



*Cours de morphologie mathématique*



Master 2 IMA – UPMC

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

# Opérateurs géodésiques et filtres connexes

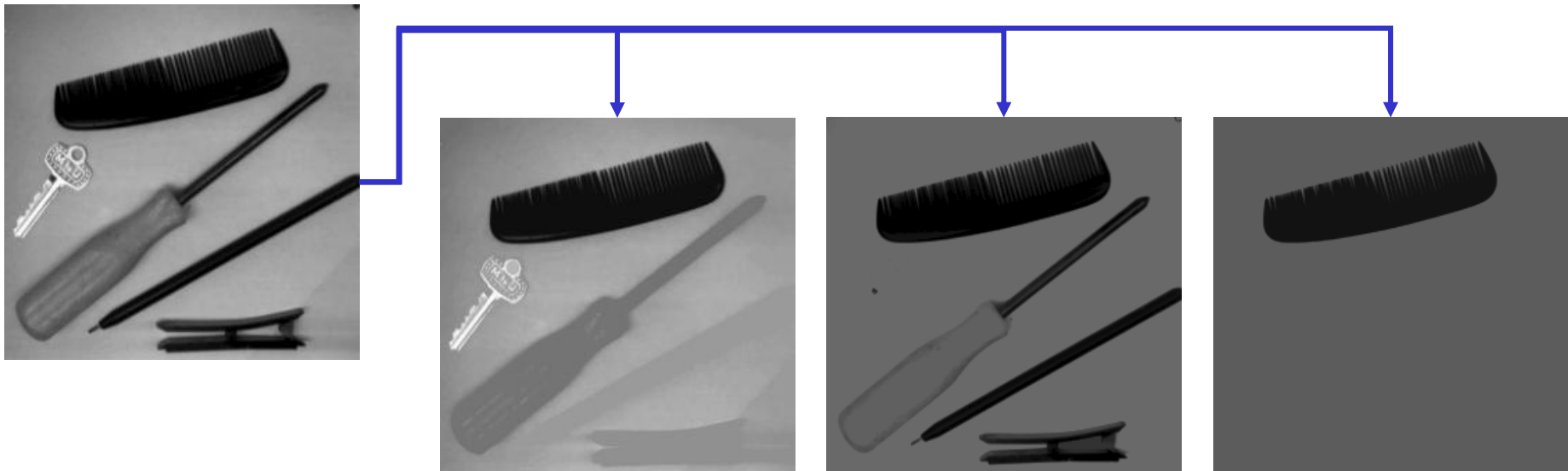
- Opérations géodésiques et interaction régionale.
- Maxima régionaux et érodés ultimes.
- Ouvertures par reconstruction et nivellements
- Pyramides et espaces d'échelles morphologiques.
- Points de vue algorithmique.

# Introduction aux opérations géodésiques

Objectif sous-jacent : l'analyse individuelle des « objets » d'une image.

En l'absence de données de plus haut niveau sémantique, l'objet dans une image est associé à une particule, correspondant en général à une composante connexe.

L'analyse individuelle des objets nécessite donc l'utilisation d'opérateurs (filtres) connexes, c'est-à-dire qui préserve les objets (une composante connexe est soit préservée, soit intégralement éliminée).



# Opérations géodésiques

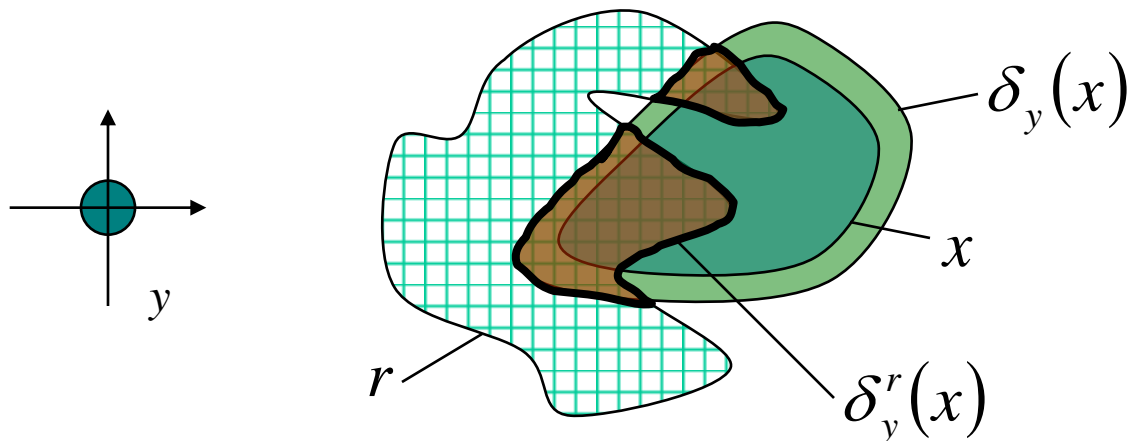
Les opérations géodésiques sont celles qui sont conditionnées par un élément de référence  $r$  du treillis. Elles sont définies à partir des opérations géodésiques de base :

la *dilatation géodésique* et la *reconstruction géodésique*.

Dans les opérations géodésiques, l'élément structurant représente le "voisinage élémentaire" de l'origine ; et définit donc la topologie sous-jacente.

La dilatation géodésique dans  $r$  :

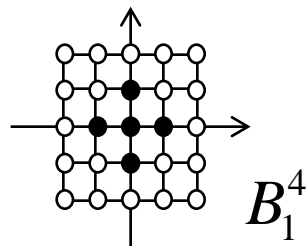
$$\delta_y^r(x) = \delta_y(x) \wedge r$$



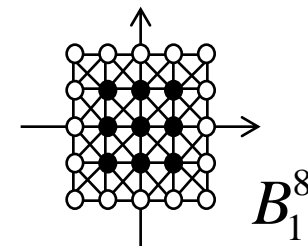
# Opérations géodésiques : cas discret

Dans le cas discret, l'élément structurant utilisé dans les opérations géodésiques est en général la boule élémentaire de taille 1, qui détermine implicitement la topologie utilisée.

4-connexité :



8-connexité :



Dans le cadre ensembliste, la dilatation géodésique de  $X$  dans  $R$  (par la boule élémentaire) devient l'ensemble des voisins de  $X$  inclus dans  $R$  :

$$\delta_{B_1}^R(X) = \delta_{B_1}(X) \cap R$$

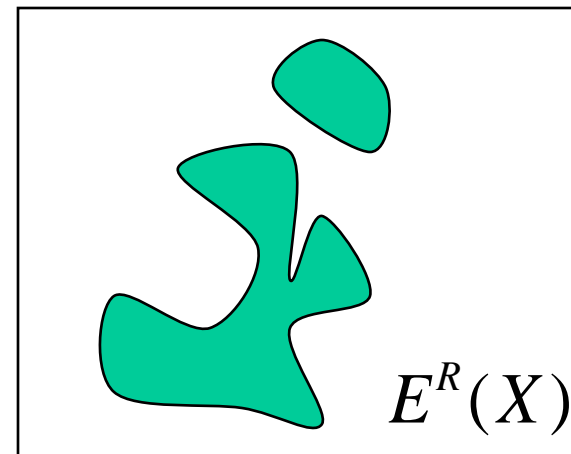
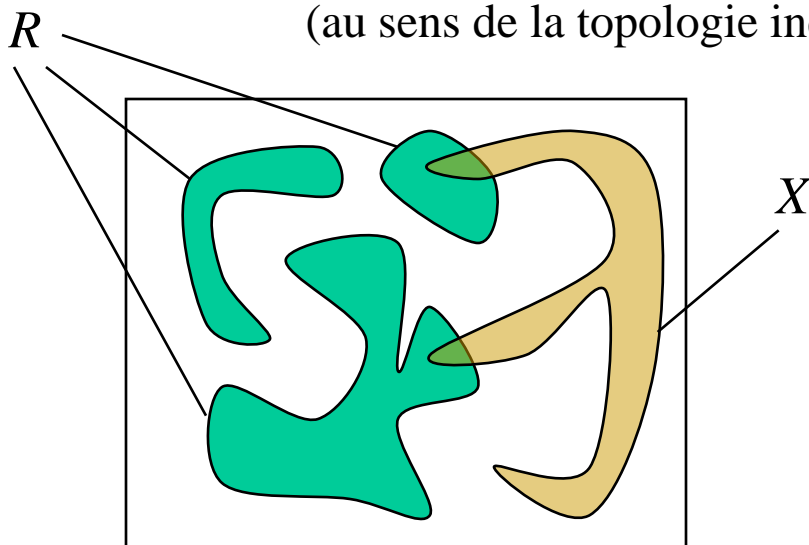
# La reconstruction géodésique

posons 
$$\begin{cases} (\delta_{B_1}^R)^0(X) = X \\ (\delta_{B_1}^R)^n(X) = \delta_{B_1}^R((\delta_{B_1}^R)^{n-1}(X)) \text{ pour } n > 0 \end{cases}$$

La reconstruction géodésique de  $X$  dans  $R$  est définie par :

$$E_{B_1}^R(X) = \sup_{n \geq 0} \{ (\delta_{B_1}^R)^n(X) \}$$

Dans le cadre ensembliste, c'est l'ensemble des composantes connexes (au sens de la topologie induite par  $B_1$ ) de  $R$  qui intersectent  $X$  :



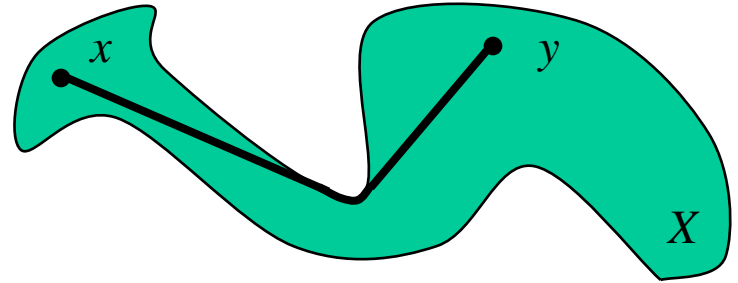
# Mesures géodésiques

$$x, y \in X$$

La **distance géodésique**  
entre  $x$  et  $y$  dans  $X$  :

$$d_X(x, y) = \min \{ n \geq 0; x \in (\delta_{B_1}^X)^n(\{y\}) \}$$

C'est la longueur du (ou des) plus court(s) chemin(s) **dans**  $X$  entre  $x$  et  $y$ .

