Université de Bordeaux
M1 MAS

Analyse de Fourier appliquée
Année 2022/2023

Analyse de Fourier appliquée
Examen

Durée 3h

Dans cet examen, on adoptera les mêmes notations que celles utilisées dans le cours.
Les réponses aux questions doivent être justifiées, et rédigées soigneusement.

Exercice 1. Questions de cours

1. **a.** Donner la définition de la convolution de deux fonctions dans $L^1(\mathbb{R})$.
b. Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et g de classe $\mathscr{C}^k$ à support compact sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de $f * g$?

2. Énoncer le théorème d'échantillonnage de Shannon pour une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$.

3. Soit $B \in \mathbb{C}^{d\times d}$ une matrice telle que $B^*B = I_d$, et soit $\mu > 0$ un seuil.
Donner la définition de l'opération T_μ de seuillage dur des coefficients calculés avec B.

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $\forall x \in\ [-\pi, \pi[,\quad f(x) = \begin{cases} (x-\pi)^2 & \text{si } x \in [0,\pi[\\ (x+\pi)^2 & \text{si } x \in\ [-\pi, 0[\end{cases}$.

Comme en cours, on définira les coefficients de Fourier de f par

$$\forall n \in \mathbb{Z},\quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx\ .$$

Pour $N \in \mathbb{N}$ on notera $S_N f$ la N-ième somme partielle de la série de Fourier de f.

1. Tracer le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.

2. Calculer les coefficients de Fourier de f.

3. Écrire le développement en série de Fourier de f, en justifiant la convergence ponctuelle.

4. Est-ce que la série de Fourier de f converge dans L^2 ? Préciser ce que cela signifie pour $(S_N f)$.

5. Calculer la valeur de $A = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

6. Est-ce que la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$? (Justifier soigneusement.)

Exercice 3.

Soit $a > 0$. On définit la fontion f_a sur $\mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f_a(x) = e^{-ax}\mathbf{1}_{x>0}$.

1. **a.** Justifier pourquoi l'on peut calculer la transformée de Fourier de f_a, et la calculer.
b. Peut-on appliquer le théorème d'inversion de Fourier à la fonction f_a ?

2. **a.** Montrer qu'il existe une fonction $g_a \in L^2(\mathbb{R})$ telle que pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\quad \hat{g}_a(\xi) = \dfrac{1}{(a+i\xi)^2}$.
b. Trouver une expression explicite de la fonction g_a.
c. Est-ce que $g_a \in L^1(\mathbb{R})$?
d. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déduire de ce qui précède une expression de $\quad \varphi_a(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x}}{(a+i\xi)^2}d\xi$.
e. Déduire aussi la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(a^2+\xi^2)^2}$.

3. Peut-on appliquer le théorème d'échantillonnage de Shannon à la fonction f_a ?

Exercice 4.

Dans cet exercice, on considère des images en niveaux de gris $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ où $\Omega = [0 : M-1] \times [0 : N-1]$. On s'autorisera à identifier une image u à un vecteur de $\mathbb{R}^d$, avec $d = MN$.

On considère le modèle de dégradation

$$v = Au + w$$

où w est un bruit blanc gaussien et où l'opérateur de dégradation $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est donné par la convolution périodique par un noyau $k \in \mathbb{R}_+^\Omega$ tel que $\sum_{x\in\Omega} k(x) = 1$.

Dans cet exercice, on étudie plusieurs algorithmes de déflouage basés sur la minimisation de la fonction F définie par

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \quad F(u) = f(u) + R(u) ,$$

où $f(u) = \frac{1}{2}\|Au - v\|_2^2$ et où $R(u)$ est un terme de régularisation.

1. **a.** Montrer que f est différentiable, et calculer ∇f.

b. Montrer que $A^T A$ est un opérateur de convolution périodique, et préciser son noyau.

c. En déduire la constante de Lipschitz de ∇f.

d. On rappelle que l'opérateur proximal d'une fonction convexe g est défini par

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \quad \mathrm{Prox}_g(u) = \operatorname*{Argmin}_{z\in\mathbb{R}^d} \frac{1}{2}\|u - z\|_2^2 + g(z) .$$

Pour $\tau > 0$, donner une expression de $\mathrm{Prox}_{\tau f}$ en fonction de A et A^T.

Comment peut-on ici calculer en pratique $\mathrm{Prox}_{\tau f}$ dans notre cas où A est la convolution par k ?

2. Dans cette question, on considère $R(u) = \lambda\|\nabla u\|_2^2$ où $\lambda > 0$ est un paramètre, et où $\nabla u = (\partial_1 u, \partial_2 u)$ est le gradient discret de l'image u.

a. Calculer ∇R.

b. Écrire l'algorithme de descente de gradient à pas fixe $\tau > 0$ pour minimiser F.

Expliquer sous quelles conditions cet algorithme converge vers une solution du problème.

c. À l'aide de la formule de Parseval, donner une expression de F en fonction de $\hat{u}$.

d. Montrer que F atteint son minimum en un point $u_* \in \mathbb{R}^d$ que l'on exprimera explicitement.

(On pourra utiliser que si $a, b \in \mathbb{C}$ et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ sont tels que $\alpha + \beta > 0$, alors $\alpha|z - a|^2 + \beta|z - b|^2$ atteint son minimum seulement en $z = \alpha a + \beta b$.)

3. Dans cette question, on considère $R(u) = \lambda \mathsf{TV}_\varepsilon(u)$ où $\lambda > 0$ est un paramètre, et où la variation totale lissée est définie pour $\varepsilon > 0$ par

$$\mathsf{TV}_\varepsilon(u) = \sum_{(x,y)\in\Omega} \sqrt{\varepsilon^2 + \partial_1 u(x,y)^2 + \partial_2 u(x,y)^2} .$$

Peut-on encore formuler l'algorithme du gradient à pas fixe pour minimiser F dans ce cas ?

Si oui, expliciter la condition de convergence de cet algorithme.

4. Dans cette question, on fixe $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ orthogonale.

a. Considérons $R(u) = \lambda\|Bu\|_1$ où $\lambda > 0$. Donner un algorithme permettant de minimiser F, en justifiant la condition de convergence. (On pourra utiliser que Prox_R est un opérateur de seuillage doux.)

b. Est-ce que l'on peut adapter la démarche de la question 4a à la régularisation $R(u) = \lambda\|Bu\|_0$?