

# Chapitre 6

## Morphologie mathématique

Chapitre rédigé par Isabelle BLOCH

### 6.1 Introduction et préliminaires

La morphologie mathématique est une théorie essentiellement non linéaire, utilisée en particulier en analyse d'images, dont le but est l'étude des objets en fonction de leur forme, de leur taille, des relations avec leur voisinage (en particulier topologiques), de leur texture, et de leurs niveaux de gris ou de leur couleur. Par les transformations qu'elle propose, elle se situe à différents niveaux du traitement d'images (filtrage, segmentation, mesures, analyse de texture) et fournit ainsi des outils pour la reconnaissance des formes. La morphologie mathématique, développée à l'origine pour l'étude des matériaux poreux, trouve maintenant ses applications dans de nombreux domaines du traitement d'images, aussi bien 2D que 3D, en biologie et cytologie quantitative, en imagerie médicale, en imagerie aérienne et satellitaire, en robotique et vision par ordinateur, en contrôle industriel non destructif, dans les études sur les documents et les œuvres d'art. Hors du domaine du traitement des images, on trouve des applications par exemple en analyse de données, ou encore en théorie des jeux.

La morphologie mathématique a été développée à l'origine à l'École des Mines de Paris. Elle repose essentiellement sur les travaux de G. Matheron effectués dans les années 60-70, puis sur ceux de J. Serra et de son équipe. Depuis ces premiers développements, elle a pris une ampleur internationale et plusieurs équipes s'y consacrent.

Elle s'appuie sur la théorie des ensembles, des treillis, de la topologie des fermés et des probabilités. Elle s'applique ainsi à des structures algébriques variées (ensembles, fonctions, mais également ensembles flous ou propositions logiques), pouvant avoir un caractère aléatoire (pour l'analyse de textures par exemple).

Ce chapitre n'est qu'une introduction à la morphologie mathématique. Il en donne succinctement les bases mathématiques, décrit les opérations de base et leurs principales propriétés, et présente des exemples d'outils de filtrage et de segmentation qui en sont déduits. On se placera de manière générale dans l'espace  $\mathbb{R}^n$ , puis on définira les notions discrètes associées, dans  $\mathbb{Z}^n$  ou  $\mathbb{N}^n$ . Une présentation détaillée peut être trouvée dans les ouvrages [Serra, 1982a, Serra (Ed.), 1988, Dougherty (Ed.), 1992, Schmitt et Mattioli, 1994a, Soille, 1999].

On trouve à la base des transformations de morphologie mathématique quatre principes fondamentaux qui guident leur construction et qui sont vérifiés pour la plupart des opérations. Ils sont exprimés ci-dessous pour une opération  $\Psi$  quelconque, agissant sur un ensemble ou une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Compatibilité avec les translations :** Ce principe exprime l'indépendance des transformations par rapport à

l'origine de l'espace<sup>1</sup> :

$$\forall t \in \mathbb{R}^n, \Psi(f + t) = \Psi(f) + t.$$

**Compatibilité avec les homothéties :** Ce principe assure l'indépendance des transformations par rapport à un paramètre d'échelle :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \Psi(\lambda f) = \lambda \Psi(f).$$

**Connaissance locale :** Pour connaître  $\Psi(f)$  dans un domaine  $Z'$  de  $\mathbb{R}^n$ , il suffit de connaître  $f$  dans un domaine  $Z$  de  $\mathbb{R}^n$  :

$$\forall Z' \subset \mathbb{R}^n, Z' \text{ borné}, \exists Z \subset \mathbb{R}^n, Z \text{ borné}, [\Psi(f \cap Z)] \cap Z' = \Psi(f) \cap Z',$$

où  $f \cap Z$  désigne la restriction de  $f$  au domaine  $Z$ .

**Semi-continuité :** ce principe (voir définitions 18 et 22) assure la robustesse des transformations.

Outre ces propriétés fondamentales, les opérateurs de morphologie mathématique peuvent avoir des propriétés algébriques dont les principales sont définies ci-dessous.

**Définition 1. Croissance :** Une transformation  $\Psi$  sur des ensembles de  $\mathbb{R}^n$  ou des fonctions de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  est croissante si :

$$\forall X, Y, X \subset Y \Rightarrow \Psi(X) \subset \Psi(Y),$$

$$\forall f, g, f \leq g \Rightarrow \Psi(f) \leq \Psi(g).$$

**Définition 2. Extensivité et anti-extensivité :** Une transformation  $\Psi$  sur des ensembles de  $\mathbb{R}^n$  ou des fonctions de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  est extensive si :

$$\forall X, X \subset \Psi(X),$$

$$\forall f, f \leq \Psi(f).$$

$\Psi$  est anti-extensive si :

$$\forall X, \Psi(X) \subset X,$$

$$\forall f, \Psi(f) \leq f.$$

**Définition 3. Idempotence :** Une transformation  $\Psi$  sur des ensembles de  $\mathbb{R}^n$  ou des fonctions de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  est idempotente si :

$$\forall X, \Psi[\Psi(X)] = \Psi(X),$$

$$\forall f, \Psi[\Psi(f)] = \Psi(f).$$

**Définition 4. Dualité :** Deux transformations  $\Psi$  et  $\Phi$  sur des ensembles de  $\mathbb{R}^n$  ou des fonctions de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  sont duales par rapport à la complémentation si :

$$\forall X, \Psi(X^C) = [\Phi(X)]^C,$$

où  $X^C$  désigne le complémentaire de  $X$  dans  $\mathbb{R}^n$  (c'est-à-dire  $\mathbb{R}^n \setminus X$ ),

$$\forall f, \Psi(-f) = -\Phi(f).$$

<sup>1</sup>Cette propriété est appelée aussi invariance spatiale dans d'autres théories du traitement d'images.

Notons que pour des images numériques, représentées par des fonctions à valeurs positives et bornées par une valeur maximale  $M$ , la dualité s'exprime par :

$$\Psi(M - f) = M - \Phi(f).$$

Nous verrons dans la suite que ce principe de dualité exprime le fait que deux opérations, qui ne sont pas l'inverse l'une de l'autre, ont des effets contraires (les opérations de morphologie mathématique étant généralement non inversibles).

Pour décrire de manière très synthétique la boîte à outils de la morphologie mathématique, il faut retenir les points suivants :

- les transformations sont non linéaires, elles sont fondées sur des opérations de type  $\sup$  et  $\inf$  ;
- les transformations sont généralement non inversibles, et elles perdent donc de l'information ; le travail du morphologue consiste alors à déterminer les transformations adaptées à son problème, c'est-à-dire qui vont simplifier les images en retenant l'information pertinente ;
- des propriétés analytiques et algébriques sont attachées aux opérations, ce qui permet d'assurer des propriétés précises sur les objets ou images issues des transformations ; c'est sur ces propriétés que l'on s'appuie pour enchaîner les transformations afin de résoudre un problème particulier ;
- aux transformations sont également associés des algorithmes, qui permettent de les appliquer de manière efficace.

Les parties suivantes s'attachent à décrire plus précisément ces concepts pour les principales opérations morphologiques.

## 6.2 Les quatre opérations

### 6.2.1 Notion d'élément structurant et cadre ensembliste

Des premières applications à l'étude des milieux poreux est née l'approche ensembliste de la morphologie mathématique. Elle s'applique à des images ou objets binaires et les étudie sous l'angle de leurs relations avec un ensemble fixé. Cet ensemble, dont on choisit la forme et la taille, est appelé élément structurant. Les relations sont de type ensembliste (réunion, intersection, etc.). Étant donné un élément structurant et une relation, l'image (ou l'objet) de départ est transformé en translatant l'élément structurant en tout point et en examinant si la relation entre l'objet et l'élément structurant translaté est vérifiée. Les propriétés des opérations ainsi définies et des images transformées découlent de la théorie des ensembles. C'est selon ce principe que seront par exemple définies la dilatation et l'érosion binaires. L'élément structurant définit un voisinage autour de chaque point de l'image et ce sont donc des propriétés locales des objets qui sont ainsi mises en évidence.

En pratique, les images sont définies sur des trames discrètes. Le problème consiste alors à étudier dans quelle mesure les définitions et les propriétés des transformations décrites pour l'espace continu sont transposables à un espace discret.

Les trames les plus utilisées en dimension 2 sont la trame carrée (ou rectangulaire) et la trame hexagonale où les points sont disposés en quinconce. Plus de détails peuvent être trouvés dans la partie sur la géométrie discrète (chapitre 4) ou dans les références qui y sont citées.

Les voisinages élémentaires associés aux différentes trames constituent les éléments structurants élémentaires (de taille 1) utilisés en morphologie mathématique. Effectuer une dilatation de taille  $n$  signifie alors effectuer  $n$  fois une itération de taille 1, par un de ces éléments structurants.

### 6.2.2 Erosion et dilatation binaires

Les définitions qui suivent reposent sur la définition classique de l'addition de Minkowski de deux ensembles, qui correspond à l'addition vectorielle :

$$X \oplus Y = \{x + y / x \in X, y \in Y\}. \quad (6.1)$$

Dans toute cette partie, on considérera des ensembles de  $\mathbb{R}^n$ . Un élément structurant est également un ensemble dont on se donne la forme et la taille, et dont on particularise un point (l'origine) qu'on appelle le centre (qui n'est pas forcément le centre géométrique).

**Définition 5. Dilatation binaire :** La dilatation binaire d'un ensemble  $X$  par un élément structurant  $B$  est définie comme l'ensemble obtenu par addition de Minkowski de  $X$  par le symétrique  $\check{B}$  de  $B$  par rapport à son centre<sup>2</sup> :

$$D(X, B) = X \oplus \check{B} = \{x + y / x \in X, y \in \check{B}\}. \quad (6.2)$$

L'équation 6.2 est équivalente aux expressions suivantes :

$$\begin{aligned} D(X, B) &= \bigcup_{x \in X} \check{B}_x \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n / B_x \cap X \neq \emptyset\}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

où  $B_x$  désigne le translaté de l'élément structurant au point  $x$  (c'est-à-dire le centre de l'élément structurant coïncide avec  $x$ ).

Dans cette formulation (équation 6.3) apparaissent clairement les concepts de l'approche ensembliste : ici la relation imposée entre la forme étudiée et l'élément structurant est l'intersection. Ainsi, un point appartient à l'objet résultat si l'élément structurant centré en ce point intersecte l'objet initial.

**Propriétés de la dilatation.** La dilatation a les propriétés suivantes (les démonstrations sont immédiates en utilisant les formules 6.2 ou 6.3) :

- elle est extensive ( $X \subset D(X, B)$ ) si le centre de  $B$  appartient à  $B$ ,
- elle est croissante ( $X \subset Y \Rightarrow D(X, B) \subset D(Y, B)$ ),
- $B \subset B' \Rightarrow D(X, B) \subset D(X, B')$ ,
- elle commute avec la réunion mais pas avec l'intersection :

$$D(X, B \cup B') = D(X, B) \cup D(X, B'),$$

$$D(X, B \cap B') \subset D(X, B) \cap D(X, B'),$$

- elle vérifie une relation d'itération (associativité) :

$$D[D(X, B), B'] = D(X, B \oplus B').$$

Ces propriétés algébriques ont des conséquences importantes sur les applications de cette transformation, à la fois du point de vue algorithmique et du point de vue des propriétés des objets obtenus. Par exemple, la relation d'itération permet de calculer une dilatation par un disque de rayon 2 soit directement, soit comme une suite de deux dilatations par un disque de rayon 1.

De plus, la dilatation vérifie les 4 principes fondamentaux donnés en introduction.

**Exemples.** La dilatation par un segment centré à une de ses extrémités a pour effet  $\uparrow\uparrow$  d'étendre  $\downarrow\downarrow$  l'objet dans la direction opposée à celle du segment (alors que l'addition de Minkowski étend l'objet dans la direction du

<sup>2</sup>Il existe des définitions légèrement différentes, utilisées en particulier aux États-Unis, pour lesquelles la dilatation est égale à l'addition de Minkowski. Cela implique des modifications des propriétés, en particulier dans les relations de dualité.

segment). Notons que la distinction entre addition de Minkowski et dilatation tombe dès qu'on utilise des éléments structurants symétriques, ce qui est souvent le cas.