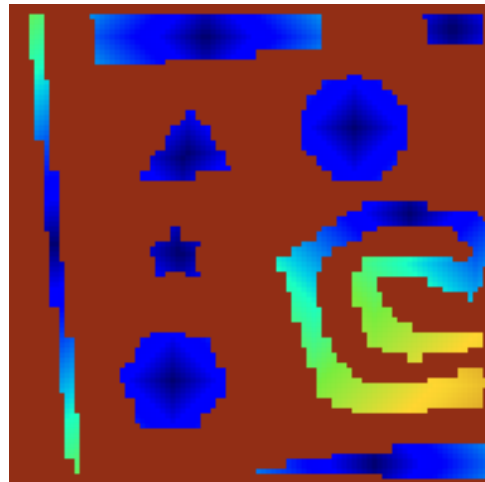


Soit  $X$  une  
composante  
connexe.

La **fonction de  
propagation** de  $X$  :

$$\Pi_X : X \rightarrow \mathbf{N}$$

$$x \mapsto \max \{ d_X(x, y); y \in X \}$$



Soit  $X$  une composante  
connexe.

Le **diamètre géodésique** de  $X$  :

$$\begin{aligned} \Delta_X &= \max \{ \Pi_X(x); x \in X \} \\ &= \max \{ d_X(x, y); x, y \in X \} \end{aligned}$$

# Etiquetage des composantes connexes

La première application de la reconstruction géodésique est l'analyse individuelle de particules, qui consiste à extraire les composantes connexes l'une après l'autre par reconstruction du premier pixel rencontré lors d'un balayage video :



Image binaire

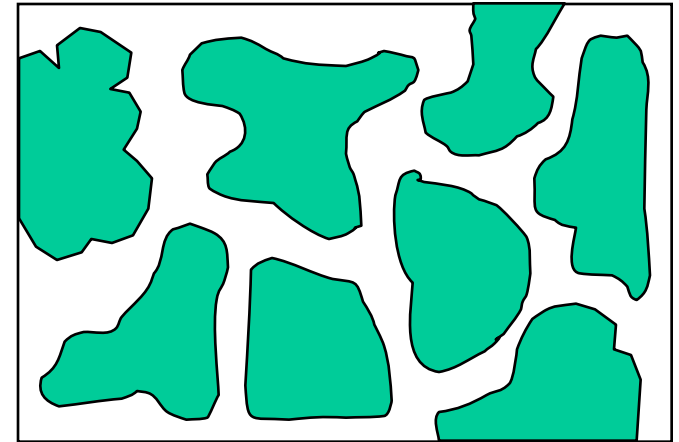
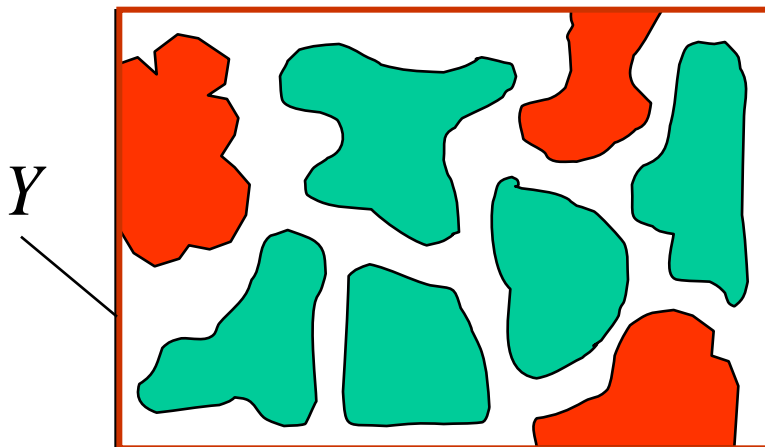


Etiquetage des composantes  
connexes

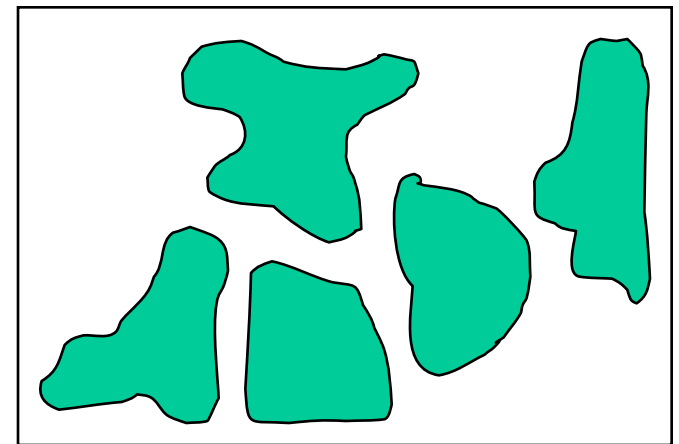


# Suppression des objets touchant le bord de l'image

La suppression des objets touchant le bord de l'image binaire  $X$  s'obtient par différence avec la reconstruction du bord dans  $X$  :



$X$

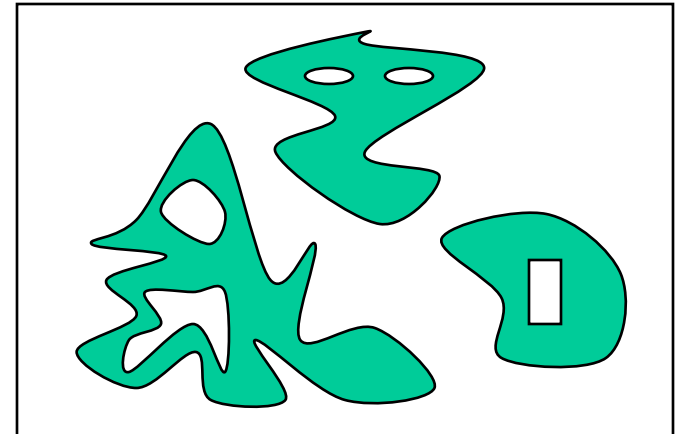


$X \setminus E^X(Y)$

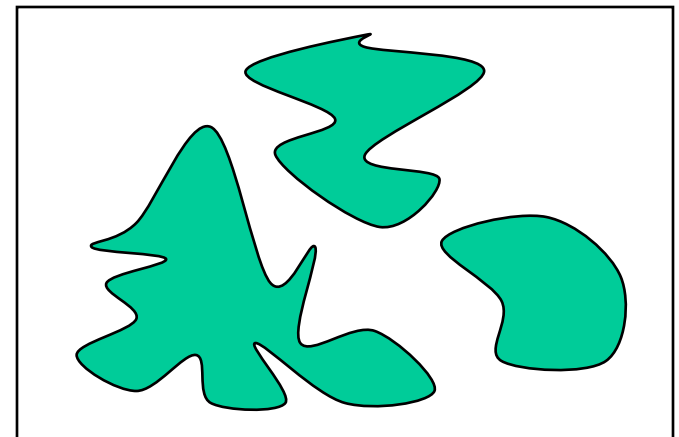
# Bouchage de trous

Le bouchage de trous dans l'image binaire (bidimensionnelle !)  $X$  s'obtient par complément de la reconstruction dans  $X^c$  d'un ensemble qui n'intersecte pas  $X$  :

$Y$



$X$



$(E^{X^c}(Y))^c$

# Seuillage par hystérésis



$I$



$I_h$



$I_b$



$E^{I_b}(I_h)$

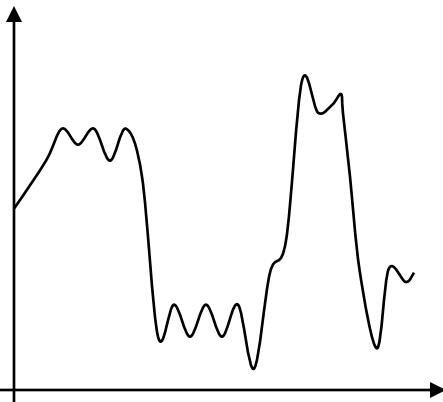
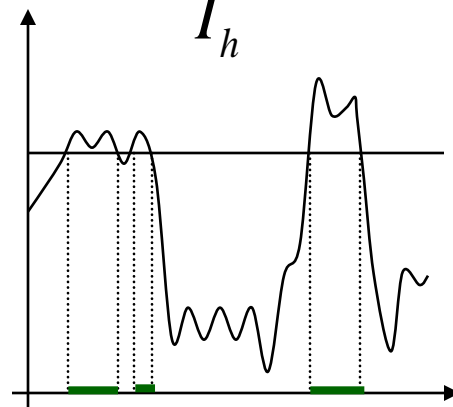
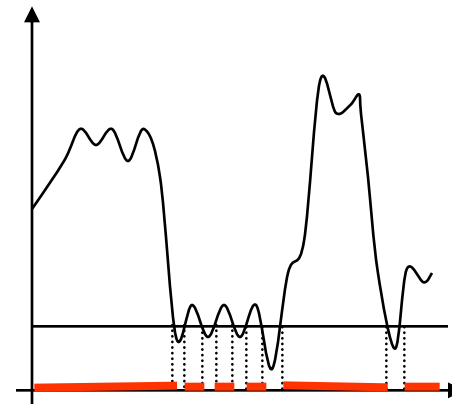


