PETITE INTRODUCTION A LA LOGIQUE

Patrick Bellot

Télécom Paris
Institut Polytechnique de Paris
bellot@telecom-paris.fr

MITRO 202

Introduction

La logique est la théorie qui tente de mathématiser le raisonnement, c'est-à-dire d'en faire un objet mathématique comme un autre sur lequel on puisse démontrer des théorèmes.

Elle s'occupe principalement du raisonnement mathématique, beaucoup plus que du raisonnement courant qui est plus difficilement appréhendable.

En ce sens, la logique fait partie des *méta-mathématiques*, i.e. des mathématiques à propos des mathématiques.

Jusqu'à l'apparition des ordinateurs et de l'informatique, elle était fort peu utile car les mathématiciens non-logiciens font peu de cas de l'étude du raisonnement.

Introduction

Lorsqu'au début du siècle, Bertrand Russel commença à découvrir le paradoxe qui porte son nom, Henri Poincaré déclara en 1906 :

La logique n'est plus stérile ! Elle engendre des contradictions.

Cela en dit long sur certaines mentalités. Pourtant, mathématiser le raisonnement permet d'en discuter et de se convaincre sur des bases posées par la logique. Encore faut-il que ces bases soient admises par tous !

La logique est déclarative

Comme nous venons de le dire, la logique étudie les raisonnements qui sont composés de déductions faites sur des propositions. Comme le remarque feu le professeur André Chauvin, logicien français spécialisé dans l'étude du calculable, on distingue trois usages des propositions :

- l'usage déclaratif : la proposition est appelée déclaration ou assertion ;
- l'usage interrogatif : la proposition est appelée question ;
- l'usage impératif : la proposition est appelée instruction ou commandement.

Même si l'informatique nous a appris la nécessité de ces trois usages, la logique classique s'est attachée à l'usage déclaratif des propositions. Les raisons sur lesquelles nous reviendrons peuvent être explicitées comme suit.

La logique est déclarative

Tout d'abord, les mathématiques assimilent implicitement les objets de leur discours à des êtres matériels tous présents. Nous n'avons pas à les créer mais seulement à les découvrir.

André Chauvin cite l'exemple des nombres réels et du sous-ensemble des nombres transcendants[1]. Les mathématiques les considèrent comme présents. De sorte qu'une question telle que *La constante C d'Euler est-elle un nombre transcendant ?* possède une réponse même si nous le la connaissons pas aujourd'hui.

Toute question possède une réponse, à nous de la découvrir. On peut se passer des questions au bénéfice des déclarations dont on démontre la vérité ou la fausseté. De même, on peut se passer des commandements puisque les mathématiques travaillent dans un univers pré-existant.

[1] Un nombre est transcendant si et seulement si il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients rationnels.

La logique est déclarative

Le point de vue qui vient d'être expliqué régnera sans partage sur la logique théorique : toute proposition se ramène à une déclaration.

Si questions et commandements figurent dans les traités de logique, ils sont exprimés dans la langue naturelle et non dans le langage de la logique.

Cette logique déclarative est appelée logique de Hilbert qui en a donné une définition axiomatique rigoureuse et élégante.

Le schéma hilbertien des propositions

Les propositions logiques sont des déclarations à propos d'objets. Quand ces objets ne sont pas spécifiés, on peut les représenter par des *variables libres*. Une variable libre est une lettre représentant un objet non spécifié dans un contexte et il s'agit du même objet quelle que soit l'occurrence de la variable libre.

Lorsque nous ne voulons pas spécifier la proposition, nous utilisons des symboles tels que $P(x)$ ou $Q(x, y)$. $P(x)$ désigne une proposition parlant d'un objet x tandis que $Q(x, y)$ désigne une proposition parlant de deux objets x et y. Ce type d'écriture est appelé un *schéma de proposition*.

Les lettres P ou Q sont appelés des lettres de proposition ou des proposition-lettre. H.B. Curry les appelle des *prédicateurs*.

Le schéma hilbertien des propositions

Hilbert propose de continuer en prenant une proposition précise $R_0(x, y)$. $R_0(x, y)$ peut être par exemple l'égalité $x = y$. Pour deux objets x_0 et y_0 spécifiés, $R_0(x_0, y_0)$ est vraie ou fausse (principe du tiers-exclu). On peut choisir de lui associer un symbole v si la proposition est vraie et un symbole f si la proposition est fausse. On peut donc considérer R_0 comme une fonction à deux arguments et à valeur dans $\{v, f\}$.