La dilatation par un disque a pour effet d'augmenter la taille des objets selon la taille du disque, de relier entre elles les composantes proches et de boucher les petits trous (plus petits que l'élément structurant).

La figure 6.1 illustre ces effets.

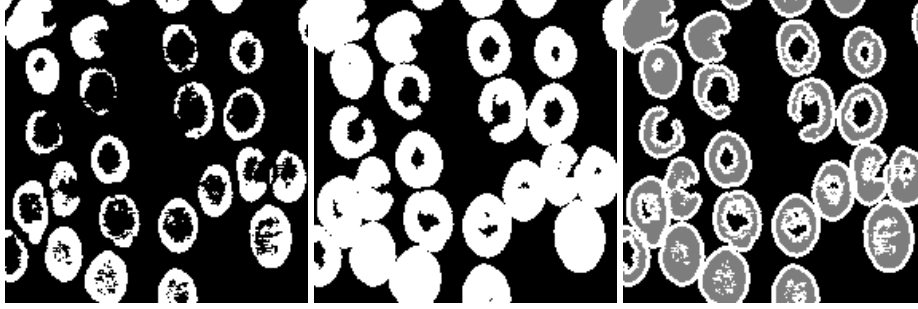


FIG. 6.1 – Exemple de dilatation binaire (de gauche à droite : image initiale, dilatation par un disque de taille 3, différence : en blanc, les parties rajoutées par la dilatation).

**Définition 6. Érosion binaire :** L'érosion d'un ensemble  $X$  par un élément structurant  $B$  est définie par :

$$E(X, B) = \{x \in \mathbb{R}^n / B_x \subset X\} \quad (6.4)$$

$$= \{x / \forall y \in B, x + y \in X\} = X \ominus \check{B}. \quad (6.5)$$

L'équation 6.4 correspond à l'approche ensembliste, où cette fois la relation imposée entre l'élément structurant et la forme est l'inclusion. L'équation 6.5 fait référence à la soustraction de Minkowski notée  $\ominus$ .

**Propriétés de l'érosion.** La propriété essentielle de l'érosion est qu'elle est la transformation duale de la dilatation par rapport à la complémentation :

$$E(X, B) = [D(X^c, B)]^c. \quad (6.6)$$

Ainsi, il est équivalent d'éroder un objet ou de dilater son complémentaire. Cette propriété peut également être présentée comme définition, dont on déduit alors les expressions 6.4 et 6.5.

L'érosion a les propriétés algébriques suivantes (elles peuvent être démontrées soit directement à partir des formules 6.4 et 6.5, soit déduites de celles de la dilatation grâce à la formule de dualité 6.6) :

- elle est anti-extensive si le centre de  $B$  appartient à  $B$ ,
- elle est croissante,
- $B \subset B' \Rightarrow E(X, B') \subset E(X, B)$ ,
- elle satisfait les relations suivantes par rapport à la réunion et à l'intersection (en particulier, elle commute avec l'intersection) :

$$E[(X \cap Y), B] = E(X, B) \cap E(Y, B),$$

$$E[(X \cup Y), B] \supset E(X, B) \cup E(Y, B),$$

$$E[X, (B \cup B')] = E(X, B) \cap E(X, B'),$$

$$E[X, (B \cap B')] \supset E(X, B) \cup E(X, B'),$$

- elle satisfait la relation d'itération suivante :

$$E[E(X, B), B'] = E(X, B \oplus B'),$$

- la succession d’une érosion et d’une dilatation vérifie l’inclusion suivante :

$$D[E(X, B), B'] \subset E[D(X, B'), B]. \quad (6.7)$$

De plus, l’érosion vérifie les 4 principes énoncés en introduction.

**Exemples.** L’érosion par un disque a les effets suivants : l’objet est diminué selon la taille de l’élément structurant, les composantes connexes de l’objet plus petites que l’élément structurant sont supprimées, les parties des objets reliées par des isthmes plus fins que l’élément structurant sont déconnectées.

La figure 6.2 illustre ces effets.

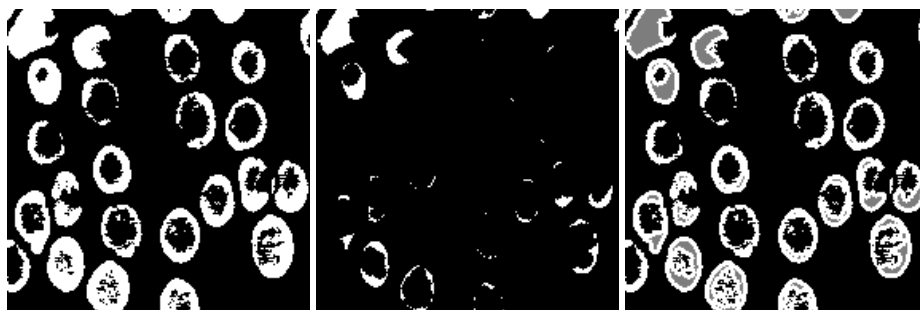


FIG. 6.2 – Exemple d’érosion binaire (de gauche à droite : image initiale, érosion par un disque de taille 3, différence : en blanc, les parties supprimées par l’érosion).

**Liens avec la fonction distance.** La fonction distance (voir chapitre 4) a de nombreuses applications en morphologie mathématique (outre toutes les applications nécessitant une estimation de la distance entre objets comme le recalage). En voici quelques exemples :

- elle permet d’effectuer très rapidement des dilations et érosions de taille quelconque : en effet, la fonction distance calculée avec les masques de la figure 4.33 a et b (chapitre 4) fournit des courbes de niveaux autour de l’objet qui correspondent exactement aux points qui seraient rajoutés à l’objet par des dilations successives par les éléments structurants élémentaires ; il suffit alors de seuiller la fonction distance à la taille de dilatation souhaitée pour obtenir, en deux passes seulement, le dilaté (pour l’érosion, on procède de même, en calculant cette fois la distance des points de l’objet au complémentaire) ;
- elle permet de réaliser des dilations et érosions par des éléments structurants proches d’un disque (par exemple avec le masque de la figure 4.33 d, chapitre 4) ;
- elle permet d’obtenir très rapidement les érodés ultimes d’un ensemble d’objets  $X$  (c’est-à-dire les composantes connexes de  $E(X, B_r)$  qui disparaissent par une érosion de taille  $r + 1$ ), comme maxima régionaux de la fonction distance ;
- elle peut être utilisée pour le calcul de squelettes.

La figure 6.3 montre que les courbes d’iso-distances à l’intérieur des objets sont les érodés successifs de ces objets.

### 6.2.3 Erosion et dilatation de fonctions

La généralisation des transformations binaires à des transformations numériques (sur des fonctions) peut s’effectuer de deux manières :

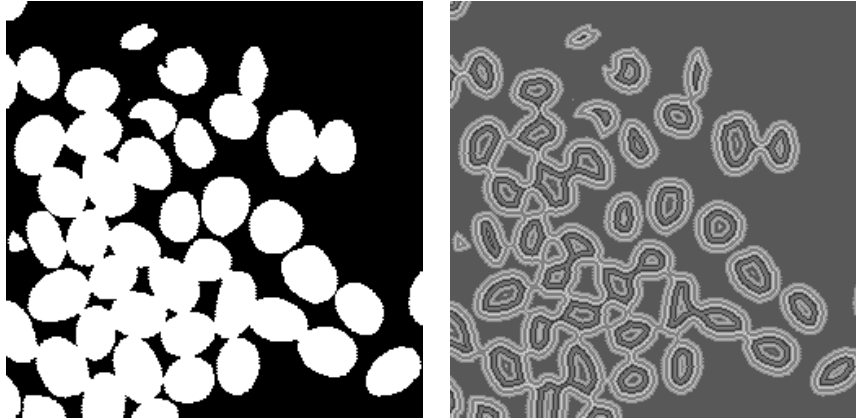


FIG. 6.3 – Les courbes d’iso-distances à l’intérieur des objets sont les érodés successifs.

1. soit en remplaçant dans les définitions tous les concepts ensemblistes par leurs équivalents fonctionnels :

$$\begin{aligned}
 \cup &\rightarrow \sup / \vee \\
 \cap &\rightarrow \inf / \wedge \\
 \subset &\rightarrow \leq \\
 \supset &\rightarrow \geq
 \end{aligned}
 \tag{6.8}$$

2. soit en considérant le sous-graphe de la fonction (voir définition 23) comme un ensemble binaire (dans un espace de dimension  $n + 1$ ) et en lui appliquant les opérations binaires.

Ces deux approches sont équivalentes (pour des fonctions semi-continues supérieurement à valeurs dans  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  et des éléments structurants bornés) mais la première est plus opérationnelle. Les équivalences des expressions 6.8 se retrouveront dans les définitions et les propriétés qui suivent.

Cette généralisation est indispensable pour pouvoir traiter des images à niveaux de gris. Nous considérerons tout d’abord des éléments structurants binaires, puis nous donnerons les définitions générales des transformations sur des fonctions avec des éléments structurants fonctionnels.

**Définition 7. Dilatation fonctionnelle** (*élément structurant binaire*) : La dilatation d’une fonction  $f$  par un élément structurant  $B$  est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad D(f, B)(x) = \sup\{f(y) \mid y \in B_x\}. \tag{6.9}$$

L’équation 6.9 fait apparaître explicitement que les valeurs de  $f$  intervenant dans le résultat de l’opération en un point sont celles prises dans un voisinage de ce point, ce voisinage étant défini par l’élément structurant<sup>3</sup>.

**Propriétés.** La dilatation a les propriétés suivantes (analogues des propriétés de la dilatation binaire) :

- elle est extensive si le centre de  $B$  appartient à  $B$ ,
- elle est croissante,
- $D(f \vee g, B) = D(f, B) \vee D(g, B)$ ,
- $D(f \wedge g, B) \leq D(f, B) \wedge D(g, B)$ ,
- elle vérifie les quatre principes énoncés en introduction.

**Exemples.** Sur une image à niveaux de gris, la dilatation par un disque augmente les niveaux de gris, propage les maxima locaux des niveaux de gris (dans une région correspondant à la taille et à la forme de l’élément structurant).

La figure 6.4 illustre ces effets.

<sup>3</sup>On a le même résultat pour la dilatation binaire.



FIG. 6.4 – Exemple de dilatation numérique (de gauche à droite : image initiale, considérée comme une fonction sur l'espace à deux dimensions, dilatation par un disque de taille 3).

**Définition 8. Érosion fonctionnelle (élément structurant binaire) :** L'érosion d'une fonction  $f$  par un élément structurant  $B$  est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad E(f, B)(x) = \inf\{f(y) / y \in B_x\}. \quad (6.10)$$

Ici encore, la valeur prise en un point dépend uniquement des valeurs de  $f$  dans un voisinage, défini par  $B$ , de ce point.

**Propriétés.** L'érosion a les propriétés suivantes (similaires à celles de l'érosion binaire) :

- elle est duale de la dilatation,
- elle est anti-extensive si le centre de  $B$  appartient à  $B$ ,
- elle est croissante,
- $E(f \vee g, B) \geq E(f, B) \vee E(g, B)$ ,
- $E(f \wedge g, B) = E(f, B) \wedge E(g, B)$ ,
- elle vérifie les quatre principes de l'introduction.

**Exemples.** L'érosion d'une image à niveaux de gris par un disque a pour effet de diminuer les niveaux, et de propager les minima dans une région définie par l'élément structurant.

La figure 6.5 illustre ces effets.

Notons que la dilatation et l'érosion sont des cas particuliers de filtres de rang (voir chapitre 10). Dans un tel filtre, les niveaux de gris des voisins d'un point sont classés par ordre croissant et la valeur de ce point est remplacée par celle d'un rang donné. Le min utilisé dans l'érosion correspond donc à un filtre de rang 1 et le max de la dilatation à un filtre de rang  $p$  (si le voisinage comporte  $p$  points). Cependant ce ne sont pas des filtres au sens morphologique du terme.

