$$

Application à la réduction du bruit

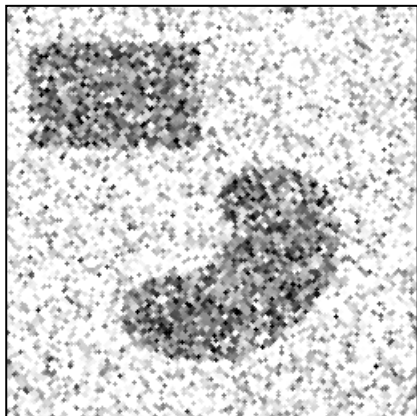


Original

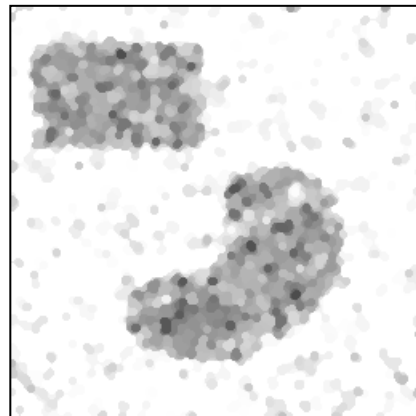
Les filtres alternés séquentiels conduisent à une bonne réduction du bruit grâce à une élimination progressive des pics et des creux de faible surface.



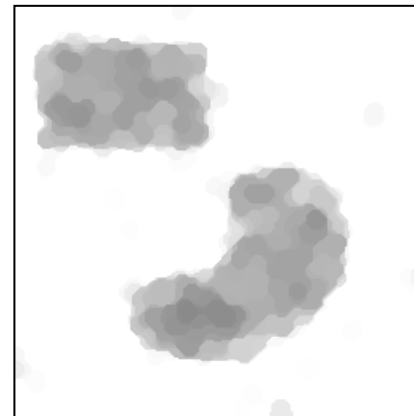
Application directe
du filtre alterné $\gamma_4 \phi_4$



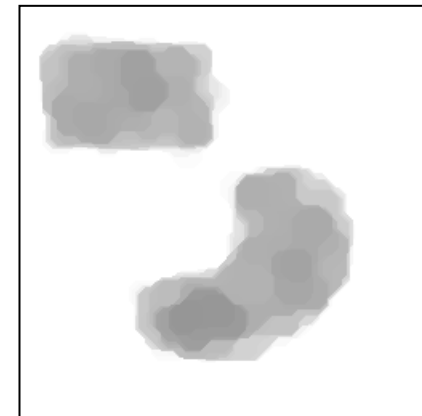
E_1



E_2

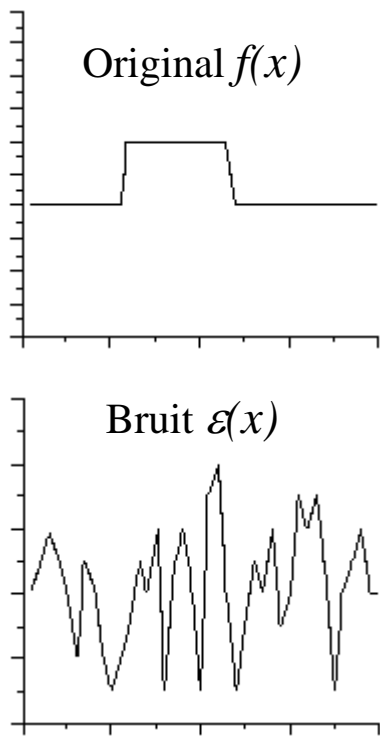


E_5

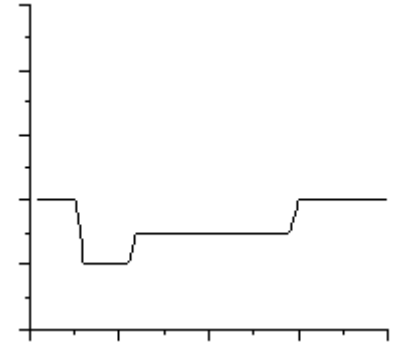
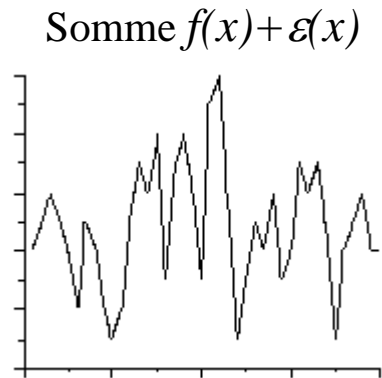


