DM2

Arthur Leclaire

Exercice 1.

Soit $a > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_a(x) = e^{ax}\mathbf{1}_{x<0}$ et $g_a(x) = \frac{1}{x+ia}$.

1. **a.** Est-ce que f_a est intégrable sur $\mathbb{R}$?
b. Calculer la transformée de Fourier de f_a.

2. **a.** Est-ce que g_a est intégrable sur $\mathbb{R}$?
b. Si c'est possible, calculer la transformée de Fourier de g_a.
c. Peut-on étendre le résultat des questions 2a, 2b pour $a < 0$? pour $a = 0$?

Exercice 2.

Cet exercice porte sur la compression d'images. Vous avez à écrire un Jupyter-notebook pour répondre aux questions ci-dessous. Le notebook terminé est à déposer sur Moodle.

On considère une image u définie sur un rectangle $\Omega = [0 : M-1] \times [0 : N-1]$ de taille $M \times N$. On va traiter l'image par patch, c'est-à-dire en considérant des imagettes de taille $s \times s$ avec $s \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Dans les expériences, on pourra utiliser l'image fournie `simpson512crop.png` et prendre $s = 8$.

On suppose que M et N sont multiples d'un entier $s \in \mathbb{N}^*$

1. Écrire une fonction qui applique le seuillage dur T_μ de niveau $\mu > 0$ sur la transformée de Fourier discrète, c'est-à-dire telle que, pour une image v en niveaux de gris,

$$\forall \xi \in \mathbb{Z}^2, \quad \widehat{T_\mu v}(\xi) = \hat{v}(\xi)\mathbf{1}_{|\hat{v}(\xi)| \geqslant \mu} \, .$$

2. Dans cette question, on travaille l'image u convertie en niveaux de gris.

a. Utiliser la fonction écrite dans la question 1 pour compresser l'image u de la façon suivante : on découpe le domaine Ω en carrés de taille $s \times s$ (sans recouvrement) et on applique l'opération de seuillage T_μ sur chaque carré.

b. Appliquer cette compression pour plusieurs valeurs μ et afficher les PSNR des images compressées.

c. Trouver une façon d'ajuster le seuil μ de telle sorte que 90% des coefficients soient mis à zéro.

3. Adapter la question précédente pour compresser une image couleurs u, de deux façons :

a. Avec les canaux RGB, appliquer le seuillage par patch sur chaque canal, avec le même seuil μ.

b. En convertissant dans la représentation en canaux HSV, appliquez des seuillages différents sur chaque seuil, en compressant légèrement le canal H, et fortement les canaux S et V. Comparer avec RGB.

Pour la conversion en canaux HSV, on pourra utiliser `matplotlib.colors.rgb_to_hsv`.

(Vous pouvez chercher sur internet une brève description de l'espace de couleurs HSV.)

Exercice 3.

Cet exercice porte sur l'échantillonnage et la réduction d'images. Vous avez à écrire un Jupyter-notebook pour répondre aux questions ci-dessous. Le notebook terminé est à déposer sur Moodle.

On se donne deux paramètres $a, b > 0$ et on considère la fonction f définie sur $[-5,5]^2$ par

$$\forall x, y \in [-5,5] \times [-5,5], \quad f(x,y) = \cos(2\pi(ax+by))e^{-0.2(x^2+y^2)} .$$

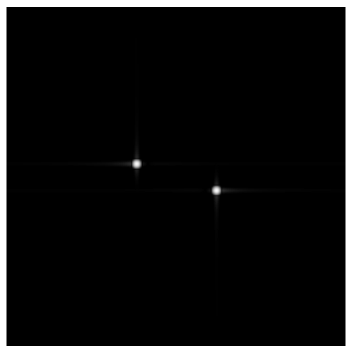
On va considérer des images $N \times N$ et $n \times n$ avec $N = 256$ et $n = \frac{N}{2}$.

1. On peut montrer que la transformée de Fourier de f a un support concentré près d'un ou plusieurs points. Pouvez-vous prédire les fréquences près desquelles le support de $\hat{f}$ est localisé ?

2. Commençons par fixer $a = 3, b = 1$.

a. Créer une image u de taille $N \times N$ en échantillonnant f sur le carré $[-5,5]^2$ avec un pas $s = \frac{10}{N}$. On pourra utiliser la fonction `np.meshgrid` qui permet d'obtenir une grille de coordonnées (x, y). Afficher u.

b. Afficher le spectre centré de u. Le résultat devrait ressembler à cela :



3. Fixons toujours $b = 1$. Mais maintenant, faites varier a entre 0 et 25.6.

a. En testant plusieurs valeurs, observer les changements sur u et son spectre.

b. Quel lien faites-vous entre la valeur de (a, b) et la position des pics de $|\hat{u}|$?

c. Qu'observez-vous lorsque a dépasse la valeur 12.5 (environ) ?

d. Pouvez-vous expliquer le phénomène précédent avec le théorème d'échantillonnage de Shannon ?

4. Considérons maintenant l'image réduite Ru à la taille $n \times n$ définie par

$$Ru(x,y) = \frac{1}{4}\Big(u(2x,2y) + u(2x,2y+1) + u(2x+1,2y) + u(2x+1,2y+1)\Big) .$$

Dans cette question, on va fixer $a = 3, b = 10$.

a. Écrire un code permettant d'effectuer cette rédution d'images d'un facteur 2.

b. Afficher côte-à-côte les spectres de u et Ru.

c. Que constatez-vous ? Peut-on expliquer le phénomène observé ?