Université de Bordeaux | **Analyse de Fourier appliquée**
M1 MAS | **Année 2022/2023**

TD3

Arthur Leclaire

Exercice 1.

Pour $\sigma > 0$, on pose $g_\sigma(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.

1. Dans cette question, on considère $f = g_1$. On admettra que $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$.

a. Calculer $(\hat{f})'$ et montrer que $\hat{f}$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

b. En déduire que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\quad \hat{f}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

2. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $\sigma > 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\quad \widehat{g_\sigma}(\xi) = e^{-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}}$.

Exercice 2.

1. Soit $a > 0$. Montrer que $f_a : x \mapsto e^{-a|x|}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\widehat{f_a}$.

2. Calculer la transformée de Fourier de $\varphi_k : x \mapsto x^k e^{-|x|}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

3. Avec la question 1, calculer la transformée de Fourier de $h : \xi \mapsto \dfrac{1}{1+\xi^2}$.

Exercice 3.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $\int_{\mathbb{R}} |xf(x)|dx < \infty$. Montrer que

$$(\hat{f}\,)' = \widehat{-ixf(x)}\ ,$$

où, par abus de notation, on a noté $\widehat{-ixf(x)}$ la transformée de Fourier de $x \mapsto -ixf(x)$.

2. Soit $K \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $k \leqslant K$, $\int_{\mathbb{R}} |x^k f(x)|dx < \infty$. Montrer que

$$\hat{f}^{(k)} = \widehat{(-ix)^k f(x)}\ .$$

Exercice 4. Convolution dans $L^2(\mathbb{R}^d)$

Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

1. Montrer que $\widehat{fg} = \frac{1}{(2\pi)^d} \hat{f} * \hat{g}$.

2. Peut-on dire que $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$?

Exercice 5. Transformée de Fourier du sinus cardinal

On pose $\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, qui se prolonge en $\mathrm{sinc} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

1. Pour $a > 0$, calculer la transformée de Fourier de $\mathbf{1}_{[-a,a]}$.

2. **a.** Montrer que $\mathrm{sinc} \in L^2(\mathbb{R})$, et qu'on peut donc parler de sa transformée de Fourier $\widehat{\mathrm{sinc}}$.

b. Montrer que $\widehat{\mathrm{sinc}} = \pi \mathbf{1}_{[-1,1]}$.

3. Montrer que pour $A > 0$, $\displaystyle\int_0^A \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = -\frac{\sin^2 A}{A} + \int_0^A \frac{\sin(2x)}{x} dx$.

4. Déduire de ce qui précède la valeur de $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Exercice 6. Équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$

Fixons une condition initiale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, et cherchons $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que l'on écrira $u(t,x)$, qui soit continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, qui soit sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ par rapport à t et $\mathscr{C}^2$ par rapport à x, et vérifiant

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\,,$$
$$u(0,x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Dans cet exercice, $\hat{u}$ désigne la transformée de Fourier par rapport à la variable d'espace, définie par

$$\forall t > 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{u}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(t,x) e^{-i\xi.x} dx\,.$$

1. On va montrer l'unicité de la solution de façon heuristique, en admettant que la dérivée en temps passe au travers de la transformation de Fourier :

$$\forall t > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) e^{-i\xi x} dx\,.$$

On supposera aussi que $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, que pour tout $t > 0$, $u(t,\cdot) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, et que $u(t,\cdot) \to f$ dans L^1 quand $t \to 0$.

a. Montrer que pour tout $t > 0$ et tout $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\quad \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t,\xi) = -\xi^2 \hat{u}(t,\xi)$.

b. En déduire l'expression de $\hat{u}(t,\xi)$.

c. En déduire que pour tout $t > 0$, $u(t,\cdot)$ est la convolution de f par le noyau k_t défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad k_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\,.$$

(On pourra remarquer que k_t est une gaussienne dont la transformée de Fourier est calculée à l'Exercice 1.)

2. Réciproquement, on va montrer l'existence d'une solution dans le cas où $f \in L^1(\mathbb{R})$. Vu ce qui précède, on pose donc $u(0,\cdot) = f$ et

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy\,. \tag{1}$$

a. Montrer que ceci définit bien $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

b. Montrer que pour tout $t > 0$, $u(t,\cdot)$ est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $\partial_x^2 u = u * \partial_x^2 k_t$.

c. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(\cdot,x)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\partial_t u$.

d. En déduire que u vérifie l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

e. Montrer que $u(t,\cdot) \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}$ quand $t \to 0$.

f. En déduire que u est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

g. Montrer que $t \mapsto \|u(t,\cdot)\|_2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque 1.

- On peut voir que la solution u est en fait $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Il suffit de montrer, par récurrence, que l'on peut dériver (1) sous le signe $\int$, à tout ordre, et que toutes les dérivées partielles sont continues.
- L'équation de la chaleur $\partial_t u = \Delta u$ peut être formulée et résolue sur $\mathbb{R}^d$: la solution $u(t,\cdot)$ est alors donnée par $f * k_t$ où le noyau s'écrit maintenant

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad k_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,.$$