On voit l'analogie entre le prédicat vu par Hilbert et la fonction caractéristique de l'ensemble des couples (x_0, y_0) tel que $R_0(x_0, y_0)$ est vrai. Mais..., et c'est très important, la logique est antérieure à la théorie des ensembles qui la suppose connue pour formaliser ses axiomes. Aussi les prédicats sont des fonctions «plus générales» que les fonctions ensemblistes définie par des graphes, elles ont le même caractères que les fonctions processus définies par exemple avec les combinateurs.

Naissance de la logique mathématique

On peut faire remonter les premiers pas de la logique à Aristote puisqu'on lui doit le syllogisme « Tous les hommes sont mortels, les Athéniens sont des hommes, donc ils sont mortels ». C'est peut-être la première mise en évidence d'une règle de déduction *formelle* : « tous les B sont des C, les A sont des B, donc tous les A sont des C ».

Au 17$^{\text{ème}}$ siècle, Gottfried Leibniz, alors plus philosophe que mathématicien, proposait la recherche d'une *Characteristica Universalis*, i.e. une langue à vocation universelle qui permettrait une vision particulièrement claire de la vérité des propositions, et celle d'un *Calculus Ratiocinator*, méthode de manipulation des propositions qui permettrait de déterminer leurs vérités.

Naissance de la logique mathématique

La création d'un formalisme logique du raisonnement était selon le philosophe Thomas Hobbes l'objet même de la logique. Il publie en 1655 un traité, *De Corpore*, où il avance que la raisonnement n'est rien d'autre qu'un calcul comme un autre. L'histoire raconte que Hobbes fut séduit par la logique du raisonnement de la démonstration du théorème de Pythagore dans les *Éléments d'Euclide*, démonstration qu'il lut à rebours découvrant les propositions utilisées par celle-ci, puis les propositions utilisées pour démontrer les premières propositions et ainsi de suite... jusqu'à atteindre les axiomes.

Il fut tellement séduit par la rigueur et l'infaillibilité du discours mathématiques qu'il passa le reste de sa vie à rechercher une sorte d'alchimie du raisonnement permettant de combiner des concepts vrais en nouveaux concepts vrais. Dans *Computatio Sive Logica*, il écrivait qu'il ne fallait pas penser que le calcul se faisait uniquement avec des nombres.

Naissance de la logique mathématique

G. Leibniz qui n'avait que 8 ans quand Hobbes formula ses idées commença à travailler les concepts de Hobbes en 1666 à l'âge de 19 ans. Dans son *De Arte Combinatoria*, il rend grâce à Hobbes de lui avoir insufflé l'idée d'un système de calcul pour le raisonnement. Il tenta de développer ce type de calcul en représentant les concepts par des nombres.

La période moderne, i.e. non plus seulement philosophique, de la logique commence probablement avec Gottlob Frege quand il publia en 1879 le *Begriffsschrift*, i.e. *Écriture de concepts*. Il y définit une syntaxe graphique pour représenter les notions logiques d'implication, de négation,... clamant que la représentation textuelle, que nous connaissons bien, n'était pas la plus confortable. On lui doit les quantificateurs universel ($\forall$) et existentiel ($\exists$) et le symbole d'assertion ($\vdash$).

Naissance de la logique formelle

C'est à Bertrand Russel et Alfred Whitehead que l'on doit la forme moderne de la logique mathématique.

Dans les *Principia Mathemtica* en 1910, ils donnent le cadre formalisé de développement dont la logique mathématique n'est pratiquement pas sortie : un langage rigoureux définissant des expressions appelées *formules* et des règles formelles de manipulations des expressions de ce langage.

Dans ces règles, on trouve des *axiomes* disant que certaines formules sont vraies et l'on trouve des règles de *déduction* affirmant la véracité d'une certaine formule, la *conclusion*, pourvu que certaines autres formules, les *hypothèses*, soient vraies.

Naissance de la logique formelle

Ces règles sont *formelles*, ce qui signifie qu'elles sont basées sur la forme des formules concernées et non sur leur sens.

Et un système décrit ainsi est un système formel.

D'un point de vue informatique cela est intéressant puisque les ordinateurs sont eux-aussi des machines formelles.

