

	ANNEE UNIVERSITAIRE 2018 / 2019 SESSION 1 DE PRINTEMPS Introduction au traitement d'images Epreuve : DST Date : 19/04/2019 Heure : 9h00 Durée : 1h30 Documents : non autorisés Epreuve de M/Mme :	Collège Sciences et technologies
---	--	---

NB : Les pages 3 et 4 de ce sujet doivent être rendues avec la copie.

Exercice 1 (9 points) Soient $N_1, N_2 > 1$ deux nombres entiers et soient

$$B \equiv \{B_0, B_1, \dots, B_{N_1-1}\}, \quad C \equiv \{C_0, C_1, \dots, C_{N_2-1}\}$$

une base orthonormale de $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1})$ et de $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_2})$, respectivement.

- 1) **(1 point)** Écrire la base orthonormale $B \otimes C$ de $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ obtenue par produit tensoriel de B et C .
- 2) **(4 points)** Démontrer que $B \otimes C$ est effectivement une base orthonormale de $\ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$.
- 3) **(4 points)** Étant donné un signal $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$, écrire :
 - a) la formule de ses coefficients de Fourier ;
 - b) la transformée de Fourier discrète 2D de z et son inverse ;
 - d) Écrire la formule de la moyenne arithmétique $\langle z \rangle$ d'un signal $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2})$ et écrire la formule qui met en relation $\langle z \rangle$ avec un coefficient de Fourier de z .
 - e) En déduire pourquoi, dans la visualisation du spectre d'amplitude d'une image numérique, il est habituel d'appliquer une fonction logarithmique au module des coefficients de Fourier de l'image.

Exercice 2 (7 points)

Dans $\ell^2(\mathbb{Z}_5)$ on définit les deux signaux suivants

$$z = (1, 0, -1, 1, 0)^t \quad , \quad h = (0, -1, 0, 2, -1)^t .$$

- 1) **(2 points)** Calculer explicitement le vecteur $w = z * h$.
- 2) **(3 points)** Compléter le code Matlab donné en page 3 aux endroits marqués par des points de suspension (...). Chaque bloc de code est précédé par une consigne donnée en commentaire.
- 3) **(2 points)** On note W_5 la matrice de Vandermonde-Fourier de taille 5×5 . Que vaut W_5^4 ? Compléter le code pour comparer la puissance 4 matricielle de W_5 et sa puissance 4 ponctuelle.

Exercice 3 (4 points)

Dans cet exercice, il faut compléter le code Matlab donné en page 4.

1. **(2 points)** Compléter le code pour afficher le spectre centré de l'image u en échelle logarithmique. Pouvez-vous prédire à quoi il va ressembler ?
2. **(2 points)** Compléter le code pour calculer la convolution circulaire w de u et v . Pouvez-vous expliquer la transformation opérée pour passer de v à w ?

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CODE EXERCICE 2
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%% Question 2

% Définir z et h

z = ...

h = ...

% Calculer les transformées de Fourier discrètes de z et h

fz = ...

fh = ...

% Afficher le spectre centré de z

freqc = ...

...

% Calculer la convolution circulaire de z et h

...

...

%%% Question 3

W5 = ...

...

...

```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CODE EXERCICE 3
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
N = 512;

u = zeros(N);
u(10,20) = 1;

v = im2double(imread('lena.png'));
```

```
%%% Question 1
...
```

```
%%% Question 2
...
```