**Cas discret.** Une fois les notions de topologie définies sur la trame discrète, la transposition des définitions morphologiques de base ne pose pas de problème. Elles s'expriment de la même manière que dans le cas continu, ou plus simplement puisque les  $\sup$  et les  $\inf$  deviennent des  $\max$  et des  $\min$  lorsque l'élément structurant  $B$  contient un nombre fini de points. Par exemple, la dilatation par un élément structurant de taille 1 en 4-connexité, s'exprime en tout point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  de la trame par :

$$D(f, B)(M) = \max\{f(x, y - 1), f(x - 1, y), f(x, y), f(x + 1, y), f(x, y + 1)\},$$

que  $f$  soit une fonction ou un ensemble. Cette formule fournit en même temps un moyen opérationnel simple pour calculer la dilatation.





FIG. 6.5 – Exemple d'érosion numérique (de gauche à droite : image initiale et érosion par un disque de taille 3).

Il est remarquable de noter que toutes les propriétés de la dilatation, de l'érosion, de l'ouverture et de la fermeture (qui seront vues plus loin) sont encore valables sur une trame discrète (si l'on exclut celles liées à la semi-continuité qui n'ont pas de sens dans ce cas)<sup>4</sup>.

Si la transposition de ces opérations de base est si aisée, c'est que celles-ci impliquent essentiellement des notions ensemblistes (éventuellement généralisées à des fonctions comme nous l'avons vu plus haut) et des concepts topologiques très simples, de voisinage entre points uniquement.

Des transformations plus complexes impliquant des notions topologiques plus globales (préservation de la connexité et de l'homotopie d'un objet par exemple) sont beaucoup plus délicates à transposer. Ce sera le cas par exemple du squelette (voir parties 6.8.3 et 6.8.4) : les définitions continues ont de très bonnes propriétés mais leur transposition directe au cas discret en fait perdre la plupart. On est alors conduit à redéfinir le squelette directement dans l'espace discret, par des procédés qui garantissent les propriétés que l'on veut conserver.

Sans aller chercher des transformations aussi complexes, une simple rotation peut dégrader les propriétés topologiques d'un objet (par exemple lui faire perdre sa connexité, ou faire apparaître des trous là où il n'y en avait pas).

Considérons maintenant des éléments structurants fonctionnels, c'est-à-dire des fonctions  $g$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  telles que  $\{x \in \mathbb{R}^n / g(x) \neq -\infty\}$  est borné.

**Définition 9. Dilatation par une fonction :** La dilatation d'une fonction  $f$  par une fonction  $g$  est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, D(f, g)(x) = \sup\{f(y) + g(y - x) / y \in \mathbb{R}^n\}. \quad (6.11)$$

**Définition 10. Érosion par une fonction :** L'érosion d'une fonction  $f$  par une fonction  $g$  est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, E(f, g)(x) = \inf\{f(y) - g(y - x) / y \in \mathbb{R}^n\}. \quad (6.12)$$

L'intérêt de ces éléments structurants est qu'ils permettent de réaliser des opérations plus fines qu'avec des éléments structurants binaires. Par exemple, il est ainsi possible de modifier un relief (l'écarter par exemple) dans n'importe quelle direction, et pas seulement parallèlement au plan de l'image comme avec des éléments structurants binaires (plans).

<sup>4</sup>Notons que dans l'expression de la dualité entre dilatation et érosion, et entre ouverture et fermeture, l'élément structurant reste le même des deux côtés de l'égalité.

### 6.2.4 Ouverture et fermeture binaires

L'équation 6.7 montre, si on l'exprime pour  $B = B'$ , que la dilatation n'est pas l'inverse de l'érosion. Par exemple, si l'on effectue d'abord une érosion puis une dilatation, les composantes connexes de l'objet qui ont été supprimées par l'érosion (à cause de leur petite taille) ne peuvent plus être recouvertes par la dilatation et sont donc définitivement perdues. On construit donc ainsi une nouvelle transformation par composition d'une érosion et d'une dilatation, appelée ouverture.

**Définition 11. Ouverture binaire :** L'ouverture de l'ensemble  $X$  par l'élément structurant  $B$  est définie par :

$$X_B = D[E(X, B), \check{B}]. \quad (6.13)$$

**Propriétés.** L'ouverture a les propriétés algébriques suivantes :

- elle est anti-extensive ( $X \supset X_B$ )<sup>5</sup>,
- elle est croissante ( $X \subset Y \Rightarrow X_B \subset Y_B$ ),
- elle est idempotente ( $(X_B)_B = X_B$ ).

Ces propriétés sont fondamentales puisqu'elles font de l'ouverture un filtre morphologique.

On a de plus  $B \subset B' \Rightarrow X_{B'} \subset X_B$ , et si  $X_n$  désigne l'ouvert de  $X$  par un élément structurant de taille  $n$ ,  $(X_n)_{n'} = (X_{n'})_n = X_{\max(n, n')}$ .

L'ouverture vérifie les 4 principes fondamentaux (comme composée de deux opérations les satisfaisant).

**Exemples.** L'ouverture a pour effet de supprimer les parties des objets plus petites que l'élément structurant, et de lisser les contours en supprimant les petites excroissances (trop fines pour pouvoir contenir l'élément structurant). C'est l'effet de filtrage décrit algébriquement ci-dessus. Elle ne réduit pas systématiquement toutes les structures comme le fait l'érosion.

La figure 6.6 illustre ces effets.

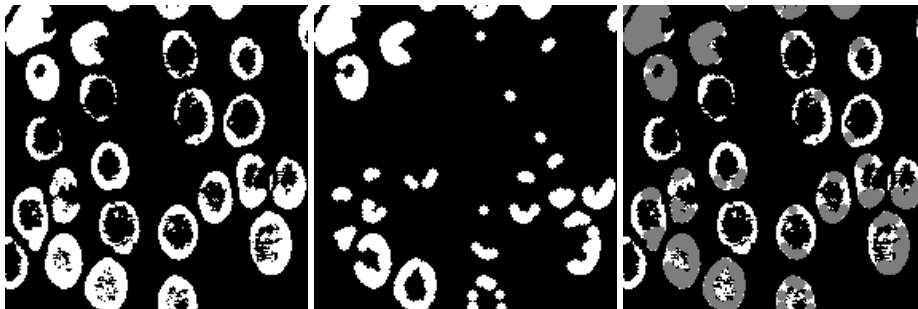


FIG. 6.6 – Exemple d'ouverture binaire (de gauche à droite : image initiale, ouverture par un disque de taille 3, différence : en blanc, les parties supprimées par l'ouverture).

**Définition 12. Fermeture binaire :** La fermeture de l'ensemble  $X$  par l'élément structurant  $B$  est définie par :

$$X^B = E[D(X, B), \check{B}]. \quad (6.14)$$

**Propriétés.** La fermeture a les propriétés algébriques suivantes :

- elle est extensive ( $X \subset X^B$ ),
- elle est croissante,

<sup>5</sup>Contrairement à la dilatation et à l'érosion, cette propriété est vraie sans restriction sur l'élément structurant.

– elle est idempotente.

De même que pour l'ouverture, ces propriétés font de l'ouverture un filtre morphologique.

On a de plus  $B \subset B' \Rightarrow X^B \subset X^{B'}$ , et si  $X^n$  désigne le fermé de  $X$  par un élément structurant de taille  $n$ ,  $(X^n)^{n'} = (X^{n'})^n = X^{\max(n,n')}$ .

La fermeture vérifie les 4 principes fondamentaux (comme composée de deux opérations les satisfaisant).

Enfin, la fermeture est l'opération duale de l'ouverture par rapport à la complémentation :

$$X^B = [(X^C)_B]^C, \quad (6.15)$$

ce qui permet de déduire les propriétés et l'action d'une des opérations de celles de l'autre.

**Exemples.** La fermeture a pour effet de boucher les trous des objets qui sont plus petits que l'élément structurant. Elle lisse les contours des objets en rajoutant des points dans les concavités étroites (dans lesquelles ne peut pas se glisser l'élément structurant). On retrouve l'effet de filtrage, dual de celui de l'ouverture, décrit par les trois propriétés algébriques ci-dessus.

La figure 6.7 illustre ces effets.

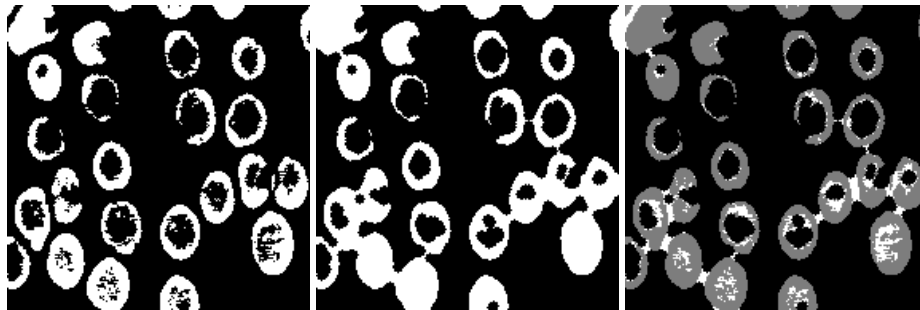


FIG. 6.7 – Exemple de fermeture binaire (de gauche à droite : image initiale, fermeture par un disque de taille 3, différence : en blanc, les parties rajoutées par la fermeture).

### 6.2.5 Ouverture et fermeture numériques

**Définition 13. Ouverture numérique :** (par un élément structurant binaire) L'ouverture d'une fonction  $f$  par un élément structurant  $B$  est définie comme dans le cas binaire par :

$$f_B = D[E(f, B), \check{B}]. \quad (6.16)$$

**Propriétés.** L'ouverture est croissante, anti-extensive et idempotente, ce qui lui confère une nature de filtre morphologique.

**Exemples.** L'ouverture sur une image à niveaux de gris a pour effet d'écarter les pics (si on considère le sous-graphe de la fonction comme un relief) qui sont plus étroits que l'élément structurant.

La figure 6.8 illustre ces effets.

**Définition 14. Fermeture numérique :** (par un élément structurant binaire) La fermeture d'une fonction  $f$  par un élément structurant  $B$  est définie comme dans le cas binaire par :

$$f^B = E[D(f, B), \check{B}]. \quad (6.17)$$



FIG. 6.8 – Exemple d’ouverture numérique (de gauche à droite : image initiale et ouverture par un disque de taille 3).

**Propriétés.** La fermeture est duale de l’ouverture. De plus, comme dans le cas binaire, elle est croissante, extensive et idempotente, ce qui lui confère une nature de filtre morphologique.

**Exemples.** La fermeture a l’effet dual de l’ouverture : elle comble les vallées qui sont plus étroites que l’élément structurant.

La figure 6.9 illustre ces effets.



FIG. 6.9 – Exemple de fermeture numérique (de gauche à droite : image initiale et fermeture par un disque de taille 3).

### 6.3 Cadre topologique

Nous avons vu plus haut les fondements ensemblistes de la morphologie mathématique. Celle-ci repose ensuite sur des concepts de topologie. Dans cette approche, on cherche à définir le voisinage non plus d’un point mais d’un ensemble. Deux types de topologies sont utilisées en morphologie mathématique : la topologie en tout ou rien sur les fermés et la topologie myope définie sur les compacts. La topologie myope a l’avantage d’être reliée à la distance de Hausdorff, métrique bien adaptée à la comparaison de formes dans de nombreuses applications.

Dans la suite, on note  $\mathcal{F}$  l'ensemble des fermés de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{G}$  l'ensemble de ses ouverts, et  $\mathcal{K}$  l'ensemble de ses compacts, pour la topologie usuelle de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 15. Topologie en tout ou rien :** La topologie en tout ou rien sur  $\mathcal{F}$  est engendrée par la famille :

$$\mathcal{F}_{G_1 \dots G_p}^K = \{F \in \mathcal{F}, F \cap K = \emptyset, \forall i, 1 \leq i \leq p, F \cap G_i \neq \emptyset\},$$

où  $p \in \mathbb{N}$ ,  $K \in \mathcal{K}$  et  $G_i \in \mathcal{G}$ .

