TD1

Arthur Leclaire

Dans toute cette feuille, $M, N \in \mathbb{N}^*$ et on adopte les mêmes notations qu'en cours.

Exercice 1.

Soient $u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

1. Montrer que $\langle \hat{u}, v \rangle = N \langle u, \check{v} \rangle$.

2. Montrer que $\langle u, v \rangle = \frac{1}{N} \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle$ et que $\|u\|^2 = \frac{1}{N} \|\hat{u}\|^2$.

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $\hat{\hat{u}}(x) = Nu(-x)$.

4. En déduire que $\mathrm{DFT}^4 = N^2 \,\mathrm{Id}$.

5. Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme $f = \frac{1}{\sqrt{N}}\mathrm{DFT}$ sont incluses dans $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$.

Exercice 2.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$. On définit la suite conjuguée $\overline{u}(x) = \overline{u(x)}$ et la renversée $\tilde{u}(x) = u(-x)$.

1. Montrer que $\widehat{\overline{u}}(p) = \overline{\hat{u}(-p)}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

2. Supposons que u est à valeurs réelles. Montrer que $\widetilde{\hat{u}} = \overline{\hat{u}}$ puis que $|\hat{u}|$ est pair.

Dans la suite de l'exercice, on suppose N impair, $N = 2K + 1$ avec $K \in \mathbb{N}$.

3. On suppose que pour tout $p \in [-K : K]$, $\hat{u}(-p) = \overline{\hat{u}(p)}$. Montrer que u est à valeurs réelles.

4. On suppose N impair, $N = 2K + 1$ avec $K \in \mathbb{N}$. On considère $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ défini par

$$\forall x \in [0 : N-1], \quad v(x) = \left|\frac{N}{2} - x\right| - \frac{1}{2} .$$

a. Tracer v sur $[0 : N-1]$ puis sur $[-K : K]$.
b. Montrer que $\check{v}$ est à valeurs réelles.

Exercice 3.

Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on définit $\delta_a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ par $\forall x \in \mathbb{Z},\ \delta_a(x) = \mathbf{1}_{x=a \text{ mod. } N}$.

Dans ce contexte discret périodique, on dit que δ_a est la masse de Dirac en a mod. N (à ne pas confondre avec le cas continu où δ_a est une mesure).

1. Montrer que $\mathcal{B} = (\delta_a)_{a \in [0:N-1]}$ est une base de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

2. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Calculer $\widehat{\delta_a}$.

3. En déduire la matrice W_N de l'endomorphisme DFT dans base $\mathcal{B}$.

4. Expliciter W_N pour $N = 3$ et $N = 4$.

5. Montrer que W_N est symétrique inversible et calculer W_N^{-1}.

6. Soit $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$. La convolution périodique par v définit un endomorphisme

$$\gamma_v : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N} \\ u & \longmapsto & u * v \end{array} .$$

Calculer la matrice de γ_v dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4.

L'unité de temps étant la seconde, on considère le signal audio continu 1-périodique défini par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sin(7 \cdot 2\pi t) - 4\cos(440 \cdot 2\pi t) \ .$$

On échantillonne ce signal f pendant une seconde à une fréquence de 1024 Hz.

On note $N = 1024$.

1. Écrire la formule qui définit le signal échantillonné $u : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$.

2. En utilisant la formule d'Euler, calculer $\hat{u}$.

3. Tracer le spectre de u (sur $[0 : N-1]$ puis $[-\frac{N}{2} : \frac{N}{2}]$).

4. Analyser le spectre de u et interpréter son contenu fréquentiel.

Exercice 5.

Cet exercice vise à étudier l'effet dans le domaine du Fourier de plusieurs méthodes simples de réduction de signaux et d'images. Les signaux (resp. images) de départ seront de taille N (resp. $M \times N$) et les signaux (resp. images) réduits seront de taille deux fois plus petite.

Dans tout l'exercice, on supposera donc M et N pairs : $M = 2m$ et $N = 2n$ avec $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Pour bien distinguer les tailles, on notera Fv la TFD de $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n}$ et $\hat{u}$ la TFD de $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$.

On adoptera aussi ces deux notations pour les TFD 2D d'images de tailles $m \times n$ ou $M \times N$.

1. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$. On définit un signal réduit v de taille n en posant pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $v(x) = u(2x)$. Montrer que $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n}$, puis que

$$\forall \xi \in \mathbb{Z}, \quad Fv(\xi) = \frac{1}{2}\big(\hat{u}(\xi) + \hat{u}(\xi + n)\big) \ .$$

2. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$. On définit maintenant $w \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n}$ en posant pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $w(x) = \frac{1}{2}(u(2x) + u(2x+1))$. Exprimer Fw en fonction de $\hat{u}$. (On pourra commencer par calculer la TFD de $v'(x) = u(2x+1)$.)

3. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_M \times \mathbb{Z}_N}$. On adapte la définition en 2D en posant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \quad Ru(x, y) = u(2x, 2y) \ .$$

a. Exprimer la TFD bidimensionnelle $F(Ru)$ en fonction de $\hat{u}$.

b. Pouvez-vous prédire l'effet de l'opération de réduction R sur une image u comportant des rayures de haute fréquence (ξ, ζ) ?

Exercice 6.

Démontrer la formule d'inversion de Fourier discrète en 2D, c'est-à-dire pour $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_M \times \mathbb{Z}_N}$.

Exercice 7.

Dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{M,N}}$, on définit la masse de Dirac en $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad \delta_{(a,b)}(x, y) = \mathbf{1}_{x=a \text{ mod. } M} \mathbf{1}_{y=b \text{ mod. } N} = \delta_a(x)\delta_b(y) \ ,$$

pour les $(a, b) \in [0 : M-1] \times [0 : N-1]$.

On reprend les notations vues en cours pour les dérivées discrétisées $\partial_1 u, \partial_2 u$.

1. Donner le noyau k_1 (resp. k_2) correspondant au filtre ∂_1 (resp. ∂_2). (On pourra écrire k_1, k_2 comme combinaison linéaire de masses de Dirac $\delta_{(a,b)}$.)

2. Calculer la TFD 2D de k_1 et k_2.

3. Le filtre laplacien discret est défini par : pour toute $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{M,N}}$,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \quad \Delta u(x, y) = u(x+1, y) + u(x-1, y) + u(x, y+1) + u(x, y-1) - 4u(x, y) \ .$$

Donner le noyau de convolution L associé et calculer sa TFD.