On répertorie plusieurs façons de présenter un système logique : déduction naturelle, systèmes hilbertien et calcul des séquents. Celles-ci seront abordées plus loin.

Le positivisme

Le rêve de ce début de $20^{\text{ème}}$ siècle était de faire de la logique un calcul et donc de mécaniser le raisonnement, puis par suite *toutes les mathématiques* et puisque toutes les sciences sont plus ou moins basées sur les mathématiques, on aurait fini par mécaniser *toutes les sciences*...

C'était le rêve de David Hilbert et l'objectif du trop fameux *Programme de Hilbert*, témoin d'une époque scientifiquement conquérante et positiviste. D. Hilbert ne déclarait-il pas lors d'un colloque à l'université de Königsberg en 1930 :

... Nous devons savoir, nous saurons ...

La fin d'un rêve

Las, deux jours auparavant, dans le même lieu mais dans le cadre d'un autre colloque scientifique, Kurt Gödel avait présenté son résultat d'incomplétude selon lequel il n'était pas possible d'axiomatiser formellement, et surtout récursivement, les vérités de l'arithmétique.

Le rêve de la mécanisation des mathématiques avait pris l'eau abîmé par deux icebergs :

- celui de la *complétude* : on ne peut pas axiomatiser convenablement toutes les vérités d'un système mathématique dès lors que celui-ci intègre la simple arithmétique des entiers naturels ;
- celui de la *décidabilité* : il n'existe par de procédure automatisable permettant de savoir *dans le cas général* si un énoncé est vrai ou pas.

L'hérésie intuitionniste

Toujours en ce début de siècle, et peut-être par réaction au courant positiviste des sciences, est née une école mathématique et logique entraînée par Luitzen Brouwer et connue sous le nom d'école *intuitionniste*. Les intuitionnistes ont créé une logique, la *logique intuitionniste*, qui est celle qui intéresse les informaticiens.

Les intuitionnistes remarquent tout d'abord que la logique classique, classique par opposition à la logique intuitionniste, ne construit pas les vérités qu'elle démontre, elle les découvre.

Elle pré-suppose que les choses sont soit vraies, soit fausses. Les mathématiques se placent dans un univers platonicien.

L'hérésie intuitionniste

Cela se traduit par l'axiome du tiers-exclu :

$$A \vee \neg A \qquad \textit{(tertium non datur)}$$

Cet axiome dont le sens littéral est qu'étant donnée une proposition, celle-ci est vraie ou bien sa négation est vraie.

Il justifie de nombreux raisonnements comme le raisonnement par l'absurde, *reductio ad absurdum* : pour prouver A, je suppose $\neg A$, j'en déduis une contradiction et donc A est vraie. Mais présupposer que toute chose est soit vraie soit fausse est une croyance philosophique, voire théologique comme le soutient le grand logicien Haskell Curry. Peut-on raisonnablement construire les mathématiques sur une base théologique ?

L'hérésie intuitionniste

Un autre aspect de la logique classique inconvenant pour le logicien intuitionniste est le fait que l'on peut montrer classiquement l'existence de quelque chose vérifiant une propriété, une formule du type $\exists x \cdot A(x)$, sans être pour autant capable d'exhiber le x en question.

Clairement, la logique classique n'est pas *constructive* car elle ne construit pas ce dont elle prétend l'existence. Les livres mathématiques sont pleins de démonstrations de la rationalité de certains nombres sans pour autant être capable d'exhiber les deux membres de la fraction.

L'hérésie intuitionniste

Exemple de preuve classique. Démontrons qu'il existe des nombres réels irrationnels et positifs a et b tels que a^b soit rationnel. On considère $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ sachant que $\sqrt{2}$ est irrationnel :

- si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, on choisit $a = b = \sqrt{2}$;
- si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel, on choisit $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$ car $a^b = 2$.

La rédaction formelle et rigoureuse de la démonstration oblige à écrire à un moment ou à un autre que l'on a $A \vee \neg A$ avec A étant la proposition « $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel ».

L'hérésie intuitionniste

Exemple de preuve classique. Soit σ construit comme suit : j'écris le développement du nombre π en base 10. En dessous de chaque chiffre du développement de π, j'écris le chiffre 3 et je ne m'arrête que si je trouve la séquence de chiffres
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 dans le développement décimal de π.