La topologie en tout ou rien est donc engendrée par les fermés qui, étant donnés un compact et une famille d'ouverts, n'intersectent pas le compact et intersectent chacun des ouverts.

La convergence pour la topologie en tout ou rien est définie de la manière suivante :

**Définition 16. Convergence dans  $\mathcal{F}$  :** Une suite de fermés  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $F \in \mathcal{F}$  si pour tout ouvert  $G$  qui intersecte  $F$  et tout compact  $K$  qui n'intersecte pas  $F$ , on a :

$$\exists N, \forall n \geq N, G \cap F_n \neq \emptyset, K \cap F_n = \emptyset.$$

On montre que la réunion de  $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}$  est continue pour cette définition mais que l'intersection ne l'est pas. Cela nous conduit à introduire les notions de semi-continuité.

**Définition 17. Limites inférieure et supérieure :** La limite inférieure d'une suite de fermés  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , notée  $\underline{\lim}(F_n)$  est l'intersection des points d'adhérence de la suite, et sa limite supérieure, notée  $\overline{\lim}(F_n)$  est la réunion des points d'adhérence.

**Définition 18. Semi-continuité :** Une application  $f$  d'un ensemble  $\Omega$  dans  $\mathcal{F}$  est semi-continue supérieurement (s.c.s.) si pour tout  $\omega$  de  $\Omega$  et toute suite  $(\omega_n)$  de  $\Omega$  convergeant vers  $\omega$  :

$$\overline{\lim} f(\omega_n) \subset f(\omega).$$

De même,  $f$  est semi-continue inférieurement (s.c.i.) si :

$$\underline{\lim} f(\omega_n) \supset f(\omega).$$

Notons qu'une application est continue ssi elle est à la fois s.c.s. et s.c.i.

L'intersection de  $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}$  est s.c.s. Ces propriétés de l'intersection et de la réunion seront directement utilisées pour en déduire des propriétés des transformations de morphologie mathématique construites selon l'approche ensembliste. On a ainsi les résultats suivants :

- la dilatation d'un fermé par un compact est continue (le résultat est un fermé), c'est-à-dire à la fois s.c.s. et s.c.i.,
- la dilatation d'un compact par un compact est continue (le résultat est un compact),
- l'application de  $\mathcal{F} \times \mathcal{K}$  dans  $\mathcal{F}$  qui à  $(F, K)$  associe  $E(F, K)$  est s.c.s.,
- de même, l'application de  $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$  dans  $\mathcal{K}$  qui à  $(K', K)$  associe  $E(K', K)$  est s.c.s.,
- l'application de  $\mathcal{F} \times \mathcal{K}$  dans  $\mathcal{F}$  qui à  $(F, K)$  associe  $F_K$  est s.c.s.,
- de même, l'application de  $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$  dans  $\mathcal{K}$  qui à  $(K', K)$  associe  $K'_K$  est s.c.s.,
- l'application de  $\mathcal{F} \times \mathcal{K}$  dans  $\mathcal{F}$  qui à  $(F, K)$  associe  $F^K$  est s.c.s.,
- de même, l'application de  $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$  dans  $\mathcal{K}$  qui à  $(K', K)$  associe  $K'^K$  est s.c.s.

Ces propriétés fortes de la dilatation et de l'érosion en termes de continuité lorsque l'élément structurant est compact incitent à choisir pour les applications des éléments structurants compacts.

**Définition 19. Topologie myope :** La topologie myope sur  $\mathcal{K}$  est engendrée par la famille :

$$\mathcal{K}_{G_1 \dots G_p}^F = \{K \in \mathcal{K}, K \cap F = \emptyset, \forall i, 1 \leq i \leq p, K \cap G_i \neq \emptyset\},$$

où  $p \in \mathbb{N}$ ,  $F \in \mathcal{F}$  et  $G_i \in \mathcal{G}$ .

La topologie myope est plus fine que la topologie induite sur  $\mathcal{K}$  par la topologie en tout ou rien sur  $\mathcal{F}$ , et équivalente sur  $\mathcal{K} \setminus \emptyset$  à la topologie induite par la distance de Hausdorff.

**Définition 20. Distance de Hausdorff :** La distance de Hausdorff entre deux compacts non vides  $K$  et  $K'$  est définie par :

$$\delta(K, K') = \max\left\{\sup_{x \in K} d(x, K'), \sup_{x' \in K'} d(x', K)\right\},$$

où  $d(x, K)$  est la distance classique d'un point à un compact ( $d(x, K) = \inf_{y \in K} d(x, y)$  où  $d(x, y)$  est la distance euclidienne classique sur  $\mathbb{R}^n$ ).

Cette distance est souvent utilisée pour comparer deux ensembles et estimer leur proximité. Notons que cette distance est très sensible aux déformations qui peuvent se produire à la surface des objets<sup>6</sup>.

## 6.4 Cadre algébrique

Le cadre algébrique général de la morphologie mathématique est celui des treillis et de la notion fondamentale d'adjonction [Heijmans et Ronse, 1990, Ronse et Heijmans, 1991, Heijmans, 1991].

### 6.4.1 Treillis

**Définition 21. Treillis :** Un treillis est un ensemble  $\mathcal{T}$  muni d'une relation d'ordre  $\leq$ , tel que toute paire d'éléments (ou toute famille finie) possède une borne supérieure (notée  $x \vee y$ ) et une borne inférieure (notée  $x \wedge y$ ). Un treillis est complet si toute famille d'éléments (finie ou non) possède un plus petit majorant et un plus petit minorant.

Un treillis complet contient en particulier un plus petit élément et un plus grand élément.

L'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  est un treillis complet, pour la relation d'ordre définie par :

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) \leq g(x).$$

La semi-continuité pour des fonctions est définie de la manière suivante.

**Définition 22. Semi-continuité d'une fonction :** Une fonction  $f$  est semi-continue supérieurement en  $x$  si :

$$\forall t > f(x), \exists V(x), \forall y \in V(x), t > f(y),$$

où  $V(x)$  est un voisinage de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$ . De même,  $f$  est semi-continue inférieurement si :

$$\forall t < f(x), \exists V(x), \forall y \in V(x), t < f(y).$$

**Définition 23. Sous-graphe :** À toute fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , on associe son sous-graphe

$$SG(f) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}, f(x) \geq t\}.$$

Remarquons qu'une fonction est s.c.s. ssi son sous-graphe est fermé.

L'ensemble des fonctions s.c.s. de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  est un treillis complet, pour la relation d'ordre définie par :

$$f \leq g \Leftrightarrow SG(f) \subset SG(g).$$

<sup>6</sup>Le problème de la définition d'une distance entre objets est réputé difficile et la plupart des distances utilisées, comme la distance de Hausdorff, ne donnent qu'une information partielle sur la ressemblance des objets. La distance de Hausdorff est cependant bien adaptée à une grande classe de problèmes, en particulier grâce à ses liens étroits avec la morphologie mathématique.

Cette propriété montre l'intérêt du cadre fourni par les treillis pour la morphologie mathématique. Un autre intérêt vient du fait que les opérations de morphologie mathématique sont fondées sur des  $\vee$  et des  $\wedge$  comme nous l'avons vu dans la partie 6.2.

La notion de sous-graphe permet de faire un lien direct avec l'approche ensembliste d'une part puisque les sous-graphes sont des ensembles de  $\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}$ , et avec l'approche topologique d'autre part puisque la topologie utilisée sur l'espace des fonctions s.c.s. est celle induite par la topologie en tout ou rien sur  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}})$ .

### 6.4.2 Erosion et dilatation algébriques, adjonctions

**Définition 24.** Dans un treillis complet  $(\mathcal{T}, \leq)$ , une **dilatation algébrique** est définie de manière générale comme une fonction  $\delta$  sur  $\mathcal{T}$  qui commute avec le sup, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (x_i) \in \mathcal{T}, \delta(\vee_i x_i) = \vee_i \delta(x_i), \quad (6.18)$$

où  $(x_i)$  est une famille (éventuellement vide) d'éléments de  $\mathcal{T}$ .

De manière similaire, une **érosion algébrique** est une fonction  $\varepsilon$  sur  $\mathcal{T}$  qui commute avec l'inf, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (x_i) \in \mathcal{T}, \delta(\wedge_i x_i) = \wedge_i \delta(x_i). \quad (6.19)$$

Notons que cette définition suffit à garantir que les dilatations et érosions algébriques sont croissantes.

Une propriété fondamentale dans le cadre des treillis est celle d'adjonction.

**Définition 25.** Une paire d'opérateurs  $(\varepsilon, \delta)$  sur  $\mathcal{T}$  est une **adjonction** si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{T}^2, \delta(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq \varepsilon(y). \quad (6.20)$$

**Propriétés.** On a les relations suivantes entre opérations algébriques et adjonctions :

- si  $(\varepsilon, \delta)$  est une adjonction, alors  $\varepsilon$  est une érosion algébrique et  $\delta$  est une dilatation algébrique ;
- un opérateur croissant  $\delta$  est une dilatation algébrique si et seulement si il existe un opérateur  $\varepsilon$  tel que  $(\varepsilon, \delta)$  soit une adjonction ;  $\varepsilon$  est alors une érosion algébrique et vaut :

$$\varepsilon(x) = \vee \{y \in \mathcal{T}, \delta(y) \leq x\};$$

- un opérateur croissant  $\varepsilon$  est une érosion algébrique si et seulement si il existe un opérateur  $\delta$  tel que  $(\varepsilon, \delta)$  soit une adjonction ;  $\delta$  est alors une dilatation algébrique et vaut :

$$\delta(x) = \wedge \{y \in \mathcal{T}, \varepsilon(y) \geq x\};$$

### 6.4.3 Lien avec les opérateurs morphologiques

Sur le treillis booléen des parties de  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{Z}^n$  (la relation d'ordre est alors l'inclusion), le dilaté de  $n$ 'importe quelle partie peut être exprimé comme la réunion des dilatés des singletons qui la composent :

$$\delta(X) = \cup_{x \in X} \delta(\{x\}).$$

De plus, toute dilatation invariante par translation peut s'exprimer comme une dilatation morphologique, définie à partir d'un élément structurant comme dans la section 6.2.

Des résultats similaires sont valables pour les érosions.

### 6.4.4 Ouverture et fermeture algébriques

**Définition 26.** Une opération croissante est une **ouverture algébrique** si et seulement si elle est anti-extensive et idempotente, et une **fermeture algébrique** si et seulement si elle est extensive et idempotente.

Si  $I$  désigne l'identité sur le treillis, on a pour toute adjonction  $(\varepsilon, \delta)$  :

$$\delta\varepsilon \leq I \leq \varepsilon\delta. \quad (6.21)$$

De plus,  $\delta\varepsilon$  et  $\varepsilon\delta$  sont toujours idempotentes, ce sont donc des exemples d'ouverture et fermeture algébriques respectivement, appelées ouverture et fermeture morphologiques.

## 6.5 Cadre probabiliste

### 6.5.1 Ensembles fermés aléatoires

Enfin, une partie de la morphologie mathématique repose sur une approche probabiliste, en particulier sur le concept d'ensemble fermé aléatoire. Le principe consiste à considérer les équations ensemblistes utilisées dans la première approche comme des événements et à leur affecter une probabilité. Ces événements seront donc du type  $\{\{B \subset A\}, \{\{B \cap A \neq \emptyset\}\}$ . L'ensemble des valeurs (ou réalisations) considéré ici est l'ensemble des fermés  $\mathcal{F}$ . L'ensemble des événements est défini par la tribu borélienne sur  $\mathcal{F}$  engendrée par les événements particuliers qui nous intéressent, appelée encore tribu morphologique.

**Définition 27. Tribu morphologique :** La tribu morphologique est la tribu  $\sigma_{\mathcal{F}}$  sur  $\mathcal{F}$  engendrée par les ouverts de la topologie en tout ou rien sur  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire par les  $\mathcal{F}^K$  et les  $\mathcal{F}_G$  pour tous les compacts  $K$  de  $\mathcal{K}$  et tous les ouverts  $G$  de  $\mathcal{G}$  :

$$\mathcal{F}^K = \{F \in \mathcal{F}, K \cap F = \emptyset\}, \quad \mathcal{F}_G = \{F \in \mathcal{F}, G \cap F \neq \emptyset\}.$$

La donnée d'une probabilité sur l'espace mesurable  $(\mathcal{F}, \sigma_{\mathcal{F}})$  conduit alors à la notion d'ensemble fermé aléatoire.

