Université de Bordeaux | **Mathématiques**
L3 Maths-Info, Ingé-Math, CMI | **Année 2019/2020**

Contrôle Continu L3 Images
Mardi 25/02/2020. Durée : 2 heures

Dans ce sujet, on note N un entier > 0, $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ et $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ désigne l'espace des suites $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ qui sont N-périodiques. On utilisera implicitement l'isomorphisme canonique entre l'espace $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ des suites N-périodiques et $\mathbb{C}^N$, avec des indices commençant par convention à zéro.

La transformée de Fourier discrète (TFD) de $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ sera notée $\hat{u}$.

Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$, on notera $[a : b] = \{a, a+1, \dots, b-1, b\}$.

Exercice 1. (3 points)

1. Définir la base canonique de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

2. Donner la définition de la transformée de Fourier discrète d'une suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

3. Énoncer le théorème exprimant la transformée de Fourier discrète de la convolution périodique.

Exercice 2. (5 points)

Dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_4}$, on considère

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

1. Écrire la matrice dans la base canonique de la transformée de Fourier sur $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_4}$, notée W_4.

2. Donner l'expression de la matrice W_4^{-1}.

3. Calculer $\hat{u}$.

4. Tracer le spectre de u sur $[0 : 3]$, puis son spectre centré sur $[-2 : 1]$.

5. Calculer $u * v$.

Exercice 3. (6 points)

Dans cet exercice, $N = 1024$ et $a = \frac{3N}{8} = 384$.

On pose aussi $K = 512$ de sorte que $[-K : K-1]$ est un intervalle de $N = 2K$ entiers consécutifs.

1. Montrer que $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ est à valeurs réelles si et seulement si pour tout $\xi \in [-K : K-1]$, $\quad \hat{u}(-\xi) = \overline{\hat{u}(\xi)}$

2. On pose $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ défini par

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \quad v(x) = \frac{1}{N} \sin\left(2\pi \frac{ax}{N}\right) .$$

a. Calculer $\hat{v}$.

b. Tracer le spectre centré de v, et interpréter le contenu fréquentiel.

3. Pour $s > 0$, on considère $g_s \in \mathbb{C}^{Z_N}$ défini par

$$\forall \xi \in [-K : K-1], \quad g_s(\xi) = e^{\frac{-s^2\xi^2}{2}} .$$

a. Justifier qu'il existe un unique $k_s \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ tel que $\widehat{k_s} = g_s$.

b. Montrer que k_s est à valeurs réelles.

4. On reprend les notations des questions précédentes.

a. Calculer $\widehat{k_s * v}$.

b. En déduire une expression de $k_s * v$.

Exercice 4. (6 points)

Dans cet exercice, il faut compléter le code Python ci-dessous en suivant les instructions données dans le code en commentaire.

```
import numpy as np
from numpy.fft import fft, ifft
import matplotlib.pyplot as plt

# 1. Définir la suite u = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)

u =  ...

# 2. En déduire la suite translatée périodiquement de deux crans

tu = ...

# 3. Calculer la transformée de Fourier discrète de u

fu =  ...

# 4. Extraire les parties réelle et imaginaire de la TFD de u

rfu = ...

ifu = ...

# 5. Afficher le spectre centré de u

...



freqc = ...

plt.figure()

...

plt.show()


# 6. Calculer le noyau ks de l'Exo 3 Q3, pour s=1
s = 1

gs = ...

ks = ...

# 7. Calculer la convolution de u avec k_s

...
```