TD1

Arthur Leclaire - Antoine Houdard - Lucile Laulin

Dans ce TD, on utilisera implicitement l'isomorphisme canonique entre l'espace $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ des suites N-périodiques et $\mathbb{C}^N$, avec des indices commençant par convention à zéro.

Exercice 1.

Dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_4}$, on considère $u = (2, -3, i, 0)$.

1. Donner les valeurs $u(0), u(1), u(2), u(3)$.

2. Donner la décomposition de u sur la base canonique de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_4}$.

3. Calculer $u(5)$, $u(-1)$, $u(-4)$, $u(273)$.

4. Tracer $\Re(u)$ (partie réelle de u) sur $[0 : 3]$, et prolonger le graphe par périodicité.

5. Tracer $|u|$ sur $[-2 : 1]$.

6. Calculer $\hat{u}(0)$. En déduire $\hat{u}(2020)$.

Exercice 2.

Soient $u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

1. Montrer que $\langle \hat{u}, v \rangle = N \langle u, \check{v} \rangle$.

2. Montrer que $\langle u, v \rangle = \frac{1}{N} \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle$ et que $\|u\|^2 = \frac{1}{N}\|\hat{u}\|^2$.

3. Monter que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $\hat{\hat{u}}(x) = Nu(-x)$.

4. En déduire que $\mathrm{DFT}^4 = N^2 \,\mathrm{Id}$.

5. Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme $f = \frac{1}{\sqrt{N}}\mathrm{DFT}$ sont incluses dans $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$.

Exercice 3.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$. On définit la suite conjuguée $\overline{u}(x) = \overline{u(x)}$ et la renversée $\tilde{u}(x) = u(-x)$.

1. Montrer que $\widehat{\overline{u}}(\xi) = \overline{\hat{u}(-\xi)}$ pour tout $\xi \in \mathbb{Z}$.

2. Supposons que u est à valeurs réelles. Montrer que $\tilde{\hat{u}} = \overline{\hat{u}}$ puis que $|\hat{u}|$ est pair.

Dans la suite de l'exercice, on suppose N impair, $N = 2K + 1$ avec $K \in \mathbb{N}$.

3. On suppose que pour tout $\xi \in [-K : K]$, $\hat{u}(-\xi) = \overline{\hat{u}(\xi)}$. Montrer que u est à valeurs réelles.

4. On suppose N impair, $N = 2K + 1$ avec $K \in \mathbb{N}$. On considère $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ défini par

$$\forall x \in [0 : N-1], \quad v(x) = \left|\frac{N}{2} - x\right| - \frac{1}{2} \,.$$

a. Tracer v sur $[0 : N-1]$ puis sur $[-K : K]$.
b. Montrer que $\check{v}$ est à valeurs réelles.