Université de Bordeaux **Analyse de Fourier appliquée**
M1 MAS **Année 2022/2023**

DS1

Durée 1h30

Dans ce devoir, on adoptera les mêmes notations que celles utilisées dans le cours.
Les réponses aux questions doivent être justifiées, et rédigées soigneusement.

Exercice 1. Questions de cours

1. Donner la définition de la TFD 2D d'une fonction $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{M,N}}$.
2. Donner la définition de la convolution périodique de deux fonctions $f, g \in L^1(\mathbb{T})$.
3. Énoncer le théorème d'inversion de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 2.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, on définit $\partial u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ et $\partial^* u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ par

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} \partial u(x) & = u(x+1) - u(x) \\ \partial^* u(x) & = u(x) - u(x-1) \end{cases} .$$

1. Montrer que ∂ est un opérateur de convolution et donner le noyau k associé.
2. **a.** Calculer la transformée de Fourier discrète de k et le spectre de k.
b. Tracer le spectre de k.
3. Écrire une fonction Python qui prend en entrée u et renvoie ∂u.
4. **a.** Démontrer que ∂^* est un opérateur de convolution associé au noyau $\tilde{k}$ défini par $\tilde{k}(x) = k(-x), \forall x \in \mathbb{Z}$.
b. En déduire le noyau h associé à $\partial \circ \partial^*$, et la transformée de Fourier discrète $\hat{h}$.
5. Soit z un entier tel que $0 < z < \frac{N}{2}$. On définit $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ par

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \quad v(x) = \frac{1}{N} \cos\left(\frac{2\pi z x}{N}\right) .$$

a. Calculer $\hat{v}$.
b. En déduire $k * v$.
c. Commenter le changement opéré sur v par le filtre k (en fonction de la position de z).

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $\forall x \in \ [-\pi, \pi[, \quad f(x) = \begin{cases} x + 2\pi & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Comme en cours, on notera $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier de f, pour $N \in \mathbb{N}$ on notera $S_N f$ la N-ième somme partielle de la série de Fourier de f, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_N f(x) = \sum_{|n| \leq N} c_n(f) e^{inx} ,$$

et pour $N \in \mathbb{N}^*$, on notera $\sigma_N f = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n f$.
1. Tracer le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Écrire le développement en série de Fourier de f, en justifiant la convergence ponctuelle.
4. Est-ce que la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$?
5. Est-ce que la série de Fourier de f converge dans L^2 ? En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
6. Est-ce que $\sigma_N f$ converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}$?
7. Est-ce que $\sigma_N f$ converge vers f dans L^1 ?