FORMALISMES LOGIQUES

Patrick Bellot

Télécom Paris
Institut Polytechnique de Paris
bellot@telecom-paris.fr

MITRO 202

Citons :

INTRODUCTION TO METAMATHEMATICS
S.C. Kleene
Biblioteca Mathematica, North Holland, 1952

et

PROOFS AND TYPES
J.Y. Girard & Y. Lafont & P. Taylor
Cambridge Tracts in T.C.S., Cambridge, Angleterre, 1989

et

LOGIQUE, RÉDUCTION, RÉSOLUTION

R. Lalement
Études et recherches en Informatique, Masson, Paris, 1990

Introduction

La logique se présente en tant que système formel.

Il existe différentes manières de présenter la logique.

L'important est que les règles soient purement syntaxiques.

Introduction

Le langage de la logique des prédicats comprend et étend celui de la logique des propositions.

C'est un *langage du premier ordre* qui fut introduit par Frege en 1879.

Un langage du premier ordre permet de décrire un domaine dans lequel des objets atomiques sont représentés par des constantes et où l'on peut exprimer d'autres objets par des termes fonctionnels.

Des prédicats permettent de décrire des propriétés de ces objets.

Les formules

Les formules :

- toute variable propositionnelle est une formule ;
- si p est un prédicat d'arité $n \geq 0$ et si $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes alors l'application $p(t_1, \ldots, t_n)$ est une formule ;
- si A est une formule, $(\neg A)$ est une formule ;
- si A et B sont des formules, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ et $(A \Rightarrow B)$ sont des formules ;
- si x est une variable d'individu et si A est une formule, $(\forall x \cdot A)$ et $(\exists x \cdot A)$ sont des formules ;
- *(règle de fermeture)*.

Conventions syntaxiques

Les connecteurs $\wedge$ et $\vee$ ont associatifs à gauche.

$$A \wedge B \wedge C \equiv ((A \wedge B) \wedge C)$$

Le connecteur $\Rightarrow$ est associatif à droite.

$$A \Rightarrow B \Rightarrow C \equiv (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$$

Le connecteur de négation $\neg$ est *syntaxiquement* plus prioritaire que les connecteurs binaires $\wedge$ et $\vee$ qui sont eux-mêmes plus prioritaires que $\Rightarrow$, lui-même plus prioritaire que les quantificateurs.

$$\neg A \wedge B \equiv ((\neg A) \wedge B)$$

$$A \wedge B \Rightarrow \neg C \vee D \equiv ((A \wedge B) \Rightarrow ((\neg C) \vee D))$$

Variables libres et variables liées

On notera $FV(A)$ l'ensemble des variables libres d'une formule A :

- $FV(X) = \emptyset$ si X est une variable propositionnelle ;
- $FV(p(t_1, \ldots, t_n)) = \{x_1, \cdots, x_m\}$ où $x_1, \cdots, x_m$ sont les variables ayant au moins une occurrence dans $t_1, \cdots, t_n$;
- $FV(\neg A) = FV(A)$;
- $FV(A \wedge B) = FV(A \vee B) = FV(A \Rightarrow B) = FV(A) \cup FV(B)$;
- $FV(\forall x \cdot A) = FV(\exists x \cdot A) = FV(A) - \{x\}$.

Une variable qui possède une occurrence dans une formule et n'est pas libre dans cette formule est dite liée.

Dans une même formule, une même variable peut avoir des occurrences libres et des occurrences liées. Par exemple, dans la formule $(x = 0) \wedge (\forall x \cdot x + 0 = 0)$, la première occurrence de x est libre et la deuxième occurrence est liée.

Une occurrence libre de x dans A devient liée dans $\forall x \cdot A$, on dit qu'elle est liée par le quantificateur $\forall$. La même remarque s'applique avec le quantificateur $\exists$.

Variables liées

La principale caractéristique des variables liées est que l'on peut les renommer sans changer le sens de la formule à condition de prendre une *nouvelle* variable.