**Définition 28. Ensemble fermé aléatoire :** Un ensemble fermé aléatoire  $F$ , noté  $F = (\mathcal{F}, \sigma_{\mathcal{F}}, P)$  est déterminé par la donnée d'une probabilité  $P$  sur  $(\mathcal{F}, \sigma_{\mathcal{F}})$ .

**Définition 29. Capacité de Choquet :** La capacité de Choquet d'un ensemble fermé aléatoire  $F = (\mathcal{F}, \sigma_{\mathcal{F}}, P)$  est la fonctionnelle  $T : \mathcal{K} \rightarrow [0, 1]$  définie par :

$$\forall K \in \mathcal{K}, \quad T(K) = P(F \cap K \neq \emptyset).$$

La capacité de Choquet joue un rôle analogue à celui de la fonction de répartition d'une probabilité sur  $\mathbb{R}$ . On montre qu'un ensemble fermé aléatoire est entièrement caractérisé par sa capacité de Choquet. En pratique, cela fournit un moyen opératoire de caractérisation d'un phénomène aléatoire, puisque la connaissance des  $P(F \cap K \neq \emptyset)$  est suffisante, ce qui limite les mesures à effectuer.

Les applications de ces concepts concernent des mesures de phénomènes aléatoires, comme par exemple des schémas booléens, ou l'analyse de textures.

### 6.5.2 Un exemple : le schéma booléen

Un schéma booléen stationnaire est défini comme la réunion de compacts aléatoires de même loi translatés aux points d'un processus de Poisson [Schmitt et Mattioli, 1994a]. Sa capacité de Choquet est une fonction de la densité du processus de Poisson sous-jacent et de la moyenne du volume du dilaté du compact aléatoire.



Soit un processus de Poisson  $\mathcal{P}_\theta$  d'intensité  $\theta$  ( $\theta > 0$ ). Pour tout compact  $K$ , la probabilité pour que  $n$  points du processus tombent dans  $K$  vaut :

$$\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \quad (6.22)$$

avec  $\lambda = \theta V(K)$ , où  $V(K)$  désigne le volume de  $K$ . De plus, si deux compacts  $K_1$  et  $K_2$  sont disjoints, alors les variables aléatoires qui comptent les points tombant dans  $K_1$  et dans  $K_2$  sont indépendantes (voir chapitre 4, section 4.5).

On appelle grain primaire un ensemble fermé aléatoire  $F' = (\mathcal{F}, \sigma_f, P')$ . Le schéma booléen  $F = (\theta, F')$  d'intensité  $\theta$  et de grain primaire  $F'$  est alors défini par :

$$F = \cup\{F'_x, x \in \mathcal{P}_\theta\} \quad (6.23)$$

où les  $F'_x$  sont des compacts aléatoires indépendants de même loi  $P'$  et translatés aux points du processus de Poisson. On garantit que cette réunion est un fermé en imposant que le volume moyen de  $(F' \oplus B)$  est fini, pour  $B$  égal à la boule unité. Un tel schéma booléen est stable par réunion.

On a alors la caractérisation suivante en fonction de la capacité de Choquet :

$$1 - T(K) = P(K \cap F = \emptyset) = e^{-\theta \overline{V(F' \oplus \check{K})}} \quad (6.24)$$

où  $\overline{V}$  désigne le volume moyen. Cette caractérisation permet de définir des procédures d'inférence des paramètres du modèle, à une translation près [Schmitt et Mattioli, 1994a].

## 6.6 Applications de l'érosion et de la dilatation

### 6.6.1 Mesures

Nous donnons dans cette partie succinctement quelques exemples de transformations qui associent à un objet une mesure, que nous répartissons dans deux classes.

La première classe est issue de la géométrie intégrale et vise à calculer des longueurs, des surfaces, des volumes, des intégrales de courbure moyenne, par l'intermédiaire des fonctionnelles de Minkowski. Le lien avec la morphologie mathématique est fourni par les formules de Steiner, qui permettent de calculer les fonctionnelles de Minkowski du dilaté d'un compact d'après celles du compact [Hadwiger, 1957, Santalo, 1976].

La deuxième classe vise des applications de reconnaissance des formes et étudie le comportement d'objets vis-à-vis de transformations morphologiques appropriées aux caractéristiques à mettre en évidence [Schmitt et Mattioli, 1994a]. Par exemple, les courbes granulométriques (donnant la surface des objets sélectionnés par la transformation  $\phi_\lambda$  quand  $\lambda$  varie) permettent d'étudier la distribution de tailles des objets. Autre exemple, le covariogramme géométrique, donnant la surface de  $E(X, B_r)$  (où  $B_r$  est un segment de longueur  $r$  dans une direction  $\alpha$ ) quand  $r$  varie, permet d'observer le comportement des objets quand on l'érode dans une direction. Il peut en particulier discriminer des ensembles d'objets de même surface globale mais dont la répartition des composantes connexes en taille et dans l'espace varie.

### 6.6.2 Erodé ultime

L'érodé ultime est la réunion de toutes les composantes d'un objet binaire qui disparaissent d'une érosion à l'autre dans une séquence d'érosions par un élément structurant élémentaire  $B$ . Plus formellement, l'érodé ultime d'un ensemble  $X$  est défini par :

$$EU(X) = \cup_n \{E(X, B_n) \setminus R[E(X, B_{n+1}); E(X, B_n)]\} \quad (6.25)$$

où  $E(X, B_n)$  désigne l'érodé de  $X$  de taille  $n$  et  $R[Y; Z]$  désigne les composantes connexes de  $Z$  qui ont une intersection non vide avec  $Y$ .

L'érodé ultime d'un ensemble  $X$  est exactement l'ensemble des maxima régionaux de la fonction distance à l'intérieur de  $X$  (distance des points de  $X$  à  $X^C$ ).

### 6.6.3 Rehaussement de contraste

Le rehaussement de contraste morphologique d'une fonction  $f$  est défini à partir d'une fonction minorante  $\underline{f}$  et d'une fonction majorante  $\overline{f}$  et de deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$  et  $\alpha + \beta < 1$ . Le résultat  $g$  de cette transformation est obtenu en faisant basculer les points vers la fonction minorante ou vers la fonction majorante suivant la règle suivante :

$$\begin{aligned} g(x) &= \underline{f}(x) & \text{si } \underline{f}(x) \leq f(x) \leq \underline{f}(x) + \alpha \Delta f(x) \\ g(x) &= f(x) & \text{si } \underline{f}(x) + \alpha \Delta f(x) \leq f(x) \leq \overline{f}(x) - \beta \Delta f(x) \\ g(x) &= \overline{f}(x) & \text{si } \overline{f}(x) - \beta \Delta f(x) \leq f(x) \leq \overline{f}(x) \end{aligned}$$

avec  $\Delta f(x) = \overline{f}(x) - \underline{f}(x)$ .

La morphologie mathématique fournit naturellement des fonctions minorantes (resp. majorantes) à partir de transformations anti-extensives (resp. extensives) comme l'érosion de  $f$  par un élément structurant centré, ou encore l'ouverture de  $f$  (resp. dilatation ou fermeture).

La figure 6.10 donne un exemple de rehaussement de contraste à partir des dilatation et érosion des figures 6.4 et 6.5.



FIG. 6.10 – Exemple de rehaussement de contraste morphologique.

### 6.6.4 Gradient morphologique

Soit  $B$  le disque fermé de rayon unité. Le gradient morphologique d'une fonction  $f$  est défini dans le cas continu par la fonction  $g$  suivante :

$$g(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{D(f, B_\lambda)(x) - E(f, B_\lambda)(x)}{2\lambda},$$

et dans le cas discret par :

$$g(x) = D(f, B)(x) - E(f, B)(x).$$

Cette transformation trouve ses applications dans la détection de contours.

La figure 6.11 donne un exemple de gradient obtenu par différence des dilatation et érosion de taille 1.



FIG. 6.11 – Exemple de gradient morphologique.

## 6.7 Applications de l'ouverture et de la fermeture

### 6.7.1 Filtres alternés séquentiels

Nous avons vu que les ouvertures et fermetures étaient des filtres morphologiques. Sans entrer dans la théorie des filtres morphologiques, nous ne décrivons ici que les filtres alternés séquentiels, qui sont beaucoup utilisés en pratique, et qui sont construits à partir de suites d'ouvertures et de fermetures de tailles croissantes. Dans le cas discret, un tel filtre appliqué à une fonction  $f$  s'exprime comme :

$$(\dots(((f_{B_1})^{B_1})_{B_2})^{B_2})\dots_{B_n})^{B_n}.$$

Notons qu'on obtient bien ainsi des opérations croissantes et idempotentes (donc des filtres morphologiques).

Ils sont utilisés en pratique pour filtrer progressivement le bruit positif (pics étroits) et le bruit négatif (vallées étroites). Le dernier élément structurant utilisé (de taille  $n$ ) est déterminé en fonction de la taille minimale des objets de l'image que l'on veut conserver après le filtrage.

La figure 6.12 donne des exemples de filtres alternés séquentiels.

### 6.7.2 Filtres auto-duaux

Les filtres auto-duaux sont des transformations qui agissent sur les fonctions indépendamment du contraste local et traitent donc les parties claires et les parties sombres de la même manière. Le filtre médian est un exemple de tel filtre.

Un exemple est le centre morphologique, défini à partir d'une famille d'opérateurs  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$  par :

$$(I \vee \wedge_i \psi_i) \wedge \vee_i \psi_i \quad (6.26)$$



FIG. 6.12 – Filtres alternés séquentiels : image initiale, tailles maximales de 1, 2 et 3.

où  $I$  désigne l'identité.

Les travaux de H. Heijmans se sont attachés à formaliser cette notion de filtres auto-duaux dans un cadre algébrique.

### 6.7.3 Chapeau haut-de-forme

La transformation du  $\hat{\cdot}$  chapeau haut-de-forme  $\hat{\cdot}$  d'une fonction  $f$  est définie, aussi bien en continu qu'en discret, comme la fonction :

$$f - f_B$$

pour un élément structurant  $B$  donné. L'opération duale est la fonction :

$$f^B - f.$$

Cette transformation extrait les pics étroits (plus étroits que l'élément structurant) quelle que soit leur hauteur absolue. Elle permet par exemple d'extraire des lignes fines de niveau intense par rapport à leur voisinage (telles que des routes dans une image satellitaire). L'opération duale extrait au contraire des vallées étroites.

La figure 6.13 donne un exemple de chapeau haut de forme obtenu pour une ouverture de taille 3.

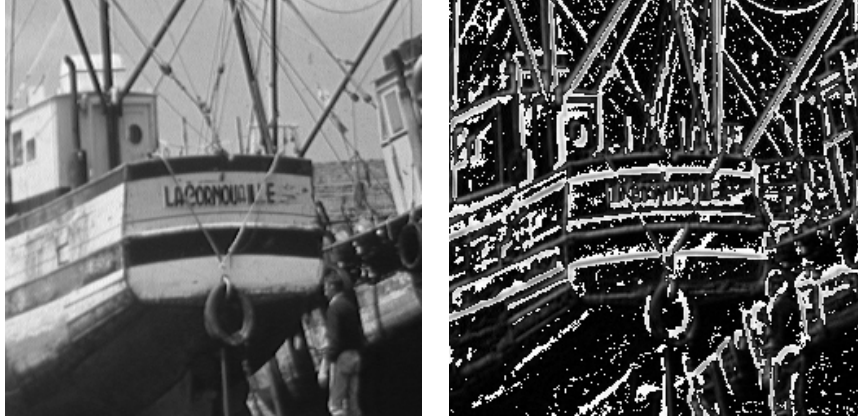


FIG. 6.13 – Exemple de chapeau haut de forme obtenu pour une ouverture de taille 3.