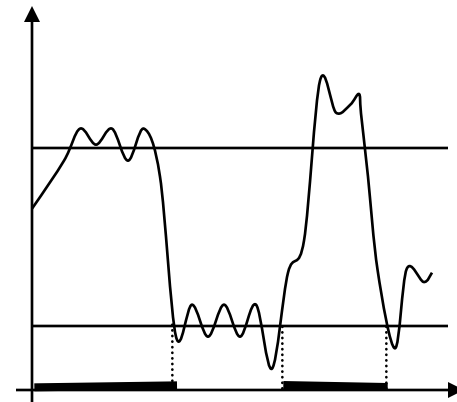
Image en niveaux de gris



Seuil haut



Seuil bas



Seuil par hystérésis

# Connexions généralisées

En faisant varier la taille des éléments structurants utilisés dans les reconstructions, on obtient une hiérarchie de voisinages, et donc une topologie à divers degrés de détails :

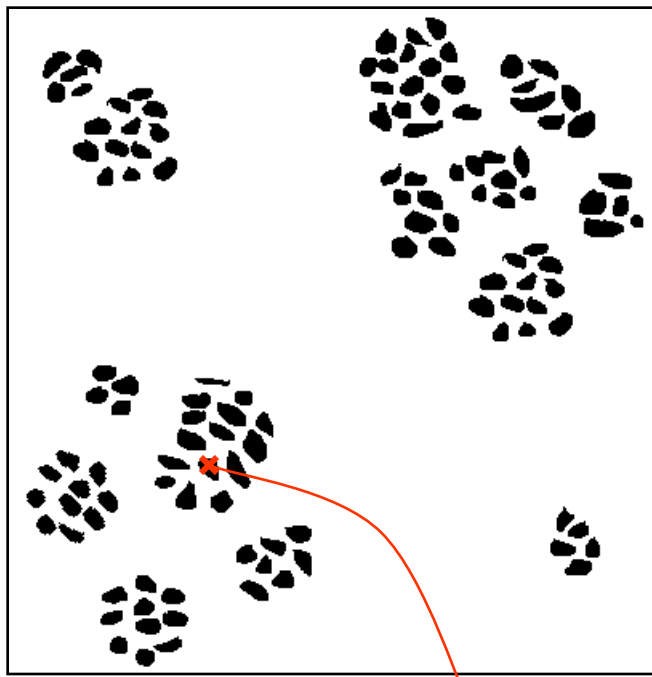


Image X

Marqueur Y

$$E_{B_1}^X(Y)$$

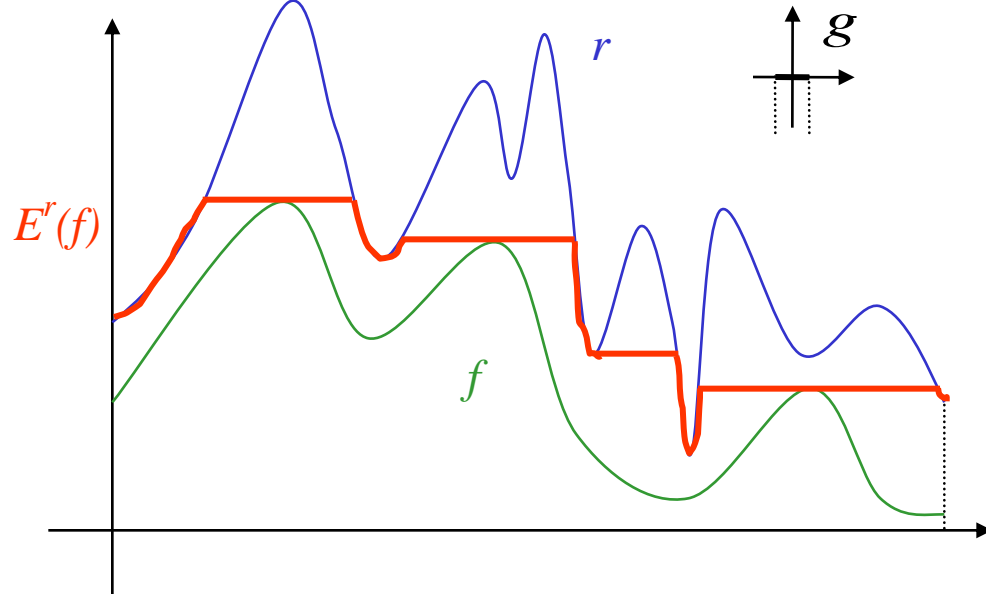
$$E_{B_5}^X(Y)$$

$$E_{B_{20}}^X(Y)$$

# Reconstruction fonctionnelle

La dilatation géodésique de  $f$  dans  $r$  :

$$\delta_g^r(f) = \delta_g(f) \wedge r$$



La reconstruction géodésique de  $f$  dans  $r$  :

$$E_g^r(f) = \sup_{n \geq 0} \{ (\delta_g^r)^n(f) \}$$

# Extrema régionaux

La notion d'extremum régional joue un rôle important pour les image numériques, en particulier dans le calcul des opérateurs géodésiques. Il s'agit de « plateaux », au bord desquels on ne peut que descendre (pour les maxima régionaux), ou monter (pour les minima régionaux) strictement.

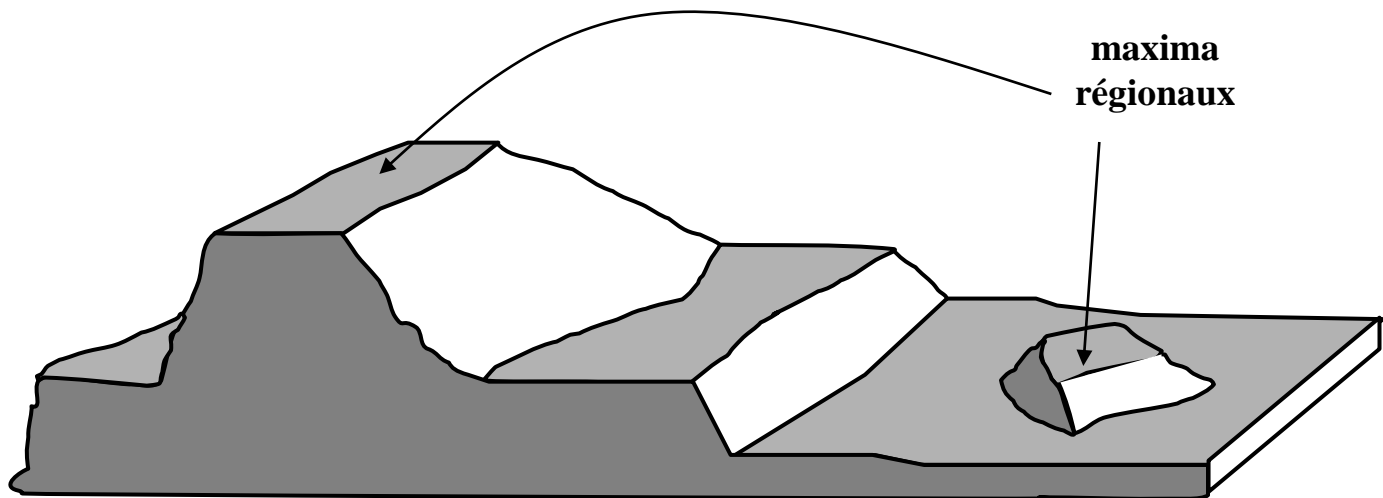
Soit  $f$  une fonction numérique.