Les formules $\forall x \cdot x + 0 = x$ et $\forall y \cdot y + 0 = y$ ont le même sens. Pour obtenir la deuxième, il faut renommer x en y.

Prenons la formule vraie suivante :

$$\forall x \cdot \exists y \cdot (y + y = x) \vee (y + y + 1 = x).$$

Si nous renommons x en y, nous obtenons la formule fausse :

$$\forall y \cdot \exists y \cdot (y + y = y) \vee (y + y + 1 = y).$$

Cela montre qu'on ne peut pas renommer une variable aussi simplement qu'on le souhaite.

Le renommage de variable est appelé α-*conversion* dans la terminologie du λ-calculus.

La substitution d'une variable dans une formule

La substitution d'un terme t aux occurrences libres d'une variable d'individu x dans une formule A est définie en section 1.8 du chapitre *Les formalismes logiques*.

Elle est notée $[t/x]A$, t à la place de x dans A (notation de J.R. Hindley).

Selon les ouvrages, elle peut être notée $A[t/x]$ ou $[x/t]A$.

Allons la voir dans le polycopié !

Les systèmes de preuves

Une fois le langage défini, il existe plusieurs manières de présenter les axiomes et les preuves d'un système logique et ceci, indépendamment de la nature de la logique : classique, intuitionniste, linéaire, etc.

Nous allons examiner les systèmes suivants :

- les systèmes hilbertiens ;
- les systèmes de déduction naturelle ;
- les calculs des séquents ;
- les systèmes de déduction naturelle en calcul des séquents.

qui sont énumérés dans l'ordre chronologique de leurs apparitions.

Les systèmes de preuves

Dans un système de preuve, on prouve certaines formules. Elles sont appelées des *jugements*.

Un jugement prouvé est un *théorème*.

Ces formules peuvent être les formules de la logique ou d'autres formules. Ainsi le calcul des séquents ne prouve pas directement des formules de la logique mais des séquents qui sont des objets légèrement plus complexes.

Pour prouver ces formules, le système propose un ensemble d'axiomes ou de schémas d'axiomes et des règles d'inférence.

Les preuves ont la forme d'arbres.

Les axiomes

Les axiomes sont des formules considérées comme vraies *a priori*.

Ainsi, la formule :

$$\forall x \cdot x + 0 = x$$

peut être un axiome de l'arithmétique.

Les schémas d'axiomes

Les axiomes peuvent être des schémas d'axiomes utilisant des méta-variables définies par leurs noms et leur domaines qui doivent être dénombrables.

Ainsi, la formule :

$$X + Y = Y + X$$

où X et Y sont des méta-variables parcourant l'ensemble des entiers naturels pourrait être un schéma d'axiomes de l'arithmétique.

Ce schéma d'axiomes désigne comme axiomes l'ensemble infinis des formules

$$\begin{array}{cccccc}
0+0=0+0 & 0+1=1+0 & 0+2=2+0 & 0+3=3+0 & 0+4=4+0 & \cdots \\
1+0=0+1 & 1+1=1+1 & 1+2=2+1 & 1+3=3+1 & 1+4=4+1 & \cdots \\
2+0=0+2 & 2+1=1+2 & 2+2=2+2 & 2+3=3+2 & 2+4=4+2 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Les règles d'inférences

Une règle d'inférence s'écrit sous la forme:

$$\frac{H_1 \quad H_2 \quad \cdots \quad H_n}{C}\,(r)$$

où (r) est le nom de la règle, $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sont des hypothèses ou *prémisses* et C est la conclusion.

Une telle règle signifie que si $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sont toutes prouvées alors la conclusion C est aussi prouvée.

Démontrer un théorème

Dans un système ayant des axiomes et des règles d'inférence, une preuve se présente normalement sous la forme d'un arbre.

L'arbre est présenté racine en bas et feuilles en haut :

- La racine de l'arbre est le théorème démontré.
- Les feuilles de l'arbre sont des axiomes.
- On passe des fils d'un nœud au nœud père par l'utilisation de l'une des règles d'inférence.