Si l'on applique cette transformation avec des éléments structurants fonctionnels, par exemple des sphères de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , on sélectionne alors les contours abrupts dans l'image, ou encore les pics de courbure plus forte que l'élément structurant.

#### 6.7.4 Granulométries

Les granulométries sont des opérations de  $\downarrow$  tamisage  $\downarrow_\lambda$  qui servent à sélectionner successivement des particules de tailles données croissantes.

**Définition 30. Granulométrie :** Une granulométrie sur un ensemble  $\mathcal{A}$  de parties de  $\mathbb{R}^n$  est une famille de fonctions paramétrées  $\phi_\lambda$  (avec  $\lambda > 0$ ) définies sur  $\mathcal{A}$  telle que :

1.  $\forall X \in \mathcal{A}, \forall \lambda > 0, \phi_\lambda(X) \subset X$  ( $\phi_\lambda$  anti-extensive),
2.  $\forall (X, Y) \in \mathcal{A}^2, \forall \lambda > 0, X \subset Y \Rightarrow \phi_\lambda(X) \subset \phi_\lambda(Y)$  ( $\phi_\lambda$  croissante),
3.  $\forall X \in \mathcal{A}, \forall \lambda > 0, \forall \mu > 0, \lambda \geq \mu \Rightarrow \phi_\lambda(X) \subset \phi_\mu(X)$  ( $\phi_\lambda$  décroissante par rapport au paramètre),
4.  $\forall \lambda > 0, \forall \mu > 0, \phi_\lambda \circ \phi_\mu = \phi_\mu \circ \phi_\lambda = \phi_{\max(\lambda, \mu)}$ .

Il est clair, d'après cette définition, que la famille d'ouvertures par des boules de rayon  $r$  définit une granulométrie. On montre même que  $\phi_\lambda$  est une granulométrie si et seulement si  $\phi_\lambda$  est une ouverture pour tout  $\lambda$  et la classe des ensembles de  $\mathcal{A}$  invariants par  $\phi_\lambda$  est incluse dans celle des invariants par  $\phi_\mu$  pour  $\lambda \geq \mu$ .

Ainsi, si on applique à un ensemble une suite d'ouvertures de tailles croissantes (par des boules), on sélectionnera d'abord les plus petites parties de l'ensemble (celles qui sont supprimées par l'ouverture), puis des parties de plus en plus grosses.

La figure 6.14 montre une courbe de granulométrie obtenue sur une image binaire par ouvertures de différentes tailles. Lorsque la taille de l'ouverture correspond à la taille caractéristique de la plupart des objets, un saut apparaît dans la courbe.

#### 6.7.5 Ouverture surfacique

Les ouvertures peuvent combiner un critère sur un attribut, par exemple la taille des objets, permettant ainsi de filtrer des petits objets ou des petites parties claires. Une ouverture surfacique de paramètre  $\lambda$  est ainsi définie par :

$$\gamma_\lambda = \bigvee_i \{ \gamma_{B_i}, B_i \text{ est connexe et } S(B_i) = \lambda \} \quad (6.27)$$

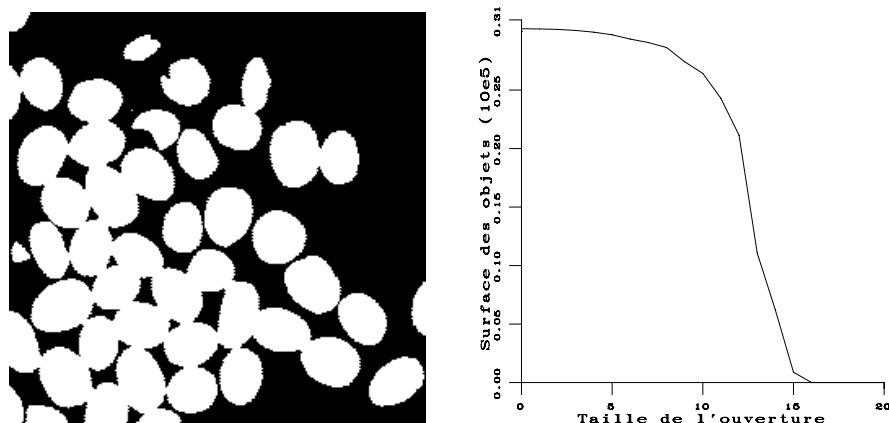


FIG. 6.14 – Image binaire et sa courbe de granulométrie.

où  $\gamma_{B_i}$  désigne une ouverture par  $B_i$  et  $S(B_i)$  est la surface de  $B_i$  (ou son volume en 3D).

On définit bien sûr de manière duale des fermetures surfaciques.

### 6.7.6 Ouverture annulaire

L'ouverture annulaire est définie comme le min entre l'image originale et son dilaté par un élément structurant en forme d'anneau. Puisque l'élément structurant ne contient alors pas l'origine, la propriété d'extensivité de la dilatation n'est pas vérifiée. Cette opération sert par exemple à récupérer des groupes serrés d'objets dans une image en éliminant des parties isolées (la dilatation de telles parties ne les contient pas).

## 6.8 Transformation en tout ou rien et opérateurs dérivés

### 6.8.1 Transformation en tout ou rien

Les transformations vues jusqu'à présent sont toutes fondées sur le même principe : elles examinent si une certaine configuration de points (définie par l'élément structurant) vérifie une relation avec l'objet étudié. La transformation en tout ou rien propose d'examiner des configurations où certains points vérifient une relation avec l'objet et d'autres vérifient une relation avec le complémentaire de l'objet. Ainsi les éléments structurants  $T$  considérés dans cette transformation sont décomposés en deux parties  $T_1$  et  $T_2$  (de même origine).

**Définition 31. Transformation en tout ou rien :** La transformation en tout ou rien de  $X$  par l'élément structurant  $T = (T_1, T_2)$  est définie par :

$$X \otimes T = E(X, T_1) \cap E(X^C, T_2).$$

Notons que puisque  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ , l'origine ne peut pas appartenir à la fois à  $T_1$  et à  $T_2$ , donc on ne peut pas avoir simultanément  $E(X, T_1) \subset X$  et  $E(X^C, T_2) \subset X^C$  (ce qui est heureux...).

### 6.8.2 Amincissement et épaissement

Deux nouvelles transformations sont déduites de la transformation en tout ou rien :

**Définition 32. Amincissement et épaissement :** L'amincissement de  $X$  par l'élément structurant  $T = (T_1, T_2)$  est défini par :

$$X \circ T = X \setminus X \otimes T, \quad (6.28)$$

et l'épaississement par :

$$X \odot T = X \cup X \otimes T. \quad (6.29)$$

L'amincissement, opération anti-extensive, supprime donc de  $X$  des points qui sont dans une configuration particulière, sélectionnés par la transformation en tout ou rien. Les éléments structurants appropriés sont ceux pour lesquels l'origine appartient à  $T_1$ . L'épaississement rajoute au contraire à  $X$  les points sélectionnés par la transformation en tout ou rien et est une opération extensive. Les éléments structurants appropriés sont ceux pour lesquels l'origine appartient à  $T_2$ . Ces deux transformations sont duales l'une de l'autre au sens suivant :

$$X \circ T = (X^C \odot T')^C$$

avec  $T' = (T_2, T_1)$  si  $T = (T_1, T_2)$ .

Il existe tout un alphabet  $\mathcal{L}$  d'éléments structurants, appelé alphabet de Golay en trame hexagonale, qui permet d'effectuer une grande variété d'opérations [Serra, 1982a]. Par exemple :

- si  $T_1$  est l'élément structurant élémentaire sur la trame considérée et  $T_2$  est vide, la transformation en tout ou rien est une érosion et l'amincissement correspondant extrait la frontière des objets ;
- si les configurations recherchées par la transformation en tout ou rien correspondent à un point du complémentaire entouré de points de l'objet formant une configuration localement non convexe, l'épaississement correspondant (appliqué itérativement jusqu'à convergence) permet de calculer le plus petit convexe discret contenant l'objet de départ ;
- si  $T_1$  est le point central de l'élément structurant élémentaire et  $T_2$  contient les autres, la transformation en tout ou rien sélectionne les points isolés de l'objet ;
- etc.

Nous verrons dans la suite que des configurations particulières permettent d'extraire le squelette d'un objet par amincissement.

### 6.8.3 Squelette

Le squelette est une notion très utile en reconnaissance de formes : en effet, il s'agit d'une représentation des objets, qu'on souhaite intuitivement compacte (lignes fines centrées dans les objets), homotopique à l'objet de départ (même nombre de composantes connexes et même nombre de trous), et inversible. En morphologie mathématique, on arrive à une définition du squelette dans le cas continu qui a de bonnes propriétés par rapport à ces exigences. En revanche, le passage au discret est très délicat pour cette transformation.

Dans le cas continu, le squelette est défini comme l'ensemble des centres des boules maximales incluses dans l'objet (une boule étant maximale si elle ne peut être incluse dans aucune autre boule incluse dans l'objet). On travaille généralement sur les fermés en morphologie mathématique. Cependant, dans le cas du squelette, cela conduit à de mauvaises propriétés : le squelette d'un ensemble connexe n'est pas nécessairement connexe, il n'est pas nécessairement fermé, et l'application qui à un fermé associe l'adhérence de son squelette n'est ni s.c.s., ni s.c.i. On travaillera donc, pour le cas du squelette, sur des ouverts.

**Définition 33. Squelette :** Le squelette d'un ouvert  $A$  est l'ensemble des centres des boules ouvertes maximales incluses dans  $A$ .

En appelant  $s_\rho(A)$  l'ensemble des centres des boules ouvertes maximales de rayon donné  $\rho > 0$ , on obtient le squelette  $r(A)$  comme réunion de tels ensembles :

$$r(A) = \bigcup_{\rho > 0} s_\rho(A).$$

On peut montrer que :

$$s_\rho(A) = \bigcap_{\mu > 0} [E(A, B_\rho) \setminus [E(A, B_\rho)]_{\bar{B}_\mu}]$$

où  $B_\rho$  (resp.  $\bar{B}_\rho$ ) désigne la boule ouverte (resp. fermée) de rayon  $\rho$ . Cela fournit une caractérisation du squelette de  $A$  (et un moyen opératoire pour le calculer) à partir de ses érodés et des ouverts de ses érodés :

$$r(A) = \bigcup_{\rho > 0} \bigcap_{\mu > 0} [E(A, B_\rho) \setminus [E(A, B_\rho)]_{\bar{B}_\mu}]. \quad (6.30)$$

L'objet de départ peut être reconstruit à partir de son squelette (et donc la propriété d'inversibilité est satisfaite) :

$$A = \bigcup_{\rho > 0} D(s_\rho, B_\rho).$$

Pour la définition 33, on montre de plus que l'application qui à  $A$  associe l'adhérence de son squelette  $\bar{r}(A)$  est s.c.i. de  $\mathcal{G}$  dans  $\mathcal{F}$ , que si  $A$  est connexe alors  $\bar{r}(A)$  est connexe, et que le squelette est  $\mathcal{I}$  fin  $\mathcal{I}$  au sens suivant : l'intérieur du squelette est vide. Le squelette ainsi défini vérifie donc bien les propriétés qu'on en attend intuitivement.

#### 6.8.4 Squelette discret

Si l'on transpose maintenant directement ces notions au cas discret, le squelette s'exprime (en discrétisant l'équation 6.30) comme :

$$S(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [E(X, B_n) \setminus E(X, B_n)_B], \quad (6.31)$$

où  $B$  est l'élément structurant élémentaire sur la trame. Cette définition, que l'on trouve aussi sous le nom d'axe médian, correspond aux centres des boules maximales (discrètes) incluses dans l'objet.

Si la propriété d'inversibilité est conservée avec l'équation 6.31, les autres sont perdues, en particulier la préservation de la connexité. Deux classes de méthodes ont alors été proposées pour résoudre ce problème : la première tente de relier entre eux les points détectés par l'équation 6.31 pour en faire une  $\mathcal{I}$  ligne médiane  $\mathcal{I}$  qui satisfasse les propriétés de connexité ; la deuxième tente de trouver d'autres définitions, directement discrètes, en supprimant itérativement des points à la surface de l'objet.

