Exercices sur le flou et sur la fusion

1. **Fusion bayésienne et probabiliste**

   On s'intéresse à la détection des cultures avec le satellite SPOT et le satellite Landsat.

   Deux cultures nous intéressent : le blé d'une part (classe C_1) qui couvre 60 % des terres de la région d'intérêt, les légumes (classe C_2) qui couvrent 10% (le reste est occupé par des cultures non identifiées et des aménagements du sol).

   (a) On a détecté une zone $\mathcal{Z}$ très grande et très homogène dont le niveau moyen dans l'image SPOT est $m = 80$.

   Après apprentissage des probabilités conditionnelles des niveaux de gris en fonction de la classe ($P(n|C_1)$ et $P(n|C_2)$), on a déterminé que, pour le satellite SPOT, les probabilités du niveau de gris pour le blé et les légumes suivent des lois gaussiennes de paramètres :

   blé : moyenne $= m_1 = 100$ écart type $= \sigma_1 = 20$

   légumes : moyenne $= m_2 = 85$ écart type $= \sigma_2 = 5$

   Si l'on prend une décision selon le critère du maximum a posteriori (MAP), à quelle classe doit-on attribuer la zone ?

   (b) En fait on n'est pas très sûr de la probabilité a priori des légumes qui selon les années varie de 8% à 20% des terres. Est- ce que cela peut changer notre décision ?

   (c) Nous reprenons l'hypothèse de 10% de légumes. On utilise maintenant les images du satellite Landsat. Par apprentissage on trouve que les probabilités conditionnelles du niveau de gris n en fonction de la classe C_i dans Landsat, sont des lois uniformes dans l'intervalle $]25, 30]$ pour les légumes et $]20, 70]$ pour le blé.

   La zone $\mathcal{Z}$ apparaît dans ces images avec un niveau de gris moyen de $m' = 30$. Quelle est la décision au MAP qu'il faut prendre avec le seul capteur Landsat ?

   (d) Si l'on suppose les 2 capteurs indépendants, que nous propose la fusion bayésienne ?

2. **Ensembles flous (1)**

   Montrer que le min est la plus grande t-norme et que le max est la plus petite t-conorme.

   Montrer que la seule t-norme idempotente est le min.

3. **Ensembles flous (2)**

   Si l'on utilise comme opérateur de fusion entre 2 degrés d'appartenance x et y l'opérateur :

$$x \otimes y = \frac{xy}{1 - x - y + 2xy}$$

   quelles sont, parmi les propositions floues suivantes, celles qui seront bien traduites :

(a) si les 2 capteurs donnent séparément des appartenances très faibles, l'appartenance finale est quasiment nulle,
(b) l'appartenance est un compromis des appartenances données par chaque capteur individuellement s'ils sont d'avis différents,
(c) si l'un des capteurs donne une appartenance forte, c'est son avis qui l'emporte,
(d) si un capteur donne une appartenance faible, il ne compte pas dans l'appartenance finale, quelle que soit la valeur de l'autre,
(e) si l'on fusionne 3 fonctions d'appartenance, l'ordre de fusion est important,
(f) cet opérateur est toujours plus sévère que l'opérateur de moyenne.

On s'appuiera pour répondre à ces questions sur une étude rigoureuse des propriétés de l'opérateur.

4. **Ensembles flous (3)**
On s'intéresse aux opérateurs de fusion floue de la forme :

$$\forall (a,b) \in [0,1]^2,\ F(a,b) = \varphi^{-1}(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}),$$

où φ prend ses valeurs dans $[0,1]$.
(a) Montrer que si φ est monotone (soit croissante, soit décroissante), alors F est un opérateur de moyenne.
(b) On considère des fonctions φ de la forme $\varphi(a) = a^n$. La moyenne obtenue pour $n = 2$ est-elle plus sévère ou moins sévère que celle obtenue pour $n = 1$?
(c) Même question pour $\varphi(a) = (1-a)^n$.
(d) Quelle condition doit vérifier φ pour que :

$$\forall a \in [0,1],\ F(a, 1-a) = \frac{1}{2}?$$

(e) Interpréter les résultats précédents et donner des exemples de problèmes de fusion où ce type d'opérateur peut être intéressant.