Exemple de démonstration en LC

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(S)\ S\ S\ (K\ I)\ f\ :=\ S\ f\ (K\ I\ f) \qquad \dfrac{(K)\ K\ I\ f\ :=\ I}{S\ f\ (K\ I\ f)\ :=\ S\ f\ I}\,(al)}{S\ S\ (K\ I)\ f\ :=\ S\ f\ I}\,(tr)}{S\ S\ (K\ I)\ f\ x := S\ f\ I\ x}\,(ar) \qquad \dfrac{(S)\ S\ f\ I\ x\ :=\ f\ x\ (I\ x) \qquad \dfrac{(I)\ I\ x\ :=\ x}{f\ x\ (I\ x)\ :=\ f\ x\ x}\,(al)}{S\ f\ I\ x\ :=\ f\ x\ x}\,(tr)}{S\ S\ (K\ I)\ f\ x\ :=\ f\ x\ x}\,(tr)$$

Ceci est une preuve rigoureuse et formelle de $S\ S\ (K\ I)\ f\ x\ :=\ f\ x\ x$.

Une autre preuve rigoureuse mais non formelle est obtenue en écrivant :

$$S\,S\,(K\,I)\,f\,x\ := S\,f\,(K\,I\,f)\,x\ := S\,f\,I\,x\ := f\,x\,(I\,x)\ := f\,x\,x$$

mais cette preuve n'est pas réalisée *dans* le système formel.

Quel intérêt ?

L'intérêt de cette formalisation des preuves sous forme d'arbre est multiple.

Elle permet des raisonnements sur les preuves : raisonnement par récurrence sur la hauteur de l'arbre, raisonnement par induction sur la structure de l'arbre, raisonnement sur la dernière règle utilisée (la règle utilisée pour obtenir la racine de l'arbre).

Elle permet également une vérification automatique de la preuve.

Extension inconsistante

Une nouvelle règle peut être incompatible avec les règles existantes. C'est-à-dire que l'ajout de cette nouvelle règle rend toutes les formules vraies.

Si l'on rajoute à la théorie un axiome $S = K$, la théorie devient inconsistante. En effet :

$$\begin{array}{rcll} X & = & I\ X & \\ & = & K\ I\ I\ X & \\ & = & K\ I\ I\ (K\ X\ I) & \\ & = & S\ (K\ I)\ (K\ X)\ I & \\ & = & K\ (K\ I)\ (K\ X)\ I & \text{car } S = K \\ & = & K\ I\ I & \\ & = & I & \end{array}$$

Ce qui montre qu'alors tout terme X est égal à I. Donc tous les termes sont deux à deux égaux et toutes les formules $X = Y$ sont des théorèmes.

Extensions consistantes

Si l'ajout de la règle amène de nouveaux théorèmes sans introduire d'inconsistance alors la nouvelle théorie est dite consistante.

Si on rajoute à la Logique Combinatoire la règle :

$$\frac{M\ x \;=\; N\ x}{M \;=\; N}\quad (ext) \quad x \notin FV(M) \cup FV(N)$$

on obtient une nouvelle théorie, la Logique Combinatoire *extensionnelle*, dans laquelle les anciens théorèmes restent vrais mais qui possède de nouveaux théorèmes.

Ainsi dans cette nouvelle théorie on aura le théorème
$S\ (K\ I)\ I \;=\; S\ K\ K$ obtenu par (ext) puisque
$S\ (K\ I)\ I\ x \;=\; S\ K\ K\ x$.

Extensions dérivables

Une nouvelle règle est introduite mais n'apporte pas de nouveaux théorèmes.

Les formules qui étaient vraies le restent.
Les formules qui étaient fausses le restent aussi.

Cela signifie que toute utilisation de la nouvelle règle peut être remplacée par un bout d'arbre utilisant les anciennes règles.

On parle alors d'extension *dérivables*.

Une extension dérivable d'une théorie consistante est consistante.

Systèmes formels

Ce dont nous avons parlé jusqu'à présent dépasse le cadre de la logique.

Nous avons en fait décrit ce qu'est un *système formel*.