La méthode que propose la morphologie mathématique relève de cette deuxième approche. Elle s'appuie sur la notion d'amincissement (équation 6.28), en utilisant des éléments structurants qui suppriment des points de l'objet sans changer sa topologie (voir figure 6.15). Il s'agit donc d'un amincissement homotopique. On arrive ainsi à un squelette qui vérifie les propriétés de connexité, qui donne une bonne représentation des formes, mais qui n'est plus inversible (il ne contient pas nécessairement les centres des boules maximales) et qui n'est pas nécessairement d'épaisseur unité.

La figure 6.16 illustre la différence entre les centres des boules maximales et le squelette par amincissement dans le cas discret.

#### 6.8.5 SKIZ

Considérons maintenant le complémentaire de l'objet  $X$ . On note  $X_i$  les composantes connexes de l'objet ( $X = \bigcup_i X_i$ ). Dans  $X^C$ , on appelle zone d'influence de  $X_i$  l'ensemble des points  $ZI(X_i)$  plus proches de  $X_i$  que des  $X_j$  pour  $j \neq i$  :

$$ZI(X_i) = \{x \in X^C / d(x, X_i) < d(x, X \setminus X_i)\}.$$

Cette notion permet de définir celle de squelette par zones d'influence (SKIZ) :



$$\begin{array}{ccc} & 1 & 1 \\ & \cdot & 1 & \cdot \\ 0 & & 0 & \end{array}$$

FIG. 6.15 – Élément structurant utilisé en 6-connexité pour obtenir le squelette d'un objet par amincissement : cet élément structurant, ainsi que les 5 qui en sont déduits par rotations, sont appliqués itérativement jusqu'à convergence.

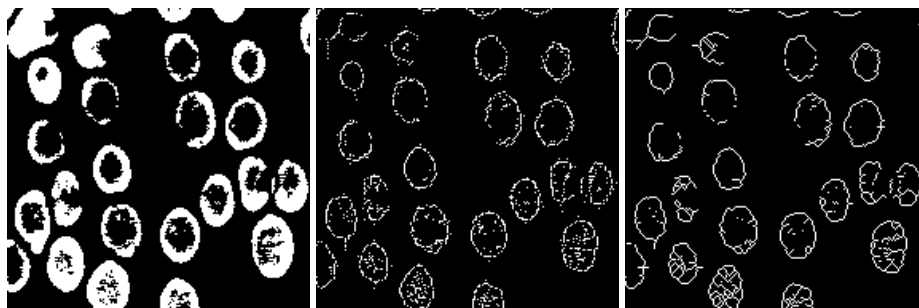


FIG. 6.16 – Centres des boules maximales (au centre) et squelette par amincissement (à droite).

**Définition 34. Squelette par zones d'influence :** *Le squelette par zone d'influence de  $X$  est l'ensemble des points qui n'appartiennent à aucune des zones d'influence :*

$$Skiz(X) = \left( \bigcup_i ZI(X_i) \right)^C.$$

Le squelette par zones d'influence est un sous-ensemble du squelette de  $X^C$ , il n'est pas forcément connexe et contient en général moins de barbules que le squelette de  $X^C$  (ce qui est souvent exploité dans les applications).

## 6.9 Géodésie

### 6.9.1 Distance géodésique et boules géodésiques

Les transformations géodésiques sont celles qui sont contraintes par un ensemble donné (on les appelle aussi conditionnelles). Elles sont fortement liées à la notion de distance géodésique : la distance géodésique  $d_X$  conditionnellement à un ensemble  $X$  entre deux points de  $X$  est la longueur du plus court chemin joignant ces deux points en restant dans l'ensemble.

On considère alors des éléments structurants qui sont des boules de la distance géodésique.

**Définition 35. Boule géodésique :** *La boule géodésique de centre  $x$  et de rayon  $r$  conditionnellement au sous-ensemble  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  est définie par :*

$$B_X(x, r) = \{y \in X / d_X(x, y) \leq r\}. \quad (6.32)$$

### 6.9.2 Opérations morphologiques géodésiques, reconstruction

**Définition 36. Dilatation géodésique ou conditionnelle :** *La dilatation géodésique de  $Y$  dans  $X$  (appelée aussi dilatation de  $Y$  conditionnellement à  $X$ ) par une boule de rayon  $r$  est définie par :*

$$D_X(Y, B_r) = \{x \in \mathbb{R}^n / B_X(x, r) \cap Y \neq \emptyset\} = \{x \in \mathbb{R}^n / d_X(x, Y) \leq r\}, \quad (6.33)$$

où  $B_X(x, r)$  désigne la boule géodésique de centre  $x$  et de rayon  $r$ .

En pratique dans un espace discret, l'expression 6.33 se calcule très simplement à partir de la dilatation euclidienne (équation 6.3) par l'élément structurant élémentaire  $B_1$  puisqu'elle est alors équivalente à :

$$D_X(Y, B_r) = [D(Y, B_1) \cap X]^r \quad (6.34)$$

où l'exposant signifie que l'opération est itérée  $r$  fois.

**Définition 37. Érosion géodésique :** *L'érosion géodésique de  $Y$  dans  $X$  par une boule de taille  $r$  est définie par :*

$$E_X(Y, B_r) = \{x \in \mathbb{R}^n / B_X(x, r) \subset Y\} = X \setminus D_X(X \setminus Y, B_r) \quad (6.35)$$

et est ainsi reliée à la dilatation par dualité (faisant intervenir le complémentaire  $X \setminus Y$  de  $Y$  dans  $X$ ).

L'ouverture et la fermeture géodésiques sont définies à partir de l'érosion et de la dilatation géodésiques, de manière analogue au cas euclidien (équations 6.13 et 6.14).

De la dilatation géodésique, on déduit la notion de reconstruction de  $X$  à partir de  $\mathbb{I}$  marqueurs  $\mathbb{I}$  définis par un ensemble  $Y$ .

**Définition 38. Reconstruction binaire :** *La reconstruction de  $Y$  dans  $X$  est la dilatation géodésique de  $Y$  dans  $X$  par une boule de rayon infini, c'est-à-dire, les composantes connexes de  $X$  qui ont une intersection non vide avec  $Y$ .*

Les notions de transformations géodésiques ou conditionnelles s'étendent au cas numérique par l'intermédiaire des  $\mathbb{I}$  sections  $\mathbb{I}$   $f_\lambda$  de la fonction  $f$  considérée :

$$f_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \geq \lambda\}.$$

**Définition 39. Dilatation géodésique numérique :** *La dilatation géodésique de  $f$  dans  $g$ , pour  $f \leq g$  est définie par ses sections à partir de la dilatation géodésique binaire :*

$$[D_g(f, B_r)]_\lambda = D_{g_\lambda}(f_\lambda, B_r),$$

et l'érosion géodésique est définie par dualité.

Dans le cas discret, on retrouve des formules analogues à celles obtenues dans le cas binaire, pour la dilatation :

$$D_g(f, B_r) = [D(f, B) \wedge g]^r,$$

où  $B$  est l'élément structurant élémentaire et l'exposant  $r$  signifie que l'opération est itérée  $r$  fois, et pour l'érosion :

$$E_g(f, B_r) = [E(f, B) \vee g]^r.$$

Comme dans le cas binaire, la **reconstruction numérique** de  $f$  dans  $g$  est définie par  $D_g(f, B_\infty)$ . La fonction  $f$  est appelée fonction de marquage.

### 6.9.3 Squelette géodésique par zones d'influence

Soient  $X$  un ensemble et  $Y$  un ensemble de composantes connexes disjointes deux à deux  $Y_i$  ( $Y = \cup_i Y_i$ ). La zone d'influence géodésique  $ZI_X(Y_i)$  de  $Y_i$  conditionnellement à  $X$  est l'ensemble des points de  $X$  plus proches de  $Y_i$  que des autres composantes au sens de la distance géodésique dans  $X$  :

$$ZI_X(Y_i) = \{x \in X, d_X(x, Y_i) < d_X(x, Y \setminus Y_i)\}. \quad (6.36)$$

Le squelette géodésique par zone d'influence est alors défini par :

$$Skiz_X(Y) = X \setminus \cup_i ZI_X(Y_i). \quad (6.37)$$

## 6.10 Ligne de partage des eaux

### 6.10.1 Définition et propriétés

La ligne de partage des eaux est une notion très importante pour les problèmes de segmentation. Intuitivement, elle est définie par analogie géographique comme le complémentaire des bassins versants, un bassin versant étant la zone associée à un minimum régional telle qu'une goutte d'eau tombant dans cette zone et suivant la ligne de plus grande pente s'arrêtera dans ce minimum (figure 6.17).

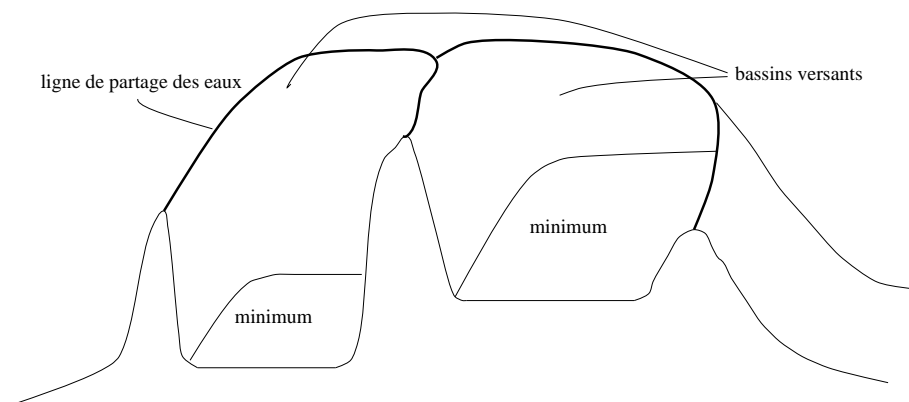


FIG. 6.17 – Ligne de partage des eaux.

La transposition de cette définition intuitive en termes mathématiques ne va pas sans poser de nombreux problèmes (définition d'une ligne de plus grande pente, problème des plateaux, etc.). La plupart des définitions sont algorithmiques, c'est-à-dire que la ligne de partage des eaux est définie d'après le moyen qui permet de la construire. Un des algorithmes les plus populaires est l'algorithme d'immersion qui consiste à remplir progressivement les bassins versants (à partir des minima régionaux) pour déterminer leurs limites [Vincent et Soille, 1991, Vincent, 1992, Soille, 1999]. Ce n'est que récemment que des approches mathématiques rigoureuses ont été proposées dans le cas continu [Schmitt et Mattioli, 1994a].

L'avantage de la ligne de partage des eaux pour la segmentation est qu'elle fournit des régions délimitées par des contours fermés formant une partition de l'image.

La figure 6.18 donne un exemple de ligne de partage des eaux sur une image de gradient.

### 6.10.2 Applications en segmentation

Une technique puissante de segmentation par morphologie mathématique, qui connaît des développements importants et de plus en plus d'applications, consiste à effectuer un marquage puis une reconstruction, éventuellement précédés de pré-traitements (rehaussement de contraste, filtrage, en particulier par des filtres alternés séquentiels). Nous donnons ici deux exemples d'application de ces techniques, pour séparer des objets binaires se recouvrant partiellement d'une part, et pour segmenter des images numériques à l'aide de la ligne de partage des eaux d'autre part.

Supposons qu'on ait un ensemble d'objets binaires de forme relativement circulaire, et se recouvrant partiellement. La séparation de tels objets peut s'effectuer par morphologie mathématique si le recouvrement n'est pas trop important : les composantes connexes de l'image apparaissent alors avec un rétrécissement qui correspond au lieu où la séparation doit être effectuée. Les marqueurs généralement utilisés pour ce type d'objets sont les érodés ultimes, c'est-à-dire les maxima régionaux de la fonction distance à l'intérieur de l'objet. En effet, une particule isolée donnera lieu à un seul érodé ultime connexe, deux particules se recouvrant partiellement (donc ne formant qu'une seule composante connexe dans l'image) auront un érodé ultime composé de deux composantes connexes qui marquent donc bien chacune des particules, etc.