E_8

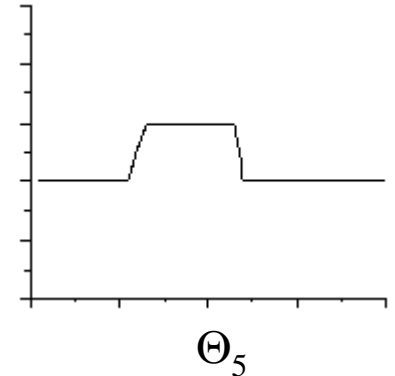
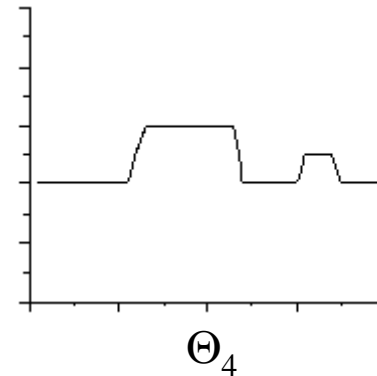
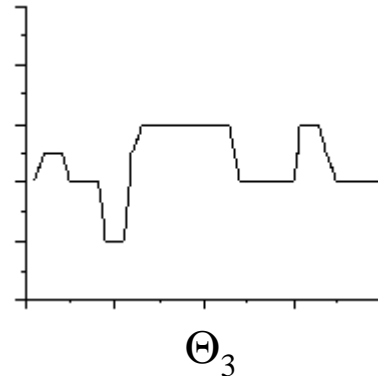
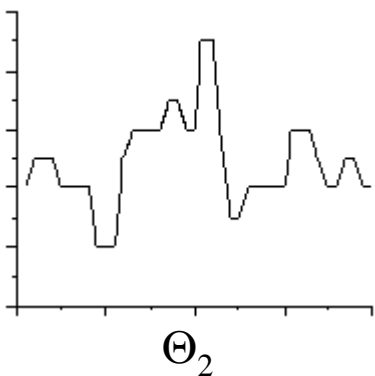
Application à la réduction du bruit



...en 1d :

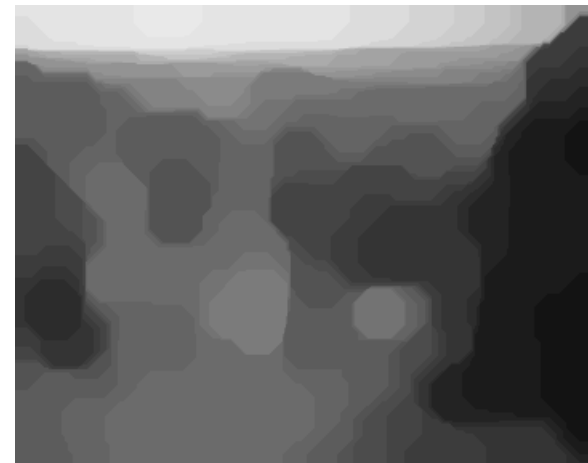
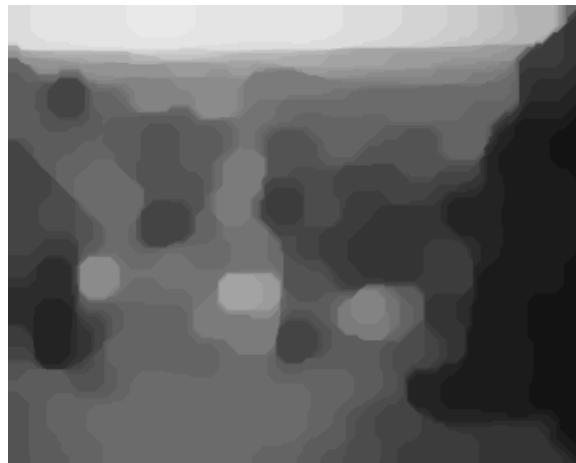
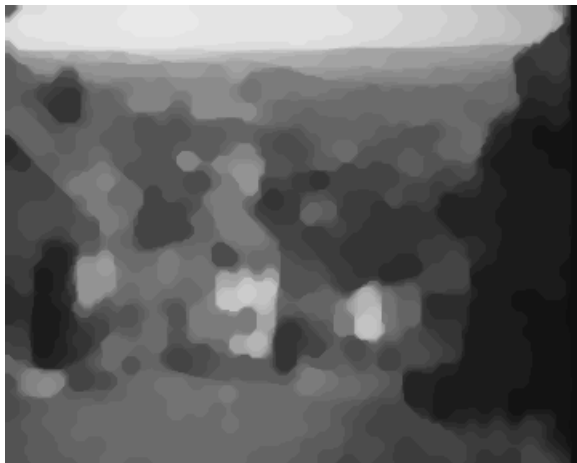


