TD5

Arthur Leclaire

Dans toute cette feuille, les images seront définies comme des fonctions

$$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

où $\Omega = [0 : M-1] \times [0 : N-1]$ est un rectangle de taille $M \times N$.

Exercice 1.

Cet exercice concerne la représentation matricielle d'un opérateur de dégradation A.

1. En notant $d = MN$ le nombre de pixels, expliquer une manière d'identifier une image $u \in \mathbb{R}^\Omega$ et à un vecteur de $\mathbb{R}^d$.

2. On suppose ici M, N pairs, $M = 2m$, $N = 2n$, et on considère l'opérateur de réduction : à $u \in \mathbb{R}^\Omega$ est associée l'image réduite Ru définie par

$$\forall (x, y) \in [0 : m-1] \times [0 : n-1], \quad Ru(x, y) = u(2x, 2y) \ .$$

Écrire la matrice A associée à cette opérateur de réduction (aussi appelé "sous-échantillonnage par 2").

Exercice 2.

Dans cet exercice, on écrit u comme un vecteur colonne de $\mathbb{R}^d$. Soit $A, B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ deux matrices.
On cherche à minimiser la fonction $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \quad F(u) = \frac{1}{2}\|Au - v\|_2^2 + R(u)$$

où la régularisation R est donnée par $R(u) = \lambda \|Bu\|_2^2$ avec $\lambda > 0$ un paramètre.

1. **a.** Supposons $B = \mathrm{Id}$. Montrer qu'alors F atteint son minimum en un unique point u_* que l'on calculera.
b. Reprendre la question précédente pour B une matrice orthogonale.

2. Supposons $B = 0$.
a. Expliciter la condition de point critique $\nabla F(u) = 0$.
b. Donner une condition sur la matrice A assurant l'existence d'un tel point critique (et le calculer).

Exercice 3.

Soit B une matrice orthogonale $d \times d$. Soient $v \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda > 0$ fixés. Montrer que la fonction

$$F(u) = \frac{1}{2}\|u - v\|_2^2 + \lambda \|Bu\|_1$$

admet un minimum et donner un point u_* où il est atteint.

Exercice 4.

On rappelle que le gradient discret ∇u est défini par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2, \quad \nabla u(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 u(x,y) \\ \partial_2 u(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x+1,y) - u(x,y) \\ u(x,y+1) - u(x,y) \end{pmatrix}$$

où l'on a adopté des conditions de bords périodiques. Ceci définit donc une opération $\nabla : \mathbb{R}^\Omega \to (\mathbb{R}^2)^\Omega$.

En utilisant le produit scalaire euclidien, on peut donc aussi définir l'adjoint $\nabla^T : (\mathbb{R}^2)^\Omega \to \mathbb{R}^\Omega$: pour un champ de vecteur $p : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $\nabla^T p \in \mathbb{R}^\Omega$ est défini par

$$\forall u \in \mathbb{R}^\Omega, \quad \langle \nabla^T p, u \rangle = \langle p, \nabla u \rangle = \sum_{(x,y)\in\Omega} p_1(x,y)\partial_1 u(x,y) + p_2(x,y)\partial_2 u(x,y) \ .$$

1. Donner une formule plus explicite pour $\nabla^T p$.

2. En déduire l'expression de $\nabla^T \nabla u$.

3. Soit $\lambda > 0$. Utiliser ce qui précède pour calculer le gradient de la fonction $F : \mathbb{R}^\Omega \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u) = \frac{1}{2}\|u - v\|_2^2 + \lambda \|\nabla u\|_2^2 \ .$$