$$f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{N}$$

$$SG_i(f) = \{x \in \mathbf{R}^n / f(x) \geq i\}$$

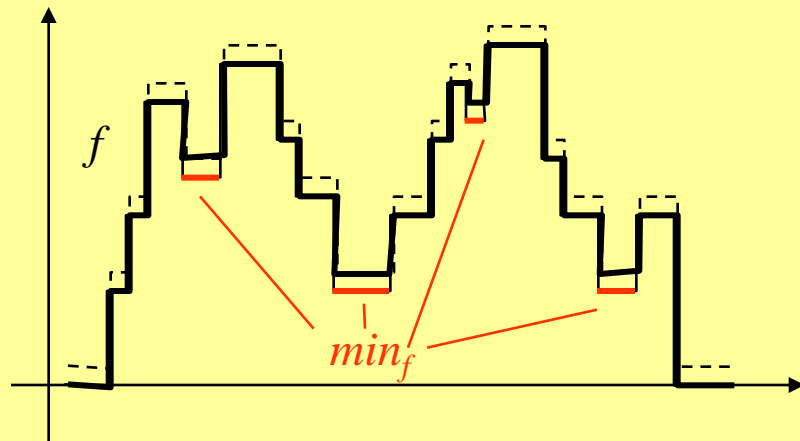
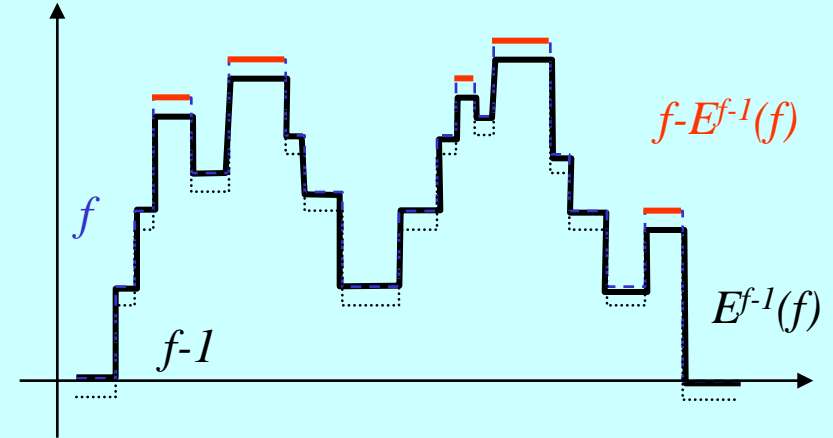
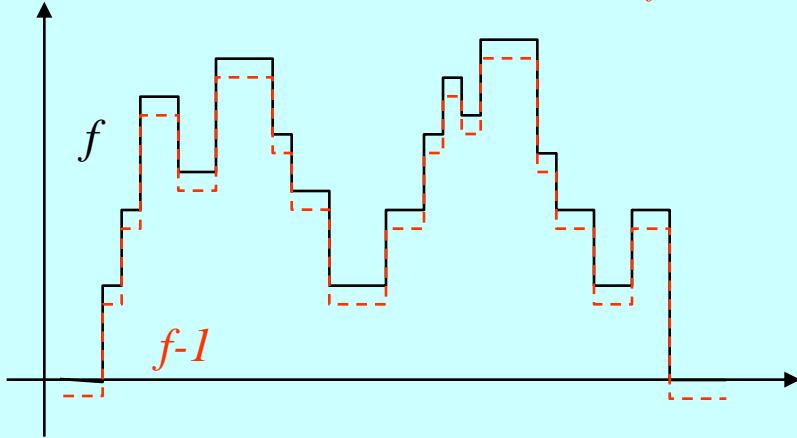
$$max_f = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \{SG_i(f) \setminus (E^{SG_i(f)}(SG_{i+1}(f)))\}$$

Un point  $x$  appartient à un maximum régional du graphe de  $f$  lorsqu'on ne peut pas atteindre un point  $y$  tel que  $f(y) > f(x)$  sans redescendre strictement :

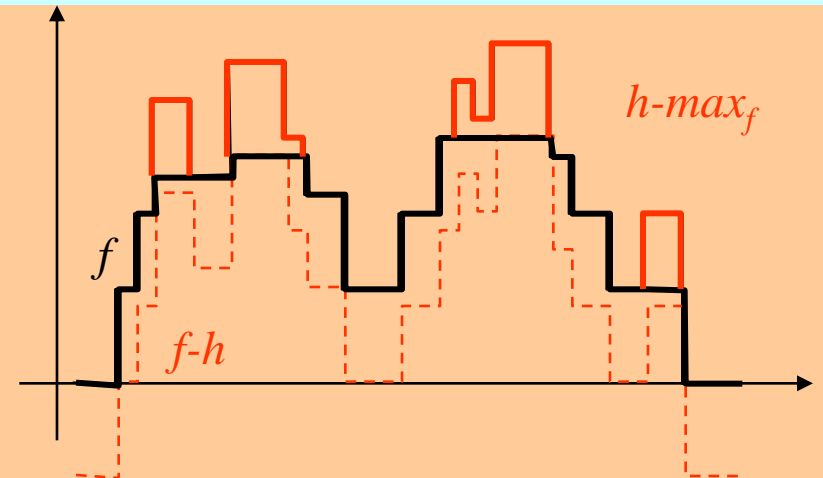


# Calcul des maxima régionaux

Les maxima régionaux d'une fonction numérique  $f$  peuvent se calculer à partir de la reconstruction de  $f-1$  sous  $f$  :  $\max_f = f - E^{f-1}(f)$



Minima régionaux : par dualité



Généralisation : h-extrema régionaux

# Erodés ultimes

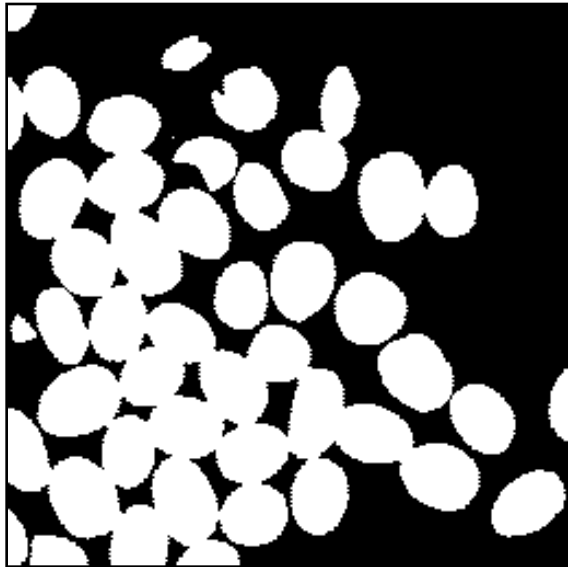
Les maxima régionaux de la transformée en distance correspondent aux composantes connexes qui disparaissent lors d'érosions successives.

$F_X^d$  la transformée en distance d de l'ensemble X.

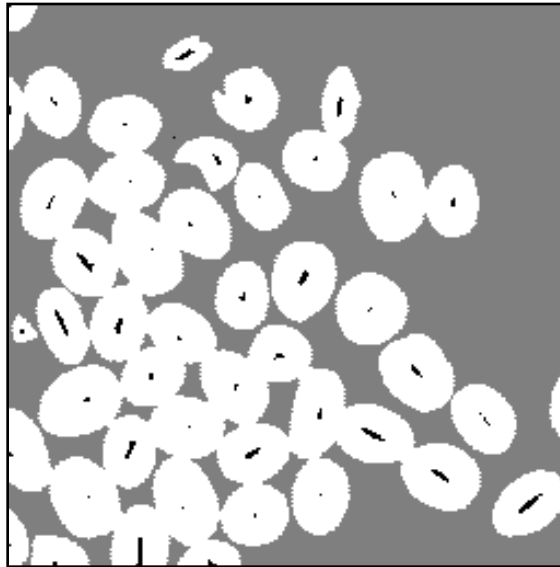
$$\begin{aligned} SG_i(F_X^d) &= \{x \in \mathbf{R}^n / F_X^d(x) \geq i\} \\ &= \{x \in \mathbf{R}^n / d(x, X^c) \geq i\} \\ &= \mathcal{E}_{B_i}(X) \end{aligned}$$

$$\max_{F_X^d} = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \{SG_i(F_X^d) \setminus (E^{SG_i(F_X^d)}(SG_{i+1}(F_X^d)))\} = ERO\_ULT(X) = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \{\mathcal{E}_{B_i}(X) \setminus (E^{\mathcal{E}_{B_i}(X)}(\mathcal{E}_{B_{i+1}}(X)))\}$$

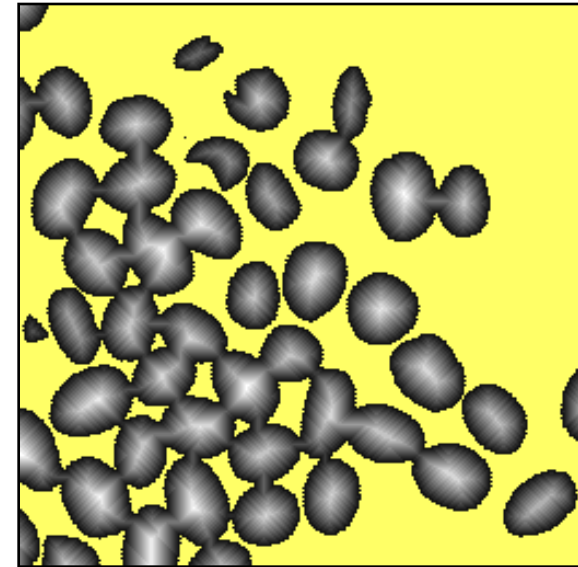
*Application* : singularisation de particules se recouvrant partiellement :



original



érodés ultimes (en noir)



transformée en distance



# Ouvertures et fermetures par reconstruction

La reconstruction géodésique est un filtre morphologique :

$$x \leq y \Rightarrow E^r(x) \leq E^r(y)$$

$$E^r(E^r(x)) = E^r(x)$$

Si  $\xi$  (resp.  $\psi$ ) est un opérateur anti-extensif (resp. extensif)

alors l'opérateur :  $E^x(\xi(x))$  (resp.  $(E^{x^c}((\psi(x))^c))^c$ )

est une ouverture (resp. fermeture) algébrique.

