TD3

Arthur Leclaire - Antoine Houdard - Lucile Laulin

Dans ce TD, on utilisera implicitement l'isomorphisme canonique entre l'espace $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ des suites N-périodiques et $\mathbb{C}^N$, avec des indices commençant par convention à zéro.

Exercice 1.

Dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_4}$, considérons $u = (1, 1, 0, 2)^T$ et $v = (i, 0, 1, i)^T$.

1. Calculer la convolution périodique $u * v$.

2. Calculer $\hat{u}$, $\hat{v}$.

3. Vérifier que $\widehat{u * v} = \hat{u}\hat{v}$.

Exercice 2.

On suppose $N \geqslant 4$. On notera $\mathcal{E} = (e_\xi)_{\xi \in [0:N-1]}$ la base de Fourier sur $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.
On introduit l'application linéaire T sur $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ défini par

$$\forall u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N},\ \forall x \in \mathbb{Z}, \quad Tu(x) = 3u(x-2) + iu(x) - (2+i)u(x+1)\ .$$

1. Montrer que T est un opérateur stationnaire sur $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

2. Calculer la réponse impulsionnelle de T, notée h.

3. En déduire que T est un opérateur de convolution périodique, dont on précisera le noyau.

4. Donner la matrice M de T dans la base canonique.

5. Montrer que pour tout $\xi \in [0 : N-1]$, $Te_\xi = \hat{h}(\xi)e_\xi$.

6. En déduire une base de diagonalisation de M et les valeurs propres associées.
(On écrira $D = PMP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale à préciser.)

Exercice 3.

Pour $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, on introduit $\partial u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ et $\partial^T u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ définies par, pour tout $x \in \mathbb{Z}$,

$$\partial u(x) = u(x+1) - u(x)$$
$$\partial^T u(x) = u(x-1) - u(x)$$

Comme dans le cours, on notera k la réponse impulsionnelle de ∂.

1. Comment s'exprime à partir de k la réponse impulsionnelle $\tilde{k}$ de ∂^T.

2. On $T = \partial^T \partial$ (composition des deux opérateurs précédents).
Donner l'expression de T et montrer que $T = \partial\partial^T$.

3. Calculer la réponse impulsionnelle h de T. Comment l'exprimer avec k et $\tilde{k}$?

4. Écrire la matrice de T dans la base canonique.

5. Calculer $\hat{h}$. En déduire l'effet du filtre T en fréquences (passe-bas ? passe-haut ? passe-bande ?).

6. Quelle est la relation entre ce filtre T et le filtre ∂^2 introduit en cours ?
Comment se traduit cette relation sur les transformées de Fourier de Tu et $\partial^2 u$?