Logique et IA symbolique - Exercices

1 Logique propositionnelle, fusion, révision

On considère un langage propositionnel dont les variables a, b, c, d... représentent des préférences d'invidus, et les connecteurs classiques de la logique propositionnelle $\neg$ (négation / non), $\wedge$ (conjonction / et), $\vee$ (disjonction / ou), $\rightarrow$ (implication), $\leftrightarrow$ (double implication). Les préférences peuvent porter sur le choix d'auteurs ou de livres à lire pour un club de lecture, sur le menu d'un repas, etc. Quatre personnes expriment leurs préférences par les formules suivantes :

— $\varphi_1 = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee d$
— $\varphi_2 = \neg a \wedge \neg d$
— $\varphi_3 = (b \rightarrow \neg a) \wedge \neg d$
— $\varphi_4 = a \wedge \neg(b \rightarrow a)$

1. Exprimer les préférences de ces quatre personnes en langage naturel, en choisissant un domaine sur lequel portent les préférences.
2. Montrer que chacune des formules $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ est satisfiable (pour chaque formule il existe un modèle, c'est-à-dire une instanciation des variables, qui la satisfait).
3. Montrer que φ_4 n'a pas de modèle. Dans la suite, on ne considère plus φ_4.
4. Montrer que $\varphi_1 \wedge \varphi_3$ est satisfiable en utilisant la méthode par tableau, et en donner un modèle ω.
5. La conjonction $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ est-elle satisfiable ?
6. Comment la 2e personne pourrait-elle modifier ses préférences pour qu'elles deviennent consistantes avec φ_1 et φ_3 ?
7. On considère la distance de Hamming d_H entre deux modèles, définie comme le nombre de variables instanciées différemment dans ces deux modèles. On définit la distance d'un modèle ω à une formule φ par $d(\omega, \varphi) = \min_{\omega' \models \varphi} d_H(\omega, \omega')$. Quelle est la distance $d(\omega, \varphi_2)$ où ω est défini par $v(a) = 1, v(b) = 0, v(c) = 1, v(d) = 0$ (v désigne l'instanciation des variables) ?
8. Comment peut-on réviser φ_2 par $\varphi_1 \wedge \varphi_3$?
9. On apprend une nouvelle information : les préférences pour a doivent être exclues. Que deviennent alors les préférences φ_i des individus ?

2 Apprentissage symbolique et analyse formelle de concepts

On considère des lieux possibles de vacances en hiver x_1 = île des Caraïbes, x_2 = Alpes, x_3 = Berlin, qui constituent les objets d'un contexte formel, dont l'ensemble est noté G. Ces objets sont caractérisés par des attributs y_1 = mer ou lac, y_2 = soleil, y_3 = neige, y_4 = altitude, y_5 = musées, dont l'ensemble est noté M. Le contexte formel est défini par la table suivante :

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	×	×			
x_2	×	×	×	×	
x_3		×	×		×

On rappelle que pour un sous-ensemble d'objets X de G et un sous-ensemble d'attributs Y de M, on définit

$$\alpha(X) = \{m \in M \mid \forall g \in X, (g,m) \in I\}$$
$$\beta(Y) = \{g \in G \mid \forall m \in Y, (g,m) \in I\}$$

et (X,Y) est un concept formel si et seulement si $\alpha(X) = Y$ et $\beta(Y) = X$. On rappelle également que α et β forment une connexion de Galois :

$$\forall X \subseteq G, \forall Y \subseteq M, Y \subseteq \alpha(X) \Leftrightarrow X \subseteq \beta(Y) \tag{1}$$

1. Calculer $\alpha(\{x_1\})$, $\beta(\alpha(\{x_1\}))$ et $\alpha(\beta(\alpha(\{x_1\})))$. En déduire que $(\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\})$ est un concept formel.
2. Déterminer tous les concepts formels et tracer le treillis de concepts correspondant.
3. Montrer, à partir de la définition de α que $\forall X \subseteq G, \forall X' \subseteq G,\ X \subseteq X' \Rightarrow \alpha(X') \subseteq \alpha(X)$.
4. Montrer que $\forall X \subseteq G,\ X \subseteq \beta(\alpha(X))$. Indication : on pourra utiliser le fait que $\alpha(X) \subseteq \alpha(X)$ et l'équation 1.
5. Montrer que $\alpha\beta\alpha = \alpha$.
6. Dans le treillis de concepts, la conjonction entre deux concepts (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) est définie par :
$$(X,Y) = \big(X_1 \cap X_2, \alpha\big(\beta(Y_1 \cup Y_2)\big)\big)$$
Montrer que (X,Y) est bien un concept formel.