Cas particulier important :  $\xi = \gamma$  (ouverture) et  $\psi = \phi$  (fermeture) :

ouverture par reconstruction :

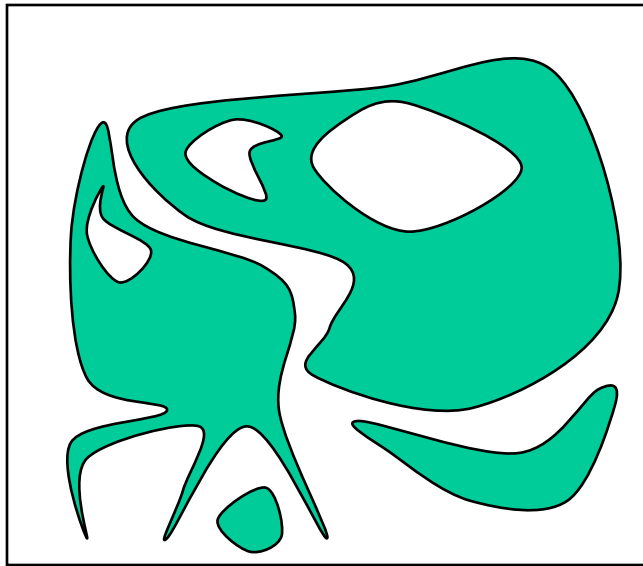
$$E^x(\gamma(x))$$

fermeture par reconstruction :

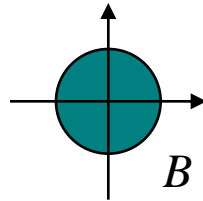
$$(E^{x^c}((\phi(x))^c))^c$$

# Ouvertures et fermetures par reconstruction

L'ouverture par reconstruction élimine les composantes connexes qui n'appartiennent pas à l'ouvert sans modifier les autres :

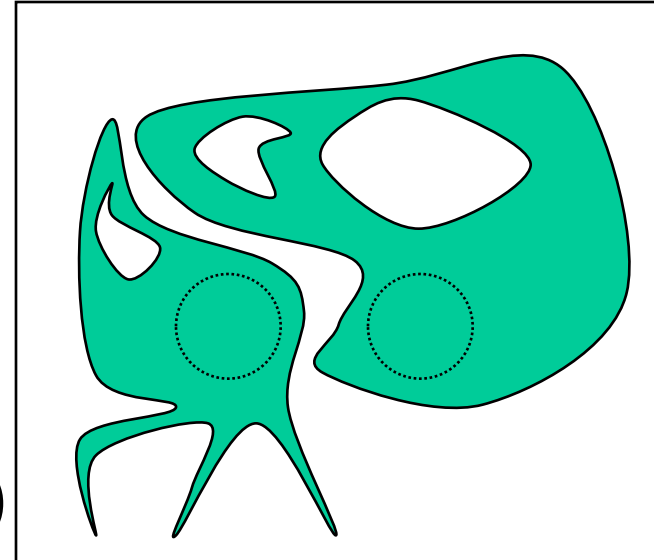


$X$



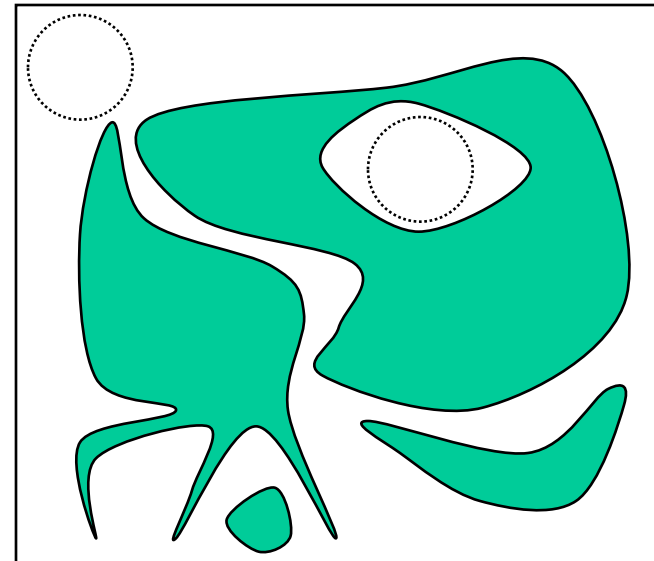
ouverture par reconstruction

$$E^X(\gamma_B(X))$$



fermeture par reconstruction

$$\left( E^{X^c} \left( \left( \varphi_B(X) \right)^c \right) \right)^c$$

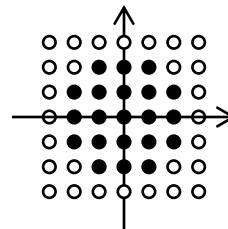


La fermeture par reconstruction est définie par dualité :

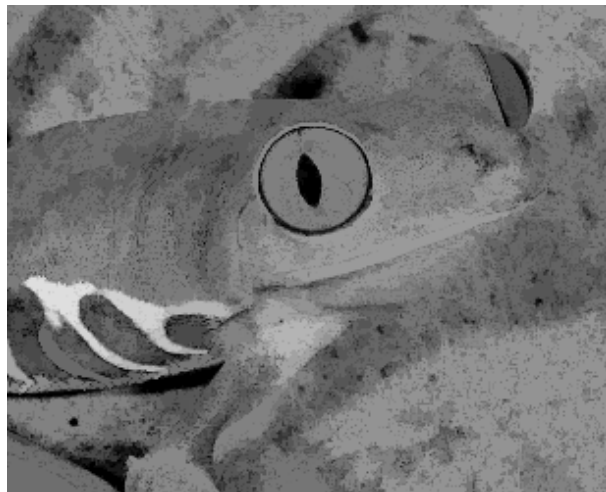
# Ouvertures et fermetures par reconstruction

Par extension, les ouvertures et fermetures par reconstruction élimine les structures en préservant les contours des images numériques :

élément structurant  
de l'ouverture  
morphologique :



original



ouverture par reconstruction



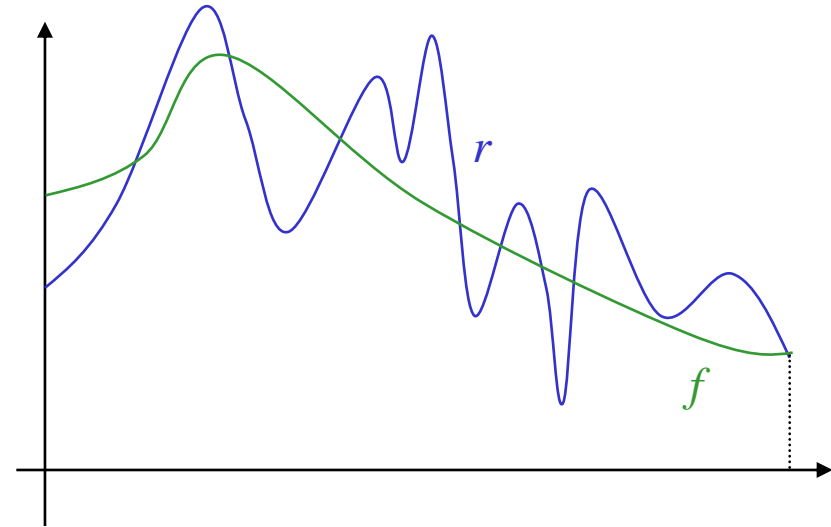
fermeture par reconstruction

# Nivellements

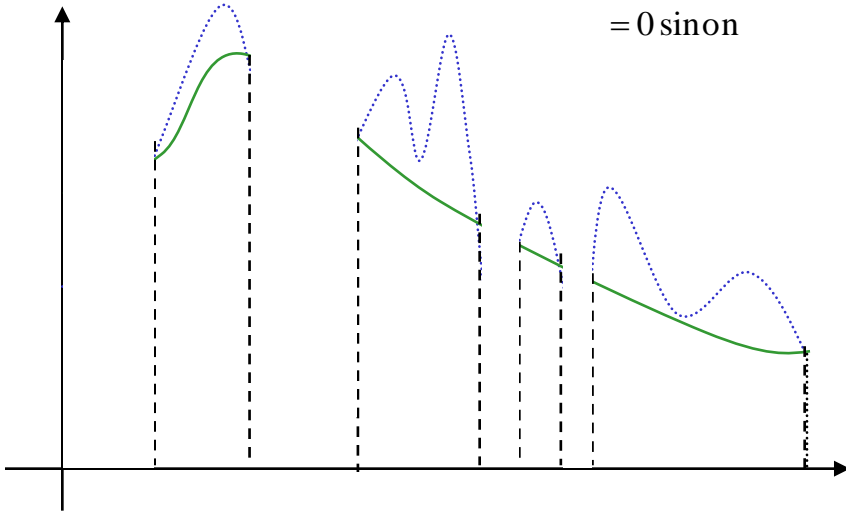
Cas où la fonction marqueur  $f$  et la fonction de référence  $r$  ne sont pas ordonnées

On décompose  $f$  en deux fonctions :

