Licence 3, 2018-2019, Introduction au traitement d'images

Devoir surveillé

Nous rappelons que la matrice W_4 est

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}.$$

Exercice 1 (8 points)

Considérons le signal audio échantillonné

$$z(n) = 2\cos\left(\pi\frac{250\,n}{256}\right) - 5\sin\left(\pi\frac{240\,n}{128}\right), \qquad n \in \mathbb{Z}_{512}.$$

1) (**3 points**) Calculer la DFT de z.

2) (**1 point**) Tracer le spectre et le spectre centré de z.

3) (**2 points**) Justifier pourquoi il est possible de reconstruire z via la connaissance de seulement deux nombres complexes associés à deux fréquences de z.

4) (**2 points**) En se basant sur les valeurs des coefficients de Fourier de z,
a) calculer la valeur de la moyenne de z;
b) interpréter le contenu fréquentiel de z (y a-t-il plutôt des hautes fréquences ? des basses fréquences ? ont-elles la même importance dans la reconstruction de z ?).

Exercice 2 (12 points)

Considérons l'opérateur $T \in \mathrm{End}(\ell^2(\mathbb{Z}_4))$ défini par

$$\forall z \in \ell^2(\mathbb{Z}_4), \quad \forall n \in \mathbb{Z}_4, \quad Tz(n) = 4z(n) - 3iz(n-2) + (i-2)z(n+3).$$

1) (**1 point**) Justifier que T est un opérateur stationnaire.

2) (**1 point**) Déterminer sa réponse impulsionnelle h.

3) (**1 point**) Écrire la matrice A qui représente T dans la base canonique de $\ell^2(\mathbb{Z}_4)$.
Comment appelle-t-on une telle matrice ?

4) (**1 point**) Donner la définition générale d'opérateur de convolution dans $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

5) (**1 point**) Écrire l'opérateur T comme un opérateur de convolution et vérifier que les deux écritures sont équivalentes.

6) (**1 point**) Donner la définition générale de multiplicateur de Fourier dans $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$.

7) (**1 point**) Écrire l'opérateur T comme un multiplicateur de Fourier (il n'est pas requis de démontrer l'équivalence des deux écritures).

8) (**1 point**) Écrire la matrice diagonale D qui représente T dans la base de Fourier de $\ell^2(\mathbb{Z}_4)$.

9) (**1 point**) Écrire le produit matriciel qui représente T comme multiplicateur de Fourier dans la base canonique de $\ell^2(\mathbb{Z}_4)$. Il n'est pas requis de calculer explicitement le produit matriciel.

10) (**1 point**) Si z est un élément arbitraire de $\ell^2(\mathbb{Z}_4)$, écrire le spectre d'amplitude du signal transformé Tz.

11) (**1 point**) Est-ce que T préserve la moyenne de z ? Justifier la réponse.

12) (**1 point**) Comment est-ce que T modifie l'importance de l'harmonique de plus haute fréquence de z ?