TD2

Arthur Leclaire

Exercice 1.

Définissons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

1. Montrer que

$$\forall n \neq 0, \quad c_n(f) = \frac{i^{n+1}}{2\pi n}\big((-1)^n - 1\big) .$$

2. En déduire que pour $x \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p \geqslant 0} \frac{(-1)^p}{2p+1} \cos((2p+1)x) .$$

Que se passe-t-il aux points $x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$?

3. Montrer que la série converge dans $L^2(\mathbb{T})$, et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p \geqslant 0} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

4. (Bonus) Comme f est paire ici, vous pouvez retrouver le développement en série de Fourier de f en utilisant les formules $a_n(f)$ données en cours pour le développement en cosinus.

Exercice 2.

On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique vérifiant

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad g(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|x|}{\pi}\right) .$$

1. Calculer les coefficients de Fourier de g.

2. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{4} + 2 \sum_{p \geqslant 0} \frac{1}{\pi^2 (2p+1)^2} \cos\Big((2p+1)x\Big) .$$

En quel(s) sens a lieu la convergence ?

3. Avec la formule de Parseval, en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p \geqslant 0} \frac{1}{(2p+1)^4}$ puis de $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 3.

On se donne $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ telle que $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n| < \infty$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{inx}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
Montrer que sa somme définit une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\quad c_n(f) = \alpha_n$.

Exercice 4.

Soit $p \in [1, \infty]$ et soient $f \in L^p(\mathbb{T})$ et $g \in L^1(\mathbb{T})$.

On va voir dans cet exercice que $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_1$.

1. Expliquer pourquoi la convolution périodique $f * g$ est bien définie.

2. Traiter le cas facile : montrer que pour $p = \infty$, on a $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_1$.

3. Supposons maintenant $p < \infty$.

a. Expliquer pourquoi l'on peut supposer $\|g\|_1 \neq 0$.

b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(\int_0^{2\pi} |f(x-y)| \frac{|g(y)|}{\|g\|_1} \frac{dy}{2\pi}\right)^p \leqslant \int_0^{2\pi} |f(x-y)|^p \frac{|g(y)|}{\|g\|_1} \frac{dy}{2\pi}$.

c. En déduire que $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_1$.

Exercice 5.

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$ telle qu'il existe $g \in L^1(\mathbb{T})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - f(0) = \int_0^x g(t)dt \ .$$

1. Montrer que pour tout $n \neq 0$, $\quad c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(g)$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-périodique, continue, et $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

a. Montrer que l'hypothèse ci-dessus est vérifiée pour f.

b. En déduire que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$. Qu'en déduit-on pour la série de Fourier ?

Exercice 6.

Soit $h \in \mathscr{C}^k(\mathbb{T})$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $f \in L^1(\mathbb{T})$.

1. Montrer que $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{T})$ avec $(h * f)' = h' * f$.

2. En déduire que $h * f \in \mathscr{C}^k(\mathbb{T})$ avec $(h * f)^{(k)} = h^{(k)} * f$.

Exercice 7. Preuve du théorème de Dirichlet

Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $a \in \mathbb{R}$ fixé.

On suppose que f admet en a des limites finies à gauche et à droite notées $f(a_-)$ et $f(a_+)$ et qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\int_0^\delta \frac{|f(a+t) - f(a_+)|}{t} dt < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^\delta \frac{|f(a-t) - f(a_-)|}{t} dt < \infty \ .$$

Comme en cours, pour $N \in \mathbb{N}$, on note $S_N f = D_N * f$ la N-ième somme partielle de la série de Fourier.