3 Méréotologie

On rappelle que les relations de méréotopologie sont définies pour des variables x, y, z..., représentant de manière abstraite des régions de l'espace, à partir d'un prédicat de connexion C en logique du premier ordre. Les relations RCC-8 sont données dans le tableau suivant :

$DC(x,y)$	x is disconnected from y	$\neg C(x,y)$
$P(x,y)$	x is a part of y	$\forall z, C(z,x) \rightarrow C(z,y)$
$PP(x,y)$	x is a proper part of y	$P(x,y) \wedge \neg P(y,x)$
$EQ(x,y)$	x is identical with y	$P(x,y) \wedge P(y,x)$
$O(x,y)$	x overlaps y	$\exists z, P(z,x) \wedge P(z,y)$
$DR(x,y)$	x is discrete from y	$\neg O(x,y)$
$PO(x,y)$	x partially overlaps y	$O(x,y) \wedge \neg P(x,y) \wedge \neg P(y,x)$
$EC(x,y)$	x is externally connected to y	$C(x,y) \wedge \neg O(x,y)$
$TPP(x,y)$	x is a tangential proper part of y	$PP(x,y) \wedge \exists z[EC(z,x) \wedge EC(z,y)$
$NTPP(x,y)$	x is a non tangential proper part of y	$PP(x,y) \wedge \neg \exists z[EC(z,x) \wedge EC(z,y)]$

Soit la formule $PP(x,y) \wedge O(z,y) \wedge DC(x,z) \wedge TPP(t,y) \wedge EC(t,x)$. Montrer que cette formule a un modèle, c'est-à-dire qu'il existe une configuration spatiale de régions (dans le plan) qui la satisfait.

4 Logique modale et raisonnement spatial

On considère une logique modale dont les variables sont notées p, q..., munie des connecteurs de la logique propositionnelle et des deux modalités $\Box$ et $\Diamond$. Les mondes possibles, notés ω, ω'..., représentent des régions de l'espace. Leur ensemble est noté W. On définit une relation d'accessibilité R ayant la signification spatiale suivante : $R(\omega, \omega')$ si et seulement si on peut aller de la région ω à la région ω' (ω' est accessible depuis ω). On rappelle les relations sémantiques suivantes pour un modèle $\mathcal{M}$:

— $\mathcal{M} \models_\omega \Box A$ si et seulement si $\omega R t$ implique $\mathcal{M} \models_t A$ pour tout $t \in W$

— $\mathcal{M} \models_\omega \Diamond A$ si et seulement si $\mathcal{M} \models_t A$ pour au moins un $t \in W$ tel que $\omega R t$

On considère l'exemple de la figure 1, où p, q, r sont des variables, $W = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ (chaque monde étant représenté par un rectangle), $R = \{(\omega_1, \omega_2), (\omega_2, \omega_2), (\omega_2, \omega_3), (\omega_3, \omega_2), (\omega_3, \omega_4), (\omega_1, \omega_4)\}$ (relation d'accessibilité, représentée par les flèches), et la fonction V donnant les mondes dans lesquels une variable est vraie est définie par $V(p) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}$, $V(q) = \{\omega_1\}$, $V(r) = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$. On considère le modèle $\mathcal{M} = (W, R, V)$.

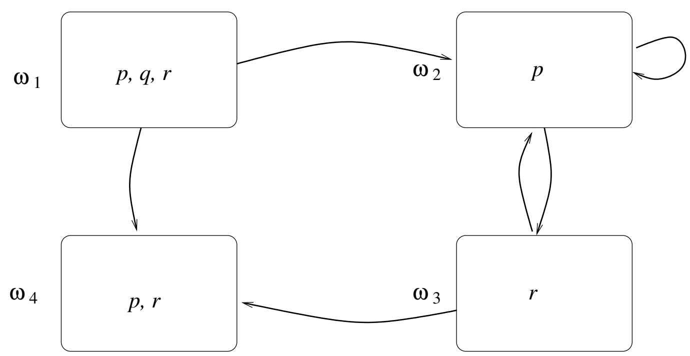

FIGURE 1 – Exemple de relation d'accessibilité.

1. Expliquer la signification de $\Box$ et $\Diamond$ à partir de leurs définitions sémantiques.
2. La relation R de l'exemple est-elle réflexive ?
3. Le schéma $T : \Box A \to A$ est-il valide ?
4. Montrer que $\mathcal{M} \models_{\omega_1} \Box p$.
5. Montrer que $\mathcal{M} \models_{\omega_1} \Diamond(r \wedge \Box q)$.