Un système formel est la donnée d'un *alphabet*, d'un procédé de construction de *formules*, ou *jugements*, et d'un ensemble d'*axiomes* et de *règles d'inférence*.

Ces outils permettent de déterminer lesquelles parmi les formules sont des *théorèmes*.

Un aspect important est que ces axiomes et ces règles sont *formels*, c'est-à-dire que leurs contenus ne reposent que sur la forme des formules ou, plus précisément, sur leur *syntaxe*.

Vérification de preuves

Que les axiomes et règles soient formels ne rend pas plus simple ni automatique la recherche de preuves, sauf quelques cas particuliers que nous verrons plus loin.

En revanche, cet aspect formel rend possible la *vérification automatique* d'une preuve.

Étant donné un arbre de preuve et des axiomes et règles, il est possible de déterminer par des procédés purement syntaxiques, donc automatisables, pour savoir si cet arbre de preuve est bien construit en respectant les axiomes et les règles.

Définition d'une théorie logique

Les théories logiques sont, sauf exception, des systèmes formels particuliers.

Selon J-Y. Girard, père de la Logique Linéaire, un système formel peut être appelé une logique s'il possède la règle de coupure, *cut rule*, (ou son équivalent) et la propriété d'élimination des coupures, connue sous le nom savant de *Hauptsatz*, (ou son équivalent) que nous verrons plus loin.

Sans cela, c'est simplement un système formel.

Logique en déduction naturelle

La présentation axiomatique de la logique par Hilbert tire des conséquences d'axiomes mais ce n'est pas ainsi que raisonne l'homme.

Jan Lukasiewicz, dès 1929, fait remarquer que les hommes ignorent les axiomes de la logique de Hilbert mais que cela ne les empêche pas de raisonner.

Ils procèdent par des déductions faites à partir d'hypothèses et leurs énoncés sont de la forme :

La conclusion C se déduit des hypothèses $H_1, \ldots, H_n$

Lukasiewicz suggéra de formaliser cette logique naturelle du discours et cela fut fait par Stanislas Jaskowski (1934) et surtout Gerhard Gentzen (1933).

Preuve en déduction naturelle

Un système de déduction naturelle est un formalisme présentant les preuves de manière plutôt naturelle en ce sens qu'il est relativement intuitif de rédiger une preuve.

Une preuve est une *déduction* composée de formules positionnées en arbre, les unes en dessous des autres.

Une formule est une *conséquence* des formules qui sont au-dessus d'elles. On les sépare par un trait horizontal.

La forme générale d'une preuve d'une formule A est donc un arbre comme d'habitude :

$$\frac{\vdots}{A}$$

Preuve avec des hypothèses

La ou les formules en haut des déductions sont être des hypothèses ou des axiomes.

Si c'est une hypothèse, on la met entre crochets, i.e. [et] :

$$\frac{[A]}{A}$$

Ceci est une preuve de A sous l'hypothèse A.

Déchargement d'une hypothèse

Une formule entre crochets est dite déchargée, elle ne compte plus parmi les hypothèses actives.

Une même hypothèse peut avoir plusieurs occurrences dans la preuve.

La démonstration de $A \Rightarrow A$ ne compte plus d'hypothèse active :

$$\dfrac{\dfrac{[A]}{A}}{A \Rightarrow A}$$

Déchargement d'une hypothèse

On dit que l'on *décharge* l'hypothèse A. En fait, toutes les hypothèses A ayant servi à la démonstration de B sont déchargées. Pour savoir par quelles règles les hypothèses sont déchargées, on a souvent recours à un *marqueur*, exposant numérique que l'on ajoute à l'hypothèse et au nom de l'occurrence de la règle qui décharge ces hypothèses. On obtient alors quelque chose qui ressemble à ceci :

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]^k \cdots [A]^k \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow^k_{intro}$$

Les règles

En déduction naturelle, les règles sont classées en règles d'*introduction* et règles d'*élimination*.

Une règle d'introduction est une règle dont la formule conclusion contient ce connecteur.