L'étape de reconstruction permet ensuite de retrouver chaque particule à partir de son marqueur. Elle doit satisfaire deux exigences : préserver le nombre de composantes connexes de l'érodé ultime (puisque chacune d'elles est associée à une particule) et donc ne pas les connecter, et rester dans l'ensemble  $X$  de départ (qui représente toutes les particules). La première exigence conduit à utiliser des transformations homotopiques, et la seconde à conditionner les transformations par  $X$  donc à se placer dans un cadre géodésique.

Une première solution consiste à calculer le squelette par zones d'influence de l'ensemble des marqueurs conditionnellement à  $X$ . L'inconvénient de cette méthode est que les lignes de séparation peuvent être mal positionnées : elles sont situées à mi-distance des marqueurs, et cela n'est pas adapté à la séparation de deux particules de tailles différentes.

Une deuxième solution consiste à reconstruire les particules par dilatation géodésique des marqueurs (conditionnellement à  $X$ ), en prenant en compte la taille de l'érosion nécessaire pour arriver à l'érodé ultime de chaque particule (c'est-à-dire la valeur du maximum régional correspondant de la fonction distance).

Une troisième solution consiste à calculer la ligne de partage des eaux de la fonction distance inversée (où les maxima deviennent des minima). À cause des irrégularités sur les bords des objets, on peut aboutir à une sur-segmentation. Celle-ci peut être évitée en reconstruisant la distance diminuée d'une faible valeur sous la fonction distance avant de l'inverser pour appliquer la ligne de partage des eaux.

Cette procédure est illustrée sur une image binaire sur la figure 6.19.

Prenons maintenant l'exemple d'une image à niveaux de gris. La ligne de partage des eaux fournit un bon outil de segmentation. Elle peut être appliquée directement sur l'image initiale si l'on cherche à détecter les lignes de crête de l'image pour faire la segmentation, sur une image de gradient (représentant une image de contours numériques), sur le résultat d'un chapeau haut-de-forme si l'on souhaite mettre en évidence des structures fines linéaires (sombres ou claires), etc. Le choix de l'image sur laquelle la ligne de partage des eaux est appliquée dépend bien sûr du problème posé, et doit être effectué dans une première étape. L'inconvénient de la ligne de partage des eaux est qu'elle fournit souvent une image sur-segmentée. La technique de marquage permet alors d'imposer des minima à la ligne de partage des eaux pour éviter ce problème.

Les marqueurs doivent être déterminés à l'intérieur et à l'extérieur des objets que l'on souhaite segmenter. Pour cela, différentes techniques peuvent être envisagées (filtrage par filtre alterné séquentiel de l'image de gradient, recherche de minima ou maxima régionaux, etc.).

Les minima sont imposés à partir de ces marqueurs par la technique suivante : soit  $f$  l'image sur laquelle on souhaite appliquer la ligne de partage des eaux, et  $g$  la fonction de marquage prenant la valeur 0 aux points des marqueurs détectés et  $+\infty$  (en pratique la valeur maximale) aux points du complémentaire des marqueurs. En effectuant l'érosion géodésique  $E_{f \wedge g}(g, B_\infty)$  de  $g$  par un élément structurant de taille infinie conditionnellement

à  $f \wedge g$  (c'est-à-dire une reconstruction numérique), on obtient une version modifiée de  $f$  où les minima sont uniquement ceux qui ont été définis par les marqueurs. C'est sur cette image que la ligne de partage des eaux est alors calculée, assurant ainsi que les bassins versants correspondent soit à l'objet à segmenter soit au fond, et qu'on obtient un contour fermé autour de l'objet.

La figure 6.20 donne un exemple de ligne de partage des eaux sur une image de gradient après reconstruction.

## 6.11 Conclusion

De nombreuses extensions peuvent être trouvées dans la littérature sur la morphologie mathématique, ainsi que des liens avec d'autres domaines. Par exemple, l'élément structurant peut être interprété comme une relation binaire et les opérations de morphologie mathématique sont donc applicables à des structures telles que des graphes, où les éléments structurants sont définis en fonction des arcs du graphe [Vincent, 1989].

Parmi les nombreux liens, citons ceux qui existent avec les équations de diffusion (voir chapitre 8) et l'équation eikonale [Schmitt et Mattioli, 1994a], ainsi qu'avec les approches multi-échelles (pyramides [Goutsias et Heijmans, 2000], ondelettes [Heijmans et Goutsias, 2000]).

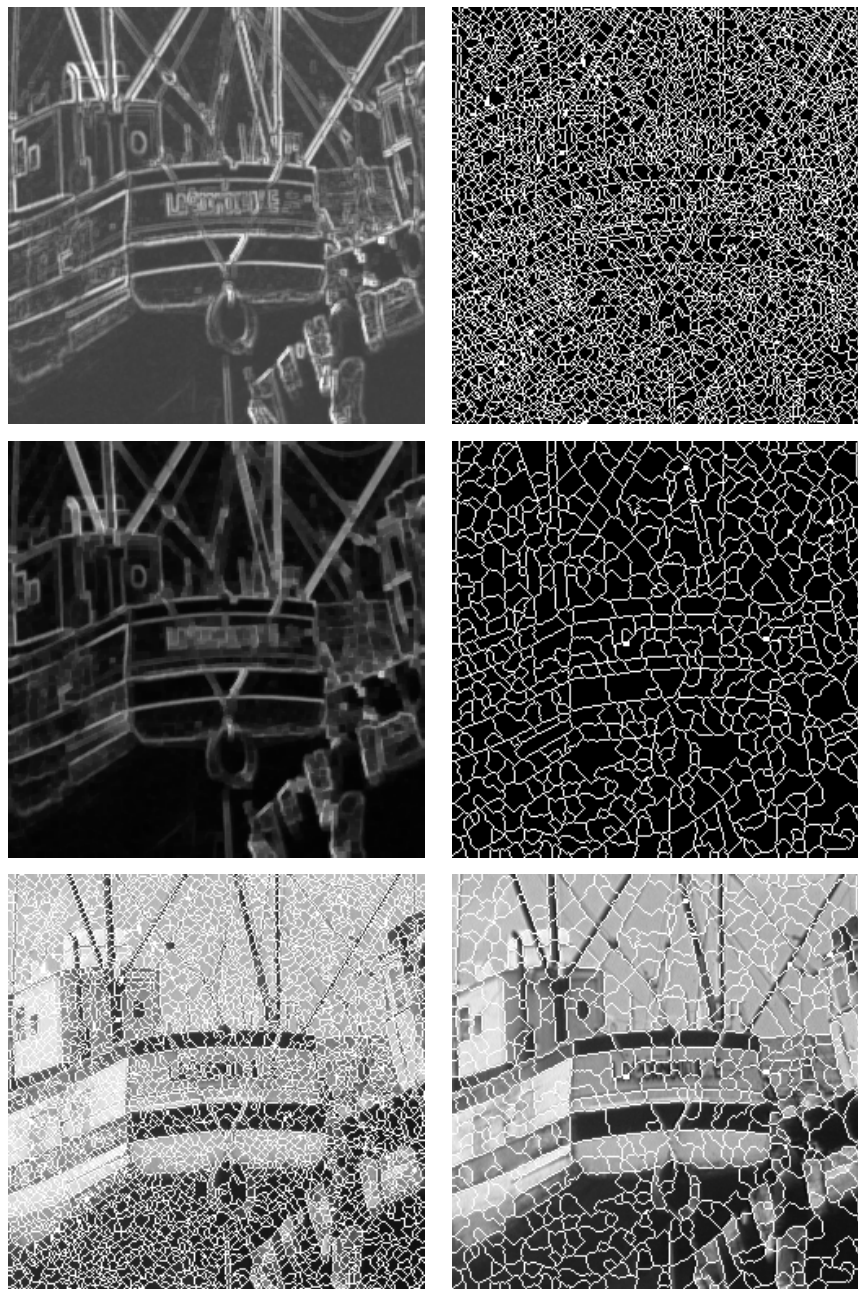


FIG. 6.18 – Ligne de partage des eaux appliquée sur une image de gradient (en haut), et sur une image de gradient fermé (au milieu). En bas : superposition de la ligne de partage des eaux sur l'image originale, sans et avec fermeture du gradient.

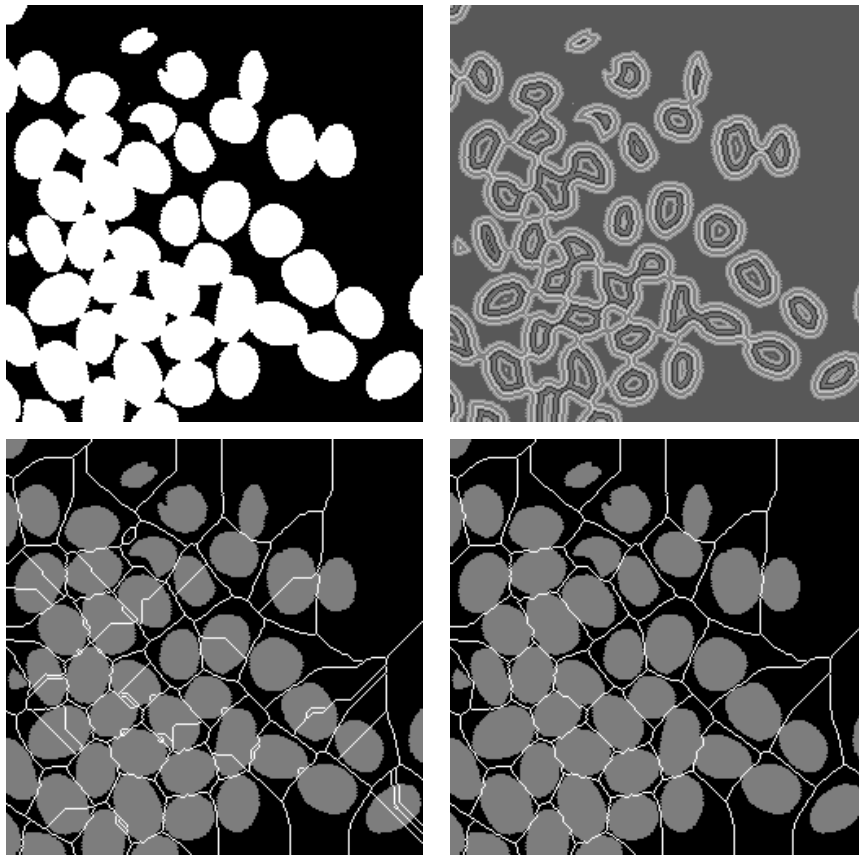


FIG. 6.19 – Image initiale, fonction distance, ligne de partage des eaux appliquée sur la distance inversée, ligne de partage des eaux appliquée à partir de la reconstruction de la distance moins 2 sous la distance.

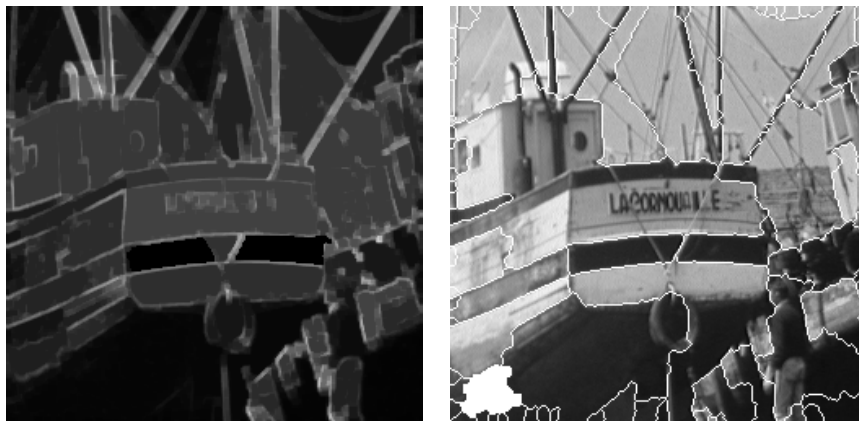


FIG. 6.20 – Image de gradient après reconstruction en imposant des marqueurs (à gauche) et ligne de partage des eaux appliquée sur cette image (à droite), limitant la sursegmentation.