5. **Représentation des connaissances et révision**
On s'intéresse à la révision d'informations, lorsque l'on apprend une nouvelle information. On suppose ici que les informations sont modélisées par des fonctions de croyance. Soit m la fonction de masse à réviser, Bel et Pls les fonctions de croyance et de plausibilité associées. On suppose que la nouvelle information est une information certaine, nous apprenant que la vérité est dans un sous-ensemble B de l'espace de discernement D considéré.
(a) Expliquer pourquoi cette information peut être modélisée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &m_B(B) = 1 \\ &m_B(A) = 0 \quad \forall A \subset D, A \neq B \end{aligned}$$

(b) La fonction de masse révisée est définie comme la combinaison par la règle de Dempster de m et de m_B. Calculer cette fonction de masse révisée. On pourra décomposer les éléments focaux de m sous la forme $A_1 \cup A_2$ avec $A_1 \subset B$ et $A_2 \cap B = \emptyset$. Interpréter le résultat en termes de transfert de croyances.

(c) Calculer les fonctions de croyance et de plausibilité révisées. Comparer la forme de la fonction de plausibilité obtenue avec la forme du conditionnement probabiliste.

Maintenant, on s'intéresse à la révision de possibilités. On définit la possibilité révisée $\Pi(A|B)$ (A et B étant des sous-ensembles nets de l'espace considéré Ω) sous la forme implicite suivante :

$$\Pi(A \cap B) = \min[\Pi(A|B), \Pi(B)].$$

(d) Montrer que la solution la plus naturelle et la moins spécifique pour expliciter $\Pi(A|B)$ est :

$$\Pi(A|B) = \begin{cases} 1 & si\ \Pi(A \cap B) = \Pi(B) \\ 0 & si\ A \cap B = \emptyset \\ \Pi(A \cap B) & sinon \end{cases}$$

(e) Calculer $N(A|B)$.

(f) Calculer la distribution de possibilité conditionnelle $\pi(s|B)$ pour tout $s \in \Omega$. Montrer qu'elle s'exprime comme une conjonction de deux distributions de possibilités.

(g) Comparer ce comportement conjonctif avec la révision des fonctions de croyance de l'exercice précédent.

6. **Théorie des fonctions croyances**

Pour un problème de détection d'obstacle en robotique mobile, on utilise trois capteurs A, B et C, de confiances respectives 0,7, 0,6 et 0,8. A et B détectent un objet dans une zone α de l'espace, C détecte un objet dans une zone β de l'espace.

(a) On suppose d'abord que ces deux zones sont disjointes. Quel est le modèle de masses le plus simple pour représenter ces données ?

(b) On suppose qu'il y a un seul objet. Que donne la combinaison par Dempster-Shafer ? Commenter.

(c) On suppose maintenant qu'il y a deux objets. Comment peut-on utiliser le conflit pour regrouper les sources qui détectent les mêmes objets ?

(d) On suppose maintenant que chaque source donne une information sur chaque région. Soit par exemple le jeu de masses suivant :

	α	β	Ω
A	0,6	0,1	0,3
B	0,4	0,2	0,4
C	0,3	0,5	0,2

Effectuer la fusion et comparer avec les résultats précédents.

(e) On suppose maintenant que les deux zones ne sont pas disjointes. Comment modifierait on la modélisation ? Discuter les résultats.

(f) Reprendre les mêmes questions en essayant cette fois de modéliser la situation avec des ensembles flous et des possibilités.

7. **Modélisation de la fusion**

Dans une application sur le suivi des forêts, on veut pouvoir modéliser les connaissances suivantes :

(a) Les feux de forêts détruisent 1/5 des forêts chaque année.

(b) Une forêt éparse est une étendue de forêt ayant au moins 20 % de prairie.

(c) Sur une image du satellite ERS, une zone $\mathcal{Z}$ est sûrement soit une forêt, soit des vergers.

(d) Un pixel en lisière de forêt ne recouvre qu'à moitié la forêt.

(e) Une zone $\mathcal{Z}$ a sûrement au moins 20% de forêt, et peut-être 50%.

(f) Il y a une chance sur quatre que le point central de l'image SPOT soit un pixel de forêt.

Indiquer quelle modélisation vous semble adaptée, probabiliste, floue ou par théorie des fonctions croyances pour chacune des situations.

Nota : les données utilisées pour construire ces exemples sont des valeurs d'école, et non des données expérimentales.