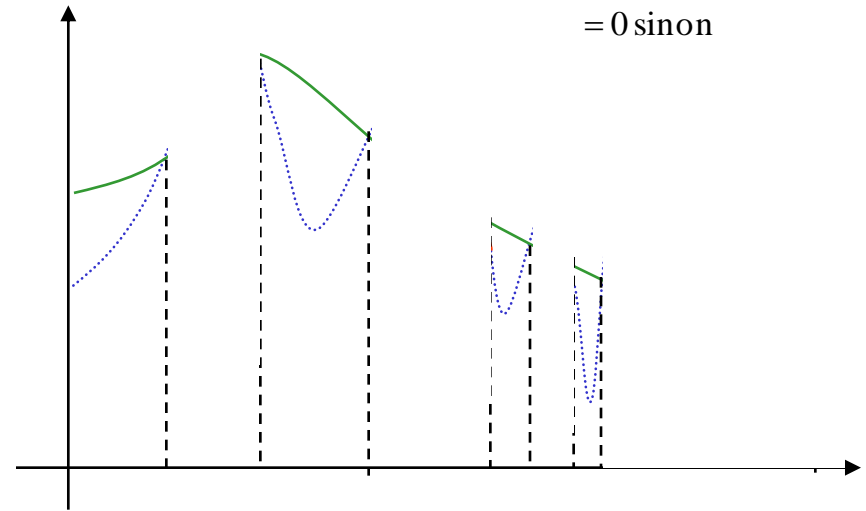
$$\begin{aligned} f &= f_- + f_+ \\ &= f_- \vee f_+ \end{aligned}$$



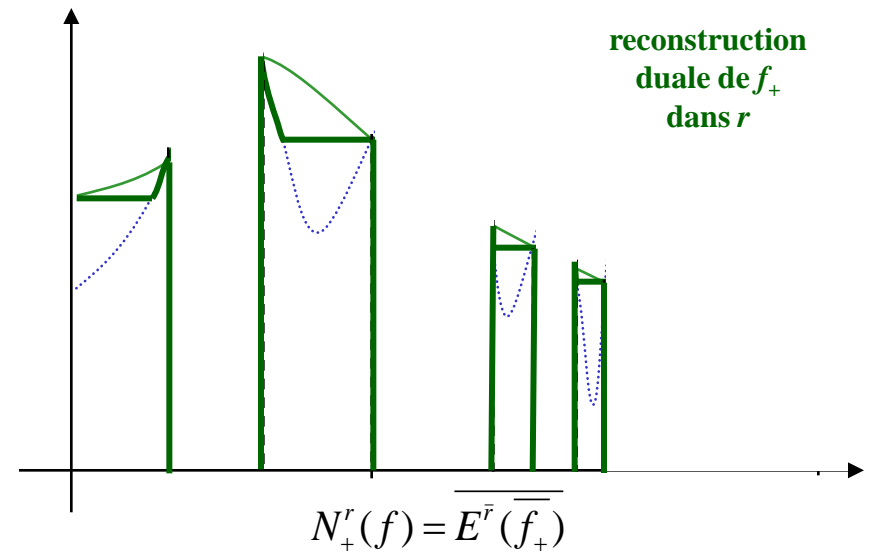
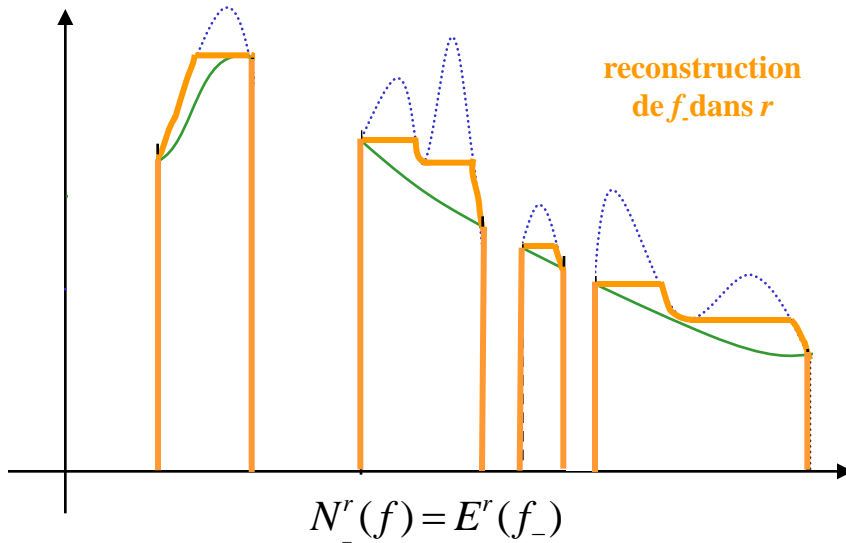
$$\begin{aligned} f_-(x) &= f(x) \text{ si } f(x) \leq r(x) \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$



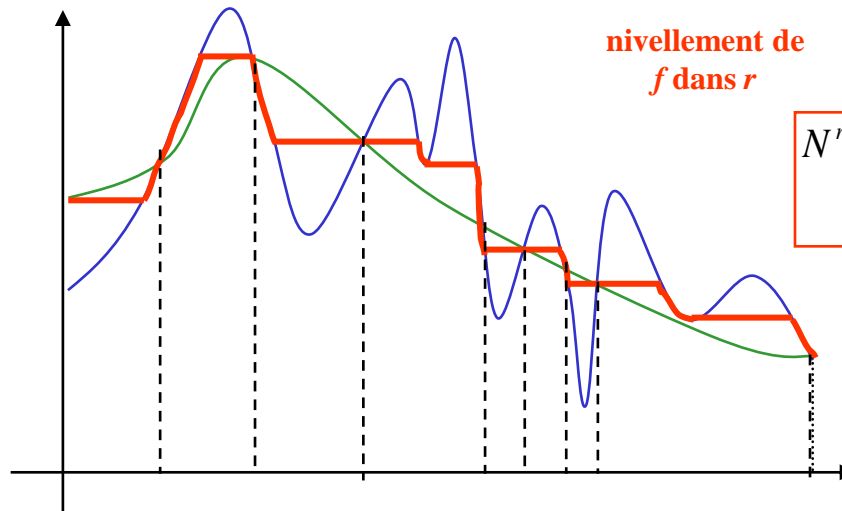
$$\begin{aligned} f_+(x) &= f(x) \text{ si } f(x) > r(x) \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$



# Nivellements



Les *nivellements* définissent des *opérateurs connexes*, qui simplifient l'image par *sélection* des ensembles de niveaux ou de leurs complémentaires :



$$\begin{aligned} N^r(f) &= N_+^r(f) + N_-^r(f) \\ &= N_+^r(f) \vee N_-^r(f) \end{aligned}$$

# Exemples de nivellement



original



filtre gaussien



nivellement



filtre médian



nivellement

# Nouvel espace d'échelles morphologique

Une granulométrie induit un espace d'échelle via les *filtres alternés séquentiels par reconstruction* (i.e. nivellement des filtres alternés séquentiels) :



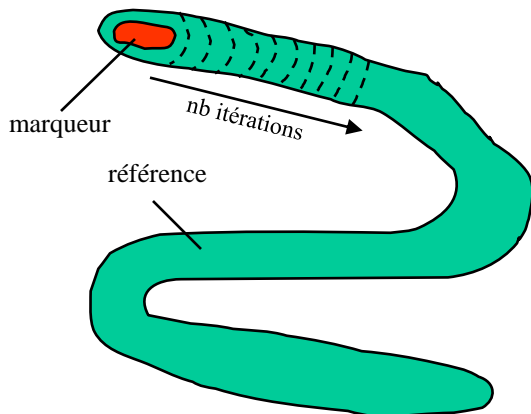
# Point de vue algorithmique

## RECONSTRUCTION NAÏVE

Sur une architecture séquentielle, l'implantation « naïve » de la reconstruction, *i.e.* basée sur la définition :

$$\begin{cases} \delta_g^r(f) = \delta_g(f) \wedge r \\ E_g^r(f) = \sup_{n \geq 0} \{ (\delta_g^r)^n(f) \} \end{cases}$$

conduit à un coût de calcul tout à fait prohibitif, puisque le nombre d'itérations de dilatation géodésique peut être égal au diamètre géodésique des plus grandes composantes connexes :

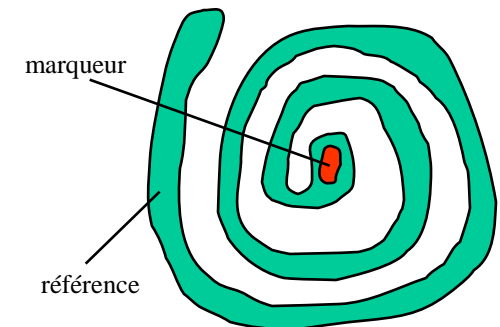


## RECONSTRUCTION SEQUENTIELLE

Une implantation sensiblement plus efficace consiste à « propager » le marqueur au cours d'un balayage séquentiel, direct puis rétrograde :

```
RECONSTRUIT (Marqueur M, Référence R) {  
  Répéter jusqu'à stabilité {  
    // Balayage direct  
    Pour j de 0 à h {  
      Pour i de 0 à w {  
        M(i,j) = MIN(R(i,j), MAX(M(i-1,j), M(i,j-1), M(i,j)));  
      }  
    }  
    // Balayage rétrograde  
    Pour j de h à 0 {  
      Pour i de w à 0 {  
        M(i,j) = MIN(R(i,j), MAX(M(i+1,j), M(i,j+1), M(i,j)));  
      }  
    }  
  }  
}
```

Néanmoins, le nombre d'itérations de double balayage peut parfois être important dans le cas de composantes connexes enroulées, par exemple :

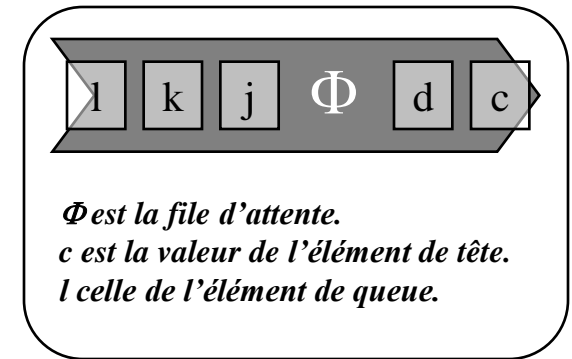




# Point de vue algorithmique

La file d'attente (FIFO) est une structure de donnée particulièrement utile dans les algorithmes morphologiques à base de reconstruction géodésique. Son intérêt est multiple :

- On restreint les calculs aux pixels susceptibles de changer : on examine les pixels qui sont dans la file d'attente, et pas tous les pixels de l'image.
- La terminaison d'un algorithme de relaxation est rendue visible par le fait que la file d'attente est vide. On n'a donc plus besoin de garder une trace explicite des changements pour détecter la convergence.



