Université de Bordeaux **Analyse de Fourier appliquée**
M1 MAS **Année 2022/2023**

TD6

Arthur Leclaire

Dans toute cette feuille, les images seront définies comme des fonctions

$$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

où $\Omega = [0 : M-1] \times [0 : N-1]$ est un rectangle de taille $M \times N$.

Exercice 1.

1. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $\alpha, \beta \in [0,1]$ tels que $\alpha + \beta = 1$. On considère $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\varphi(z) = \alpha|z-a|^2 + \beta|z-b|^2 \ .$$

Posons $g = \alpha a + \beta b$. Montrer que $\operatorname*{Argmin}_{\mathbb{C}} \varphi = \{g\}$.

2. On considère le modèle de dégradation $v = Au + w$ où w est un bruit blanc gaussien et où l'opérateur de dégradation $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est donné par la convolution périodique par un noyau $k \in \mathbb{R}^\Omega$ tel que $\sum_{x \in \Omega} k(x) = 1$. On pose

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \quad F(u) = \frac{1}{2}\|Au - v\|_2^2 + \lambda\|\nabla u\|_2^2 \ .$$

En utilisant la transformée de Fourier discrète, montrer que F atteint son minimum en un point $u_* \in \mathbb{R}^d$ que l'on exprimera explicitement.

Exercice 2.

Soit $A \in \mathbb{R}^{k \times d}$ et $v \in \mathbb{R}^k$.

Calculer l'opérateur proximal associé à la fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par $f(u) = \frac{1}{2}\|Au - v\|_2^2$.

Exercice 3.

On considère ici un problème d'inpainting : pour une image $u \in \mathbb{R}^\Omega$, $Au \in \mathbb{R}^\Omega$ est une image ayant les mêmes valeurs que u dans une région $D \subset \Omega$, et 0 ailleurs :

$$Au(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En identifiant $\mathbb{R}^\Omega$ à $\mathbb{R}^d$, on écrira l'opérateur A comme une matrice $d \times d$.

1. **a.** Calculer A^T.
b. En déduire la constante de Lipschitz de $A^T A$.

2. Soit $v \in \mathbb{R}^d$. Soient $\lambda > 0$ et $\varepsilon > 0$ fixés. On note TV_ε la variation totale lissée définie en cours.
a. On considère la fonction

$$F(u) = \frac{1}{2}\|Au - v\|_2^2 + \lambda \mathrm{TV}_\varepsilon(u)$$

Écrire l'algorithme de descente de gradient à pas fixe $\tau > 0$ sur F, et examiner sa convergence.

b. On note $C = A^{-1}(\{v\})$ et ι_C l'indicatrice du convexe C. On considère la fonction

$$G(u) = \iota_C(u) + \lambda \mathrm{TV}_\varepsilon(u)$$

Écrire l'algorithme de descente de gradient proximal et examiner sa convergence.