Deux cas peuvent se présenter :

- il existe une séquence 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 dans le développement décimal de π, le nombre σ sera donc 0.33....3 où k, le nombre de chiffres 3, est égal au rang du chiffre 9 de la séquence dans le développement décimal de π ; alors $\sigma = (10^k - 1)/3.10^k$;
- soit une telle séquence n'existe pas et σ est égal à 0.33333.... soit 1/3.

Dans les deux cas, on peut démontrer que σ est rationnel mais on n'en possède pas de paire numérateur-dénominateur. Le type de raisonnement précédent est basé sur le tiers-exclu puisque l'on suppose formellement que soit la séquence 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 existe dans le développement décimal de π, soit elle n'y existe pas.

L'hérésie intuitionniste

Un autre aspect des mathématiques classiques, qui ne concerne pas véritablement la logique, celui de l'*infini actuel* est aussi rejeté par les intuitionnistes. Ce principe accepte l'idée de pouvoir considérer comme actuellement présents tous les éléments d'un ensemble infini comme celui des nombres réels.

On parle d'infini-actuel de Platon-Cantor.

Avec par exemple l'axiome du choix qui stipule grossièrement que si l'on possède une infinité d'ensembles $(E_i)_{i \geq 0}$, il est possible de sélectionner instantanément un élément dans chacun des ensembles : il existe une fonction f telle que $f(i) \in E_i$ pour tout $i \geq 0$.

L'hérésie intuitionniste

Effectivement, si je prends une infinité de paires de chaussures, je peux choisir par exemple toutes les chaussures gauches et mon choix est instantané. Je peux aussi choisir la chaussure gauche quand i est pair, la chaussure droite quand i est impair.

Mais prenons un autre exemple : celui d'une infinité de paires de chaussettes. Dans une paire de chaussettes, les deux chaussettes sont entièrement semblables mais cependant distinctes. Comment décrire instantanément un choix d'une chaussette dans chacune des paires ?

L'hérésie intuitionniste

Que propose l'intuitionnisme ? Les intuitionnistes refusent cet état de fait et se proposent de reconstruire les mathématiques sur de nouvelles bases.

Ils rejettent le caractère non constructif de la logique classique qui est matérialisé par l'axiome du tiers-exclu.

Ils refusent la notion d'infini actuel, le fait que l'on puisse considérer les nombres réels (où tout autre ensemble ayant le même caractère) comme étant tous présents.

En fait, ils rejettent la vision platonicienne des mathématiques où une preuve est un moyen de découvrir une vérité pré-existante.

L'hérésie intuitionniste

Luitzen Brouwer en 1923 a même comparé les mathématiques classiques à une activité criminelle : « *Une théorie incorrecte qui n'est pas arrêtée par une contradiction n'en est pas moins incorrecte, exactement comme une politique criminelle qui n'est pas réprimée par une cour de justice n'en est pas moins criminelle* ».

Les fondements intuitionnistes

Quels sont les fondements proposés par les intuitionnistes ?

D'un point de vue mathématiques, on rejette ce qui pourrait être qualifié de croyance et l'on se base sur ce qui est *intuitivement* accepté par tous les individus pensants : la suite des nombres naturels 0, 1, 2, 3,... Le reste n'existe pas !

On ne parle pas de l'ensemble des nombres naturels mais du procédé qui permet de construire cette suite à partir de 0.

Reste à expliquer comment l'on va raisonner...

Les fondements intuitionnistes

D'un point de vue logique, on ne place plus la vérité au centre de la logique mais plutôt la *preuve*.

La vérité ne se trouve plus dans un univers extérieur mais dans les preuves et la combinaison des preuves entre elles.

La vérité n'est pas découverte grâce à la preuve mais construite avec la preuve. Sans preuve, il n'est pas de vérité.

Ainsi dire qu'une formule A est soit vraie soit fausse n'a de sens que si l'on a prouvé qu'elle était vraie ou bien si l'on a prouvé qu'elle était fausse. D'où le rejet de l'axiome du tiers-exclu.

Les fondements intuitionnistes

Par ailleurs, les intuitionnistes font la supposition fondamentale suivante : le fait qu'une preuve p prouve une proposition A doit être décidable.

D'un point de vue solipsiste[2], cela apparaît clairement : si l'on n'est pas capable de décider si p est une preuve de A alors p ne peut pas être considérée comme une preuve de A.

[2] Rien n'existe hors de la pensée individuelle.