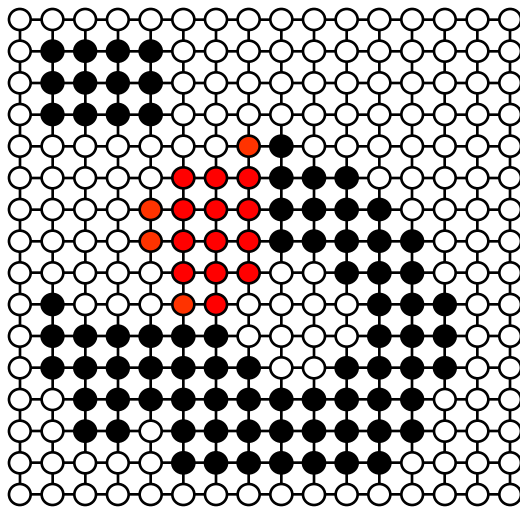
$x = \text{pop}(\Phi)$		La fonction <b>POP(Φ)</b> supprime l'élément de tête et renvoie sa valeur, soit $x = c$ .
$\text{push}(\Phi, y)$		La procédure <b>PUSH(y,Φ)</b> ajoute en queue de $\Phi$ un nouvel élément de valeur $y$ , soit $m = y$ .
$\text{empty}(\Phi) == \text{TRUE}$		La fonction <b>empty(Φ)</b> est une fonction booléenne qui renvoie <b>1</b> si et seulement si $\Phi$ est vide.

*La structure de donnée File d'attente et ses fonctions associées.*

# Reconstruction binaire à base de files d'attente

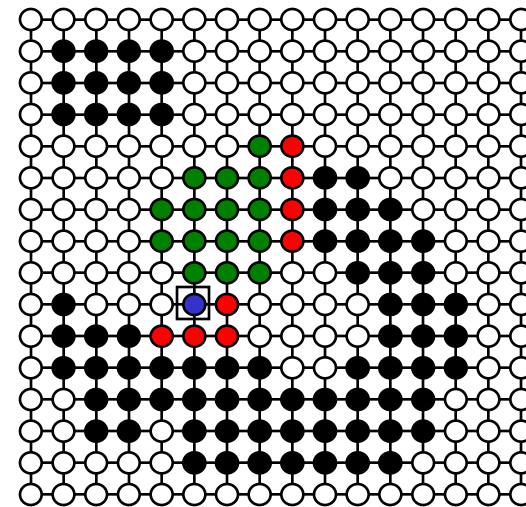
La reconstruction par file d'attente consiste à initialiser la FIFO avec le marqueur, puis pour chaque élément de la FIFO extrait, rajouter ses voisins dans l'image, ainsi jusqu'à convergence (FIFO vide). Le nombre d'opération est proportionnel au nombre de pixels « ajoutés » au marqueur...

*Initialisation*



- Image
- Marqueur
- Complémentaire

*Parcours*



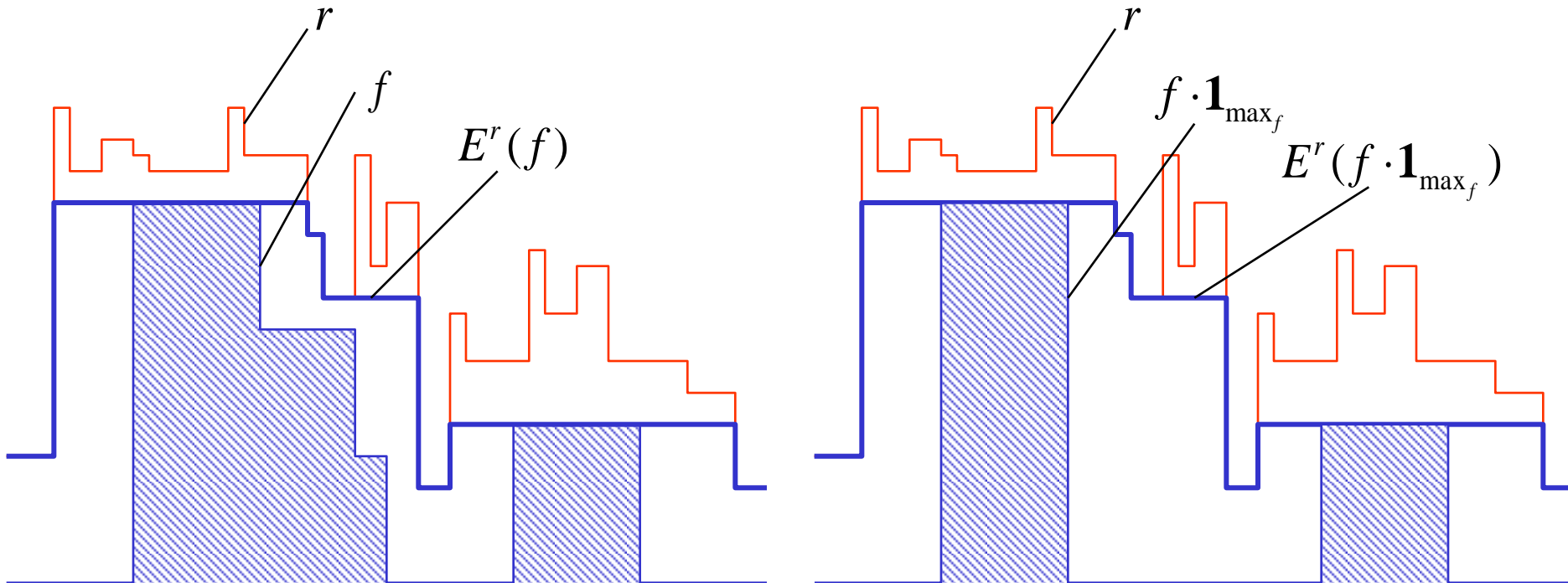
- pixel traité
- pixel à traiter
- pixel en cours

# Reconstruction numérique à base de FIFO

Dans le cas de la reconstruction numérique (fonctionnelle), l'utilisation des FIFO est moins immédiate car il faut déterminer le domaine de stabilité (ensemble des points fixes) de la fonction marqueur  $f$ , au bord duquel la propagation va être initialisée. Ce domaine de stabilité est en fait l'ensemble des *maxima régionaux* de  $f$ . On utilise alors la propriété suivante :

La reconstruction de  $f$  est la même que la reconstruction de la restriction de  $f$  à ses maxima locaux :

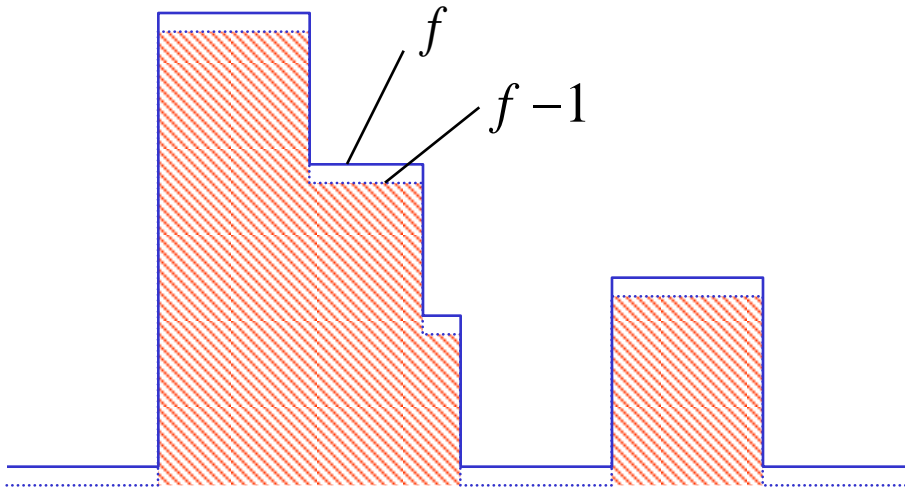
$$E^r(f) = E^r(f \cdot \mathbf{1}_{\max_f})$$



# Reconstruction numérique à base de FIFO

(1) La première étape consiste donc à calculer les maxima régionaux de  $f$  :