Une règle d'élimination est une règle prenant en hypothèse au moins une formule contenant ce connecteur et produisant en conclusion une formule où ce connecteur a disparu.

Déduction naturelle : la conjonction

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots & & \vdots \\ A & & B\end{matrix}}{A \wedge B}\ \wedge_{intro}$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A \wedge B\end{matrix}}{A}\ \wedge_{elim_1} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A \wedge B\end{matrix}}{B}\ \wedge_{elim_2}$$

Déduction naturelle : la disjonction

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ A\end{array}}{A \lor B}\ \lor_{intro_1} \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ B\end{array}}{A \lor B}\ \lor_{intro_2}$$

$$\frac{\begin{array}{ccc} & [A] & [B]\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ A \lor B & C & C\end{array}}{C}\ \lor_{elim}$$

Déduction naturelle : l'implication

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow_{intro}
\qquad\qquad
\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A \Rightarrow B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ A\end{matrix}}{B} \Rightarrow_{elim}$$

Déduction naturelle : négation classique

L'une des ces trois règles qui sont 2 à 2 équivalentes :

$$\dfrac{}{A \vee \neg A}\;te \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ \neg\neg A\end{array}}{A}\;\neg\neg \qquad \dfrac{\begin{array}{cc}[\neg A] & [\neg A] \\ \vdots & \vdots \\ B & \neg B\end{array}}{A}\;(A)$$

à laquelle on rajoute les règles suivantes :

$$\dfrac{\begin{array}{cc}[A] & [A] \\ \vdots & \vdots \\ B & \neg B\end{array}}{\neg A}\;\neg_{intro} \qquad \dfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots \\ A & \neg A\end{array}}{B}\;\neg_{elim}$$

Déduction naturelle : négation intuitionniste

On se rappelle que la négation intuitionniste est définie par $\neg A \equiv_{def} A \Rightarrow \perp$ où $\perp$ est un symbole représentant la *contradiction*. Il n'y a pas de règle d'introduction de $\perp$ mais une règle d'élimination appelée *ex falso quodlibet sequitur*, soit «du faux on peut tout déduire» :

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \perp\end{matrix}}{A}$$

On peut également choisir alternativement d'introduire le connecteur de négation $\neg$ avec une règle d'introduction et une règle d'élimination :

$$\dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ \neg B\end{matrix}}{\neg A}\ \neg intro \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \neg A\end{matrix}}{B}\ \neg elim$$

Déduction naturelle : quantification universelle

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A\end{array}}{\forall x \cdot A}\ \forall_{intro} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \forall x \cdot A\end{array}}{[t/x]A}\ \forall_{elim}$$

Dans la règle $\forall_{intro}$, il faut que la variable x ne soit pas libre dans les hypothèses servant à démontrer la formule A.

Déduction naturelle : quantification existentielle

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ [t/x]A\end{array}}{\exists x \cdot A}\ \exists_{intro} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \exists x \cdot A\end{array} \quad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ B\end{array}}{B}\ \exists_{elim}$$

Dans la règle $\exists_{elim}$, la variable x ne doit pas être libre dans B.

Exemple de preuve

Montrons que l'on peut dériver la règle du tiers-exclu à partir de la troisième règle (A) :

$$\dfrac{\dfrac{[\neg(A \vee \neg A)]}{\neg(A \vee \neg A)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ [\neg(A \vee \neg A)]\end{array}}{\neg(A \vee \neg A)} \qquad \dfrac{[\neg A]}{A \vee \neg A}\vee_{intro_2}}{A}(A)}{A \vee \neg A}\vee_{intro_1}}{A \vee \neg A}(A)$$

Relire cette démonstration n'est pas évident. La présence d'exposant pour marquer les hypothèses déchargées et les règles qui les déchargent améliorerait sûrement les choses. Il existe une autre présentation de ces déductions naturelles.