Les fondements intuitionnistes

De plus, les preuves intuitionnistes ne sont pas des preuves ordinaires, elles doivent être constructives. En fait, ce sont toutes les mathématiques intuitionnistes qui sont *constructives*.

Pour pouvoir parler d'un objet mathématique, il faut être capable de le construire intuitivement. C'est-à-dire qu'il doit exister un *processus mental* de construction de cet objet.

Ce processus n'a pas besoin d'être réaliste en terme de temps d'exécution ou de ressources nécessaires à sa réalisation. Il lui suffit d'exister et d'être communicable à quelqu'un d'autre qui pourrait le reproduire.

Les fondements intuitionnistes

On peut ainsi construire mentalement la suite des entiers naturels et tout le monde est capable de le faire. En revanche, une définition comme :

$$L = \begin{cases} \text{le plus grand nombre premier tel que } L-2 \text{ est aussi premier} \\ 1 \text{ si un tel nombre premier n'existe pas} \end{cases}$$

n'a de sens qui si l'on peut trancher entre les deux alternatives, c'est-à-dire si l'on dispose d'une preuve qu'un tel nombre premier existe ou bien si l'on dispose d'une preuve qu'il n'existe pas. En l'absence de l'une de ces deux preuves, la définition ci-dessus n'a pas de sens.

Les fondements intuitionnistes

Le côté constructif des preuves se retrouve dans les deux propriétés suivantes d'une logique intuitionniste :

Propriété d'existence. Si une formule $\exists x \cdot A(x)$ est prouvable, la preuve de cette formule doit permettre de retrouver le *témoin* x_0 tel que $A(x_0)$ est aussi prouvable.

Propriété de disjonction. Si une formule $A \vee B$ est prouvable alors soit A est prouvable soit B est prouvable et l'examen de la preuve de $A \vee B$ doit permettre de savoir lequel des deux est prouvable.

Ces deux propriétés sont obtenues d'une part en refusant l'axiome du tiers-exclu et d'autre part par des *artifices syntaxiques*, le mot est peut-être un peu fort, dans la présentation de la logique.

Une preuve classique troublante

En logique classique, i.e. non intuitionniste, on peut démontrer le théorème suivant :

$$((F \wedge G) \Rightarrow H) \iff ((F \Rightarrow H) \vee (G \Rightarrow H))$$

On peut montrer ce résultat en se servant des équivalences logiques, dites *lois de Morgan* (qui se justifient par le tiers-exclu)[3] :

- $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$;
- $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$.

On se sert également de :

- $A \Rightarrow B \equiv (\neg A) \vee B$;
- $\neg\neg A \equiv A$.

[3] Le symbole $\equiv$ se lit ici « $\cdots$ est logiquement équivalent à $\cdots$ »

Une preuve classique troublante

Notons que cette dernière équivalence n'est pas vraie en logique intuitionniste. Nous nous servons également des propriétés d'associativité, de commutativité et d'idempotence de la disjonction $\vee$.

On a :

$$
\begin{array}{rcl}
(F \wedge G) \Rightarrow H & \equiv & (\neg(F \wedge G)) \vee H \\
& \equiv & ((\neg F) \vee (\neg G)) \vee H \\
& \equiv & (\neg F) \vee (\neg G) \vee H \\
& \equiv & (\neg F) \vee (\neg G) \vee H \vee H \\
& \equiv & ((\neg F) \vee H) \vee ((\neg G) \vee H) \\
& \equiv & (F \Rightarrow H) \vee (G \Rightarrow H)
\end{array}
$$

Une preuve classique troublante

Donc, de $(F \wedge G) \Rightarrow H$, on peut déduire $(F \Rightarrow H) \vee (G \Rightarrow H)$. Prenons pour F, G, et H les propositions suivantes :

$x = 0$ pour F,

$y = 0$ pour G et

$(x, y) = (0, 0)$ pour H.

On a bien :

$$(x = 0) \wedge (y = 0) \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

D'après le théorème, on a aussi :

$$(x = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)) \vee (y = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0))$$

et cela semble pour le moins bizarre...

Une preuve classique troublante

Notons qu'aucune astuce n'a été utilisée et que ce théorème peut être rigoureusement démontré en logique classique.

La solution de l'énigme réside dans l'interprétation classique des symboles de la logique.

Ainsi, dans le monde éternel de Platon-Cantor, $\Rightarrow$ ne traduit pas une implication. Que signifierait « A implique B » dans un monde où les vérités sont éternels et ne changent donc pas ?