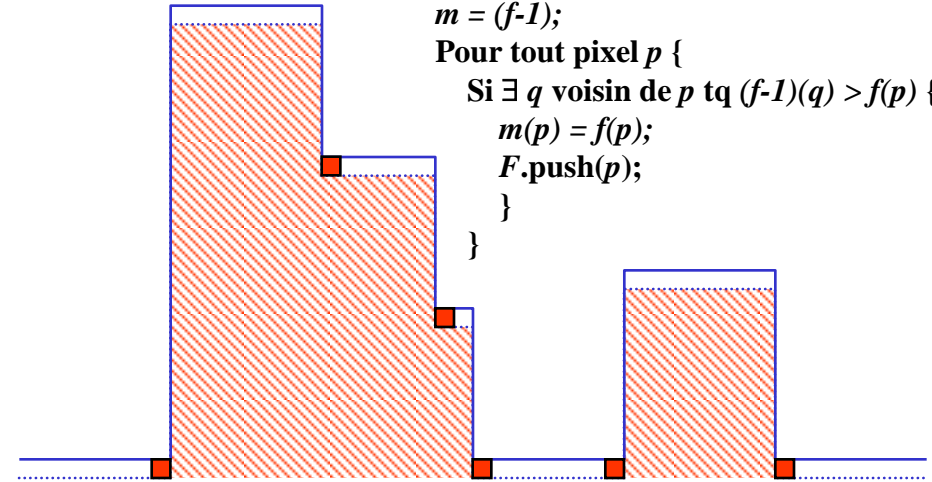
Pour cela, on reconstruit  $f-1$  sous  $f$  :



Initialisation de la FIFO :

```

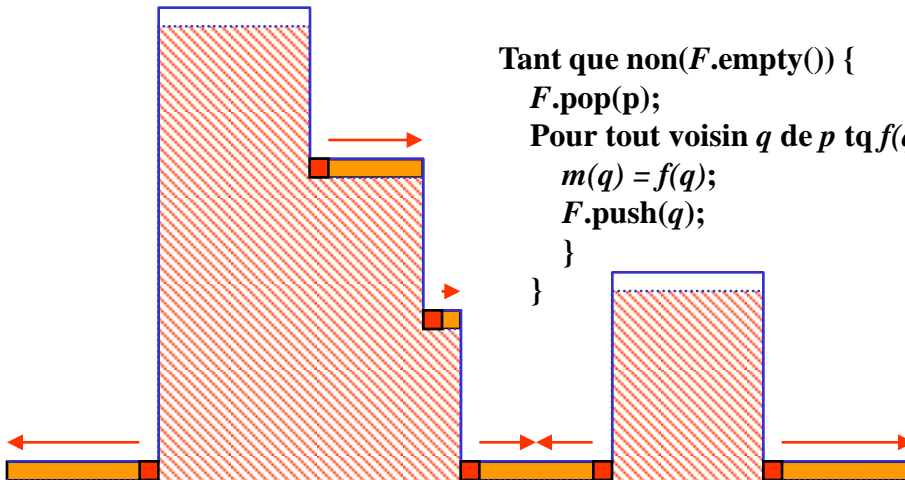
 $m = (f-1);$ 
Pour tout pixel  $p$  {
  Si  $\exists q$  voisin de  $p$  tq  $(f-1)(q) > f(p)$  {
     $m(p) = f(p);$ 
     $F.push(p);$ 
  }
}
  
```



Propagation de la FIFO :

```

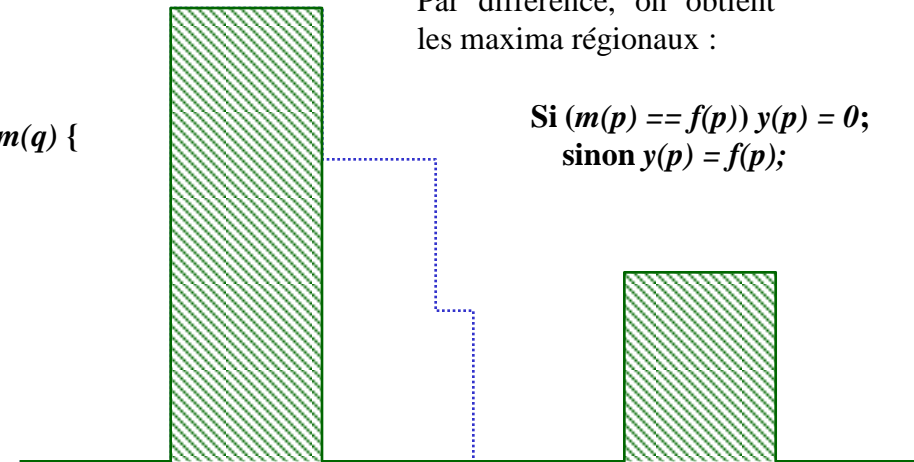
Tant que  $non(F.empty())$  {
   $F.pop(p);$ 
  Pour tout voisin  $q$  de  $p$  tq  $f(q) > m(q)$  {
     $m(q) = f(q);$ 
     $F.push(q);$ 
  }
}
  
```



Par différence, on obtient les maxima régionaux :

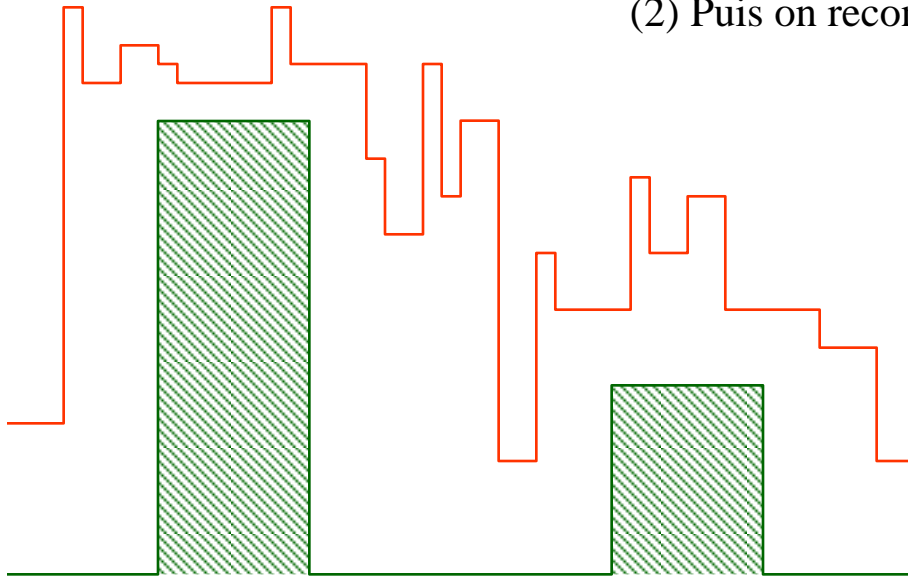
```

Si  $(m(p) == f(p))$   $y(p) = 0;$ 
sinon  $y(p) = f(p);$ 
  
```



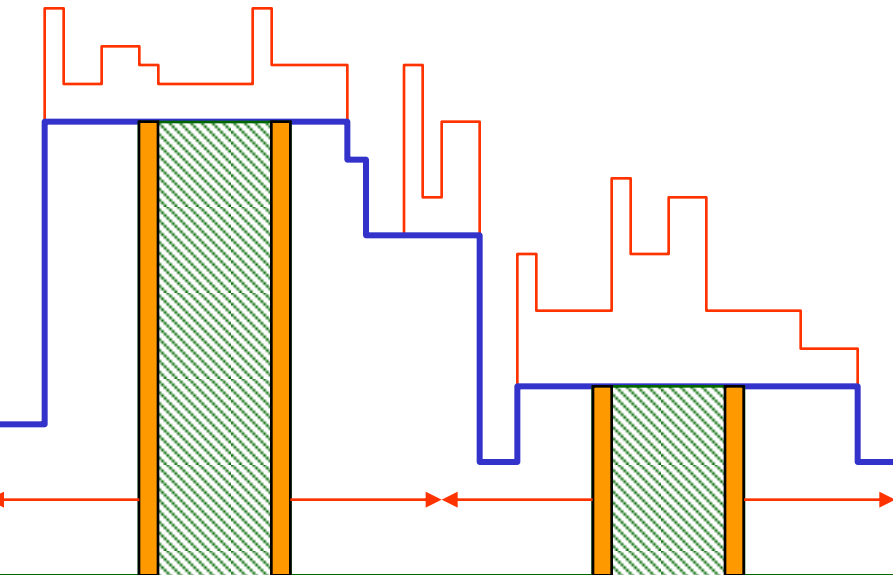
# Reconstruction numérique à base de FIFO

(2) Puis on reconstruit  $\max_f$  sous  $r$  :



```
// Initialisation FIFO
m = max_f;
Pour tout pixel p tq
(m(p) ≠ 0) et (∃ q voisin de p tq m(q) = 0) {
  F.push(p);
}
// Propagation FIFO
Tant que non(F.empty()) {
  F.pop(p);
  Pour tout voisin q de p tq m(p) > m(q) {
    m(q) = MIN(f(q), m(p));
    F.push(q);
  }
}
```

Le coût de calcul de la reconstruction numérique par FIFO est donc obtenu par un nombre constant de parcours d'images : 2 balayages complets pour les initialisations de FIFO, et 2 parcours de FIFO où les points ne sont examinés qu'une fois en général (2 ou 3 dans des cas extrêmes où 2 ou plusieurs maxima régionaux sont très proches).



# Géodésie / Opérateurs Connexes – Conclusion

## A RETENIR POUR CE COURS :

- Reconstruction ensembliste  $\leftrightarrow$  Composantes Connexes
- Reconstruction fonctionnelle  $\leftrightarrow$  Maxima Régionaux
- Filtres connexes : ouvertures par reconstruction, nivellements
- Utilisation des Files d'Attente pour les opérateurs connexes