1. Montrer que

$$S_N f(a) - \frac{1}{2}\Big(f(a_-) + f(a_+)\Big) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{h_a(t)}{\sin(\frac{t}{2})} \sin\left(\Big(N + \frac{1}{2}\Big)t\right) dt \ ,$$

où l'on a posé

$$h_a(t) = f(a+t) - f(a_+) + f(a-t) - f(a_-) \ .$$

2. Montrer que $t \mapsto \frac{h_a(t)}{\sin \frac{t}{2}} \in L^1(0, \pi)$. En déduire avec le lemme de Riemann-Lebesgue que

$$S_N f(a) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{2}\Big(f(a_-) + f(a_+)\Big) \ .$$

Exercice 8. Fonctions Hölderiennes

Pour $\alpha \in]0,1]$, on note $\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions 2π-périodiques $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont α-holdëriennes, que l'on munit de la norme

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha} = \|f\|_\infty + \sup_{t\in\mathbb{R},h\neq 0} \frac{|f(t+h)-f(t)|}{|h|^\alpha} .$$

1. Montrer que $\mathscr{C}^1(\mathbb{T}) \subset \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{T}) \subset \mathscr{C}(\mathbb{T})$.

2. Soit $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{T})$. On note $\tau_h f(t) = f(t-h)$.

a. Montrer que pour tout $n \neq 0$,

$$c_n(f) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \left(f(t) - f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right) e^{-int} dt .$$

b. En déduire que $c_n(f) = O(\frac{1}{|n|^\alpha})$ quand $|n| \to \infty$.

3. Supposons maintenant $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1]$.

a. Montrer que pour tout $h \in \mathbb{T}$, la translatée $\tau_h f(t) = f(t-h)$ vérifie

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |e^{inh}-1|^2 |c_n(f)|^2 = \|\tau_h f - f\|_2^2 .$$

b. Soient $m \in \mathbb{N}$. En prenant $h = \frac{2\pi}{3\cdot 2^m}$, montrer que

$$\sum_{2^m \leqslant |n| < 2^{m+1}} |c_n(f)|^2 \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |e^{inh}-1|^2|c_n(f)|^2 \leqslant \left(\frac{2\pi}{3\cdot 2^m}\right)^{2\alpha} \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha}^2 .$$

c. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en déduire que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \sum_{2^m \leqslant |n| < 2^{m+1}} |c_n(f)| \leqslant 2^{\frac{m+1}{2}} \left(\frac{2\pi}{3\cdot 2^m}\right)^{\alpha} \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha} .$$

d. En conclure qu'il existe une constante c_α dépendant uniquement de α telle que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| \leqslant c_\alpha \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha} .$$

Exercice 9. Équation de la Chaleur en conditions périodiques

Fixons une condition initiale $f \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$ et cherchons $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (de deux variables i.e. $u(t,x)$) 2π-périodique en x, continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et vérifiant

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ u(0,x) &= f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1. (Unicité) Soit $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une solution.

a. On fixe $t > 0$. Montrer qu'il existe des coefficients $(c_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx} ,$$

où la série converge absolument.

b. Montrer que $t \mapsto c_n(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall t > 0, \quad c_n'(t) = -n^2 c_n(t) .$$

c. Montrer que $\lim_{t \to 0} c_n(t) = c_n$ où c_n est le n-ième coefficient de Fourier de f.

d. En déduire que l'on a nécessairement pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$u(0,x) = f(x) \quad \text{et} \quad u(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-n^2 t} e^{inx} \ . \tag{1}$$

2. (Existence) Définissons u par les formules (1), où (c_n) sont les coefficients de Fourier de f.

a. Montrer que sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, u est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et vérifie $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

b. Pour $t > 0$, posons

$$p_t(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t} e^{inx}$$

Montrer que pour $t > 0$, $u(t, \cdot) = f * p_t$.

c. Montrer que $\|u(t,\cdot) - f\|_2 \to 0$ quand $t \to 0$.

d. Montrer que $t \mapsto \|u(t,\cdot)\|_2$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque 1. On peut en fait montrer que $\|u(t,\cdot) - f\|_\infty \to 0$ quand $t \to 0$, ce qui donne la continuité de u sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Mais c'est plus difficile.