Encore un résultat négatif

Patrick Bellot

Télécom Paris
Institut Polytechnique de Paris

Théorie de la Calculabilité

Une fonction est <u>effectivement calculable</u> s'il existe un procédé exécutable qui permet de la calculer.

Ce procédé doit être communicable.

Il existe un <u>codage de Gödel</u> des fonctions effectivement calculables noté

$$\Phi(n) = \Phi_n$$

tel que Φ et Φ^{-1} sont elles aussi effectivement calculables.

La <u>fonction universelle</u>

$$\Psi(x,y) = \Phi_x(y)$$

est effectivement calculable.

Et de manière générale:

$$\Psi_n(x,y_1,..,y_n) = \Phi_x(y_1,..,y_n)$$

est effectivement calculable.

L'ensemble des <u>fonctions</u> effectivement calculables est dénombrable.

<u>Thèse de Church</u>

La notion de fonction effectivement calculable recouvre celle de Fonction Partielle Récursive (FPR)

Notations

e $\downarrow$ signifie que l'évaluation de l'expression **e** termine avec un résultat.

e $\downarrow$ **r** signifie que l'évaluation de l'expression **e** termine avec un résultat **r**.

e $\uparrow$ signifie que l'évaluation de **e** ne termine pas ou termine avec une erreur.

e = $\perp$ signifie la même chose que **e** $\uparrow$.

Indécidabilité du problème de l'arrêt

Problème de l'arrêt

Est-ce que la fonction
$\varphi(x,y) = 1$ si $\Phi_x(y)\downarrow$, 0 sinon
est effectivement calculable ?

NON

Argument diagonal de Cantor

Si φ est effectivement calculable, alors γ définie par
$\gamma(x) = \Phi_x(x)+1$ si $\varphi(x,x)=1$, 0 sinon
que l'on peut réécrire
$\gamma(x) = \Phi_x(x)+1$ si $\Phi_x(x)\downarrow$, 0 sinon (si $\Phi_x(x)\uparrow$)
est aussi effectivement calculable.

On voit que γ est différente de chaque Φ_x en x, i.e. :
$\gamma(x) \neq \Phi_x(x)$ pour tout x naturel,
donc γ est différente de tous les Φ_x pour x naturel.

Contradiction !

Arguments

FC	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
Φ_0	$\Phi_0(0)$									
Φ_1		$\Phi_1(1)$								
Φ_2			$\Phi_2(2)$							
Φ_3				$\Phi_3(3)$						
Φ_4										
Φ_5										
Φ_6										
Φ_7										
Φ_8										
…										
…										

diagonale des $\Phi_x(x)$

$f(x) = \perp$ signifie que f(x) provoque une erreur ou part dans une boucle

Théorème du point-fixe de Kleene

=

Si F est une fonction calculable totale alors il existe un n tel que $\Phi_n = \Phi_{F(n)}$

Soit f définie par $f(y) = \Phi_{\Phi_x(x)}(y)$ si $\Phi_x(x)\downarrow$, $\perp$ sinon

On lance le calcul $\Phi_x(x)$:

- si $\Phi_x(x)\uparrow$ alors on décide que $f(y)\uparrow$
- si $\Phi_x(x)\downarrow r$ alors on calcule $\Phi_r(x)$

f est effectivement calculable et ne dépend que de x donc il existe h calculable et totale telle que $f = \Phi_{h(x)}$

Si $\Phi_x(x)\downarrow$ alors $f = \Phi_{h(x)} = \Phi_{\Phi_x(x)}$

Soit F calculable et totale, Foh est calculable donc il existe e tel que $Foh = \Phi_e$

Comme Foh est totale, Φ_e aussi. On a $\Phi_e(e)\downarrow$ donc $\Phi_{h(e)} = \Phi_{\Phi_e(e)}$

On a donc $\Phi_{h(e)} = \Phi_{\Phi_e(e)} = \Phi_{Foh(e)} = \Phi_{F(h(e))}$ puisque $Foh = \Phi_e$

Si l'on rend $n = h(e)$, on a donc $\Phi_n = \Phi_{F(n)}$

Théorème de Rice

Toute propriété sémantique non triviale des fonctions effectivement calculables est indécidable

Une propriété sémantique est une propriété des fonctions calculables indépendante de leurs implémentations.
[Techniquement : si Φ_p l'a et $\Phi_p = \Phi_q$ alors Φ_q l'a aussi.]

On note FC l'ensemble des fonctions effectivement calculables.

$F \subset FC$ est une propriété sémantique non triviale si $F \neq \emptyset$ et $F \neq FC$

On note $P = \{ p \,/\, \Phi_p \in F \}$

On se donne $f \in F$, alors $f = \Phi_p$ avec $p \in P$
On se donne $g \in FC \backslash F$, alors $g = \Phi_q$ avec $q \notin P$

Si P est effectivement décidable, la fonction T définie par
$T(x) = q$ si $x \in P$, p sinon (i.e. $x \notin P$)
est effectivement calculable et totale et bivaluée.

Par le théorème du point-fixe de Kleene, il existe n telle que $\Phi_n = \Phi_{T(n)}$.

Intéressons-nous à ce $T(n)$:

- Si $T(n) = p$ alors $n \notin P$. Comme $\Phi_{T(n)} = \Phi_n \notin F$, on en déduit que $T(n) \notin P$ donc $T(n) \neq p$.
- Si $T(n) = q$ alors $n \in P$. Comme $\Phi_{T(n)} = \Phi_n \in F$, on en déduit que $T(n) \in P$ donc $T(n) \neq q$.

Dans tous les cas, on arrive à une contradiction.

∎

Merci !

Des questions ?