Les systèmes hilbertiens

On appelle système hilbertien un système dans lequel il n'y a que des axiomes et une seule règle, la règle du *modus ponens* qui est en fait la règle $\Rightarrow_{elim}$:

$$\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B}\,(\textit{modus ponens})$$

Dans le cas de la logique des prédicats, on ajoutera deux nouvelles règles nécessaires pour des raisons syntaxiques.

Un système hilbertien ressemble à un système de déduction naturelle dans lequel on n'utiliserait pas la notion d'hypothèse.

Les règles

Conjonction :

$$A \Rightarrow B \Rightarrow A \wedge B$$
$$A \wedge B \Rightarrow A$$
$$A \wedge B \Rightarrow B$$

Disjonction :

$$A \Rightarrow A \vee B$$
$$B \Rightarrow A \vee B$$
$$A \vee B \Rightarrow (A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow C$$

Implication :

$$A \Rightarrow B \Rightarrow A$$
$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow C$$

Les règles

Négation classique :

$$A \vee \neg A$$
$$A \Rightarrow \neg A \Rightarrow B$$

Négation intuitionniste

- si l'on décide d'introduire un connecteur de négation $\neg$:

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A$$
$$A \Rightarrow \neg A \Rightarrow B$$

- si l'on décide d'introduire la contradiction $\perp$ et de définir la négation par $\neg A \equiv_{def} A \Rightarrow \perp$:

$$\perp \Rightarrow A$$

Les règles

Quantification universelle :

$$\frac{A \Rightarrow B}{A \Rightarrow \forall x \cdot B}\ x \notin FV(A) \qquad \forall x \cdot A \Rightarrow [t/x]A$$

Quantification existentelle :

$$[t/x]A \Rightarrow \exists x \cdot A \qquad \frac{A \Rightarrow B}{\exists x.A \Rightarrow B}\ x \notin FV(B)$$

Exemple de preuve

L'exemple suivant, très classique, est là pour montrer que les démonstrations dans un système hilbertien peuvent devenir rapidement fastidieuses :

$$\dfrac{\dfrac{(A \Rightarrow (A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow A \Rightarrow A) \Rightarrow A \Rightarrow A \quad A \Rightarrow (A \Rightarrow A) \Rightarrow A}{(A \Rightarrow A \Rightarrow A) \Rightarrow A \Rightarrow A} \qquad A \Rightarrow A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A}$$

Pour comparaison, la même preuve en déduction naturelle :

$$\dfrac{\dfrac{[A]}{A}}{A \Rightarrow A} \Rightarrow_{intro}$$

On pourrait ajouter l'axiome $A \Rightarrow A$ mais cela ne changerait rien. On trouverait toujours des formules simples avec des preuves complexes.

Le calcul des séquents

Le calcul des séquents, dû à Gentzen dans les années 1930, est une manière de présenter la logique bien plus lourde que la déduction naturelle mais elle permet en contre-partie de raisonner sur les preuves et possède des qualités de symétrie que l'on ne retrouve pas ailleurs. Le résultat fondamental de la théorie de la preuve, le théorème d'élimination des coupures, a été obtenu à l'aide d'un calcul des séquents.

Les séquents

Les jugements démontrés en calcul des séquents ne sont plus de simples formules de la logique mais des *séquents*. Un séquent est une expression de la forme :

$$A_1, \ldots, A_n \;\vdash\; B_1, \ldots, B_m$$

Intuitivement, un tel séquent signifie que si les formules $A_1, \ldots, A_n$ sont toutes vraies alors au moins l'une des formules $B_1, \ldots, B_m$ est vraie. On pourrait signifier cela par une formule :

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \;\Rightarrow\; B_1 \vee \ldots \vee B_m$$

disant que la conjonction des formules $A_1, \ldots, A_n$ implique la disjonction des formules $B_1, \ldots, B_m$.

Dans la suite, Γ, Δ, Θ,... désignent des séquences éventuellement vides de formules du type $A_1, \ldots, A_n$.

Axiomes et règles d'inférence

Les axiomes et règles d'inférence sont divisés en deux groupes :

- les *règles structurelles* qui ont pour fonction de déterminer le comportement des séquents ;
- les *règles logiques* qui déterminent les connecteurs et les quantificateurs de la logique.