La formule $A \Rightarrow B$ devrait se lire « B si A» ?

La sémantique des preuves de Heyting-Kolmogorov

Les intuitionnistes vont plus loin encore dans l'expression de leurs concepts puisqu'ils définissent également ce qu'est une preuve.

Cette définition des preuves est appelée la *sémantique des preuves intuitionnistes* de Heyting-Kolmogorov.

Les preuves sont définies en termes de *processus effectivement calculables*, notion qui recouvre toutes les notions de processus automatisables d'une manière ou d'une autre : Logique Combinatoire, λ-calculus, machines de Turing, algorithmes, etc. et dont la *thèse de Church* affirme qu'elle est une notion identifiable à celle de fonction λ-définissable, i.e. de fonction définissable dans le λ-calculus.

La sémantique des preuves de Heyting-Kolmogorov

La preuve d'une formule atomique est une méthode automatisable permettant de vérifier que la formule atomique est vraie. Par exemple, une preuve de $99 + 102 = 201$ peut être un algorithme qui calcule la somme de 99 et 102 et vérifie que le résultat est bien 201.

La preuve d'une conjonction $A \wedge B$ est formée d'une preuve de A et d'une preuve de B.

La preuve d'un disjonction $A \vee B$ est formée d'une preuve de A ou bien d'une preuve de B plus une indication permettant de savoir lequel a été prouvé.

La preuve d'une négation $\neg A$ est la donnée d'un processus effectivement calculable qui transforme toute preuve de A en une preuve d'une contradiction, $0 = 1$ par exemple.

La sémantique des preuves de Heyting-Kolmogorov

La preuve d'une implication, $A \Rightarrow B$ est un processus effectivement calculable transformant toute preuve de A en une preuve de B.

La preuve d'une quantification existentielle, $\exists x \cdot A(x)$, est formée d'un élément t du domaine de quantification et d'une preuve de $A(t)$.

La preuve d'une quantification existentielle, $\forall x \cdot A(x)$, est la donnée d'un processus effectivement calculable qui transforme tout élément t du domaine de quantification en une preuve de $A(t)$.

Note sut cette sémantique

Dans la définition des preuves de formules $A \Rightarrow B$ et $\forall x \cdot A(x)$, nous avons fait intervenir un « processus effectivement calculable qui transforme $\cdots$ en $\cdots$ ».

Il manque un élément dans cette description : il faut prouver que le processus effectivement calculable fait bien ce qui est annoncé.

Ainsi, dans le cas de l'implication, il faut prouver que la preuve transforme bien toute preuve de A en une de B.

C'est un élément pas très clair de cette sémantique des preuves qui fut utilisé par les opposants à l'intuitionnisme.

La négation intuitionniste

Il ne faut pas confondre la définition de la négation avec le raisonnement par l'absurde.

En logique intuitionniste, pour montrer $\neg A$, il faut montrer $A \Rightarrow \perp$ où $\perp$ est une contradiction, $0 = 1$ par exemple. La logique intuitionniste dit donc « de $A \Rightarrow \perp$, déduire $\neg A$ ».

Le raisonnement par l'absurde dit « de $(\neg A) \Rightarrow \perp$, déduire A » et il est une conséquence de l'axiome du tiers-exclu qui rend logiquement équivalent $\neg\neg A$ et A.

Jusqu'au dogmatisme...

Le dogmatisme de certains intuitionnistes alla très loin. Ainsi, G.F. Griss, rejetait même la négation intuitionniste avec le raisonnement suivant. Si je veux démontrer qu'il n'existe pas de cercle carré, je vais supposer qu'il en existe un, aboutir à une contradiction et déduire mon résultat.

Mais puisqu'un carré circulaire est une absurdité, comment puis-je raisonnablement supposer qu'il en existe un ? Comment puis-je avoir une vision claire de ce qu'est un carré circulaire pour pouvoir en déduire une contradiction ?

Cela est contradictoire avec l'idée que tout objet manipulé par les mathématiciens intuitionnistes doit pouvoir être construit mentalement. Griss propose donc de faire reposer les mathématiques sur des raisonnements exclusivement positifs.