Application directe
du filtre alterné $\phi_5 \gamma_5$



Espace d'échelle morphologique

Une granulométrie induit un *espace d'échelle* (scale-space), qui fournit une représentation des images à différents niveaux de détail.

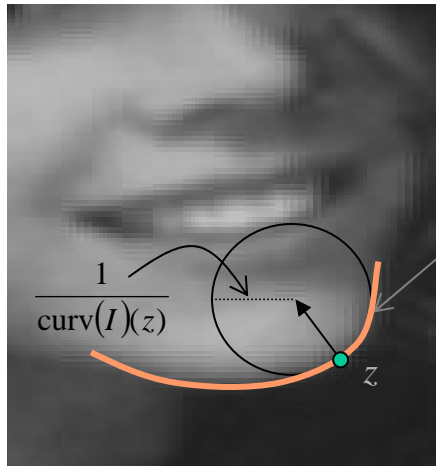


Espace d'échelle, EDP et filtrage morphologique

Le filtrage morphologique peut être exprimé dans le formalisme des Equations aux Dérivées Partielles (EDP). Ici la simplification progressive de l'image se traduit par un phénomène de diffusion. Le respect du principe d'invariance par changement de contraste implique la contrainte suivante sur la forme de l'équation :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \|\nabla I\| G(\text{curv}(I), t)$$

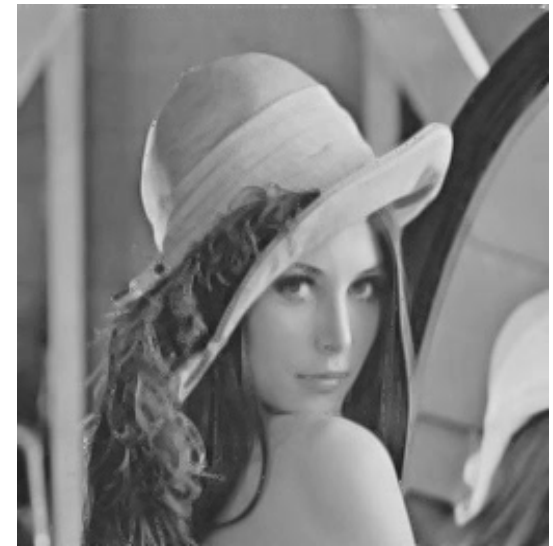
avec $G(x,y)$ continue et croissante par rapport à x .



courbe isophote
de valeur $I(z)$

L'une des équations de diffusion invariante par changement de contraste la plus simple dans le formalisme EDP est la diffusion par courbure moyenne

$$(G(x,y) = x)$$



diffusion par courbure moyenne

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \|\nabla I\| \text{curv}(I)$$