J-Y. Girard dit que c'est le groupe des règles structurelles qui détermine la presque-totalité du système. En particulier, c'est lui qui détermine certaines propriétés des connecteurs comme la commutativité ou la distributivité.

La structure des règles

Alors que les systèmes de déduction naturelle utilise des règles d'introduction et d'élimination, les règles du calcul des séquents utilisent des règles à gauche et des règles à droite.

Une règle à gauche est une règle qui permet d'introduire quelque chose, connecteur ou quantificateur par exemple, dans la partie gauche d'un séquent. Plus précisément on aura dans la partie gauche du séquent conclusion de la règle quelque chose qui n'y était pas.

Une règle à droite est une règle qui permet d'introduire quelque chose, connecteur ou quantificateur par exemple, dans la partie droite d'un séquent. Plus précisément on aura dans la partie droite du séquent conclusion de la règle quelque chose qui n'y était pas.

Les règles

Les règles du calcul des séquents classiques sont donnés dans le polycopié en section 6 du chapitre *Formalismes logiques*.

Nous n'allons donner que les règles du calcul des séquents intuitionniste de la section 7 du chapitre *Formalismes logiques*.

Dans le calcul des séquents intuitionniste, on ne considère que des séquents ayant **au plus une formule** dans la partie droite. De fait certaines règles du calcul des séquents classiques ne sont plus applicables et certaines doivent être modifiées pour des raisons de lisibilité.

Les règles structurelles intuitionnistes

Règle identité :

$$A \vdash A$$

Règle de coupure (cut) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma', A \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}$$

Les règles structurelles intuitionnistes

Affaiblissement :

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\,(aff_g) \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A}\,(aff_d)$$

Contraction :

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\,(con_g)$$

Echange :

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash C}\,(ech_g)$$

Les règles logiques

Conjonction :

$$\frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} \wedge_{g_1}$$

$$\frac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} \wedge_{g_2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B} \wedge_d$$

Les règles logiques

Disjonction :

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma', B \vdash C}{\Gamma, \Gamma', A \vee B \vdash C} \vee_g$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_{d_1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_{d_2}$$

Les règles logiques

Implication :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma', B \vdash C}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B \vdash C} \Rightarrow_g$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow_d$$

Négation intuitionniste :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash} \neg_g \qquad \frac{\Gamma, A \vdash}{\Gamma \vdash \neg A} \neg_d$$

Les règles logiques

Quantification :

$$\frac{\Gamma, [t/x]A \vdash B}{\Gamma, \forall x \cdot A \vdash B}\ \forall_g \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x \cdot A}\ \forall_d$$

Quantification existentielle :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \exists x \cdot A \vdash B}\ \exists_g \qquad \frac{\Gamma \vdash [t/x]A}{\Gamma \vdash \exists x \cdot A}\ \exists_d$$

Dans les règles $\forall_d$ et $\exists_g$, on suppose que $x \notin FV(\Gamma)$.

Exemple de preuve

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \vdash B\ (id)}{A \wedge B \vdash B}\wedge_{g2} \quad \dfrac{A \vdash A\ (id)}{A \wedge B \vdash A}\wedge_{g1}}{\dfrac{A \wedge B, A \wedge B \vdash B \wedge A}{A \wedge B \vdash B \wedge A}\mathit{con}_g}\wedge_d}{\vdash A \wedge B \Rightarrow B \wedge A}\Rightarrow_d$$

Une preuve en calcul des séquents se construit depuis la conclusions vers les hypothèses.

Conclusions

La logique est un système formel comme n'importe quel système formel.

Quatre principaux systèmes peuvent décrire la logique :

- les systèmes de déduction naturelles ;
- les systèmes hilbertiens ;
- les calculs des séquents ;
- la déduction naturelle en calcul des séquents (section 9).

Ces systèmes, classiques ou intuitionnistes, sont équivalents en ce sens qu'une formule F qui est un théorème dans l'un est aussi un théorème dans l'autre.