Ainsi pour montrer qu'il n'existe pas de carré circulaire, on peut démontrer qu'un carré n'est pas un cercle en ce sens qu'on ne peut lui trouver un centre : quelque soit le point P du plan que je choisisse, je peux toujours trouver deux points Q et R du carré tels que la distance $|PQ|$ soit différente de la distance $|PR|$.

Le raisonnement intuitionniste

Il reste alors la logique intuitionniste. Celle-ci est certes moins puissante que la logique classique.

Les résultats intuitionnistes peuvent être obtenus par la logique classique mais la réciproque n'est pas vraie.

En revanche, les démonstrations intuitionnistes sont constructives : pour savoir si un résultat classique est aussi intuitionniste, on peut et on doit bien sûr le redémontrer avec l'axiomatisation intuitionniste mais on peut aussi préalablement vérifier que ce résultat est intuitivement valable vis-à-vis de la sémantique des preuves de Heyting.

Le raisonnement intuitionniste

Par exemple, on peut déduire classiquement $(A \wedge B \Rightarrow C)$ de $(A \Rightarrow B \Rightarrow C)$.

Ce résultat a-t-il un sens en terme de sémantique de Heyting ?

Si p est un processus effectivement calculable prenant un argument x, on note $p(x)$ l'application du processus p à l'argument x et son résultat.

Une preuve de $(A \Rightarrow B \Rightarrow C)$ est un processus p qui transforme une preuve a de A en une preuve $p(a)$ de $(B \Rightarrow C)$.

Et $p(a)$ est un processus qui transforme une preuve b de B en une preuve $p(a)(b)$ de C.

Le raisonnement intuitionniste

Supposons à présent que j'aie une preuve x de $A \wedge B$, alors x est une paire formée de $\pi_1(x)$, preuve de A, et $\pi_2(x)$, preuve de B.

Je définis le processus $q(x)$ par « calculer $a = \pi_1(x)$, calculer $y = p(a)$, calculer $b = \pi_2(x)$, calculer $y(b)$ ».

Clairement puisque p et les deux projections π_1, π_2 sont calculables alors q est aussi calculable.

Par ailleurs, puisque a est une preuve de A, y est une preuve de $(B \Rightarrow C)$. Puisque b est une preuve de B, $y(b)$ est une preuve de C.

On a donc q, processus effectivement calculable défini par $q(x) = p(\pi_1(x))(\pi_2(x))$, qui transforme toute preuve de $A \wedge B$ en preuve de C.

On peut donc raisonnablement penser que le résultat de départ est aussi un résultat intuitionniste.

Le raisonnement intuitionniste

Un exemple de théorème classique mais non intuitionniste est la suivante $\exists x \cdot (\forall y \cdot A(x) \Rightarrow A(y))$.

Cette formule est paradoxale : s'il existe un x qui s'il possède une propriété A alors tous les autres objets la possèdent. Par exemple, il existe un homme sur la terre tel que s'il porte un chapeau tous les autres hommes portent aussi un chapeau.

Justification classique : si tous les hommes portent un chapeau, prenons-en un au hasard et il sera cet x pour qui le résultat est évidemment vrai puisque tous les hommes y portent un chapeau. Si au moins un homme ne porte pas de chapeau, prenons cet homme pour x et de nouveau tout se passe bien puisque l'on peut toujours écrire $A(x) \Rightarrow A(y)$ puisque $A(x)$ n'est pas vrai.

On peut bien sûr démontrer rigoureusement ce résultat avec les axiomes de la logique classique. Un examen en terme de sémantique des preuves de Heyting montre qu'il n'existe pas de preuve intuitionniste de cette formule.

Que reste-t-il de l'intuitionnisme ?

Il va de soi qu'en prenant comme base les seules constructions mentales intuitives et communicables et en rejetant des raisonnements comme celui par l'absurde, on se limite vraiment. David Hilbert en 1928 déclarait : «... *Ôter la loi du tiers-exclu au mathématicien reviendrait à priver l'astronome de son télescope et le boxeur de son poing ...».*

Si, en plus, on décide de rejeter la négation comme le fait Griss, on a encore moins de puissance d'expression.

Néanmoins, l'école a reconstruit inutilement mais avec des méthodes très différentes la plupart des résultats mathématiques connus. Ce fut un travail long, extrêmement fastidieux, difficile et réalisé en marge de la communauté mathématique internationale.

Ainsi, l'école intuitionniste n'a pratiquement pas eu droit de citer en France où le pragmatisme l'a emporté.