DM1 - Indications de correction

Arthur Leclaire

Dans ce document sont données des indications de correction, seulement pour les questions où c'est nécessaire. Ces indications ne constituent pas une correction intégrale du sujet.

Exercice 1.

1.

2.

a. Par hypothèse, il existe $C > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |c_n(f)| \leqslant \frac{C}{|n|^{k+2}} \ .$$

Comme $\sum \frac{1}{n^{k+2}} < \infty$ (par le critère de Riemann), on en déduit que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$, c'est-à-dire que la série de Fourier $\sum c_n(f) e^{inx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Il reste à voir que la limite est bien f. Notons g la somme de la série, c'est-à-dire,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} \ .$$

Comme la série converge normalement, elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Comme tous les termes sont continus, on en déduit que g est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, par convergence uniforme, on peut intervertir série et intégrale pour le calcul des coefficients de Fourier :

$$\forall p \in Z, \quad c_p(g) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-p)x} \frac{dx}{2\pi} = c_p(f) \ .$$

Ainsi, f et g ont les mêmes coefficients de Fourier. Par injectivité des coefficients de Fourier, on en déduit que $f = g$ presque partout, et donc partout puisque f et g sont continues. Finalement, on a bien

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} \ ,$$

avec convergence normale (et donc uniforme) sur $\mathbb{R}$.

b. Il s'agit de montrer que f est $\mathscr{C}^k$ par dérivation sous le signe somme, en montrant que la série dérivée ℓ-ième converge uniformément pour tout $\ell \leqslant k$.

3. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\|S_N f - f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{|n|>N} c_n(f) e^{inx} \right| \leqslant \sum_{|n|>N} |c_n(f)| \leqslant \sum_{|n|>N} \frac{\|f^{(k)}\|_\infty}{|n|^k} \leqslant 2\|f^{(k)}\|_\infty \sum_{n>N} \frac{1}{n^k} \ .$$

La dernière somme est le reste partiel d'une série convergente, que l'on peut contrôler par une comparaison série-intégrale :

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^k} = \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^k} = \frac{1}{(k-1)N^{k-1}}$$

Finalement,

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \|S_N f - f\|_\infty \leqslant \frac{2\|f^{(k)}\|_\infty}{(k-1)N^{k-1}} \ .$$

4. Supposons $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T})$. Alors, la question 1 montre que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,

$$|n|^l |c_n(f)| \leqslant \frac{\|f^{(l+1)}\|_\infty}{|n|}$$

qui tend vers zéro.

Réciproquement, si pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $|n|^\ell c_n(f) \to 0$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_n(f) = O(\frac{1}{|n|^{k+2}})$ et donc la question 2 montre que f est de classe $\mathscr{C}^k$. Donc f est bien $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice 2.

1.

2. Sur le graphe, on peut remarquer que l'on a en fait $f(x) = x - \pi$ pour tout $x \in [0, 2\pi[$. On peut donc écrire, par intégration par parties,

$$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x e^{-inx} dx = \ldots = \frac{i}{n} .$$

De plus, $c_0(f) = 0$.

Solution alternative : f est impaire sur $]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$, et, par intégration par parties,

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) = \ldots = -\frac{2}{n} .$$

3. Les sommes partielles de la série de Fourier s'écrivent donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_N f(x) = \sum_{|n| \leq N} c_n(f) e^{inx} = \sum_{n=1}^{N} \frac{i}{n}(e^{inx} - e^{-inx}) = -2 \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n} .$$

Comme f est $\mathscr{C}^1$ par morceaux, le théorème de Dirichlet assure que pout tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_N f(x) \to \frac{1}{2}(f(x_-) + f(x_+)) .$$

Comme f est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on en déduit

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \quad f(x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} .$$

Autrement dit, on obtient,

$$\forall x \in]0, 2\pi[, \quad \frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} .$$

En 0, on a $\frac{1}{2}(f(0_-) + f(0_+)) = 0$, et donc $S_N f(0) \to 0$.

4. La série de Fourier ne peut pas converger uniformément car f n'est pas continue.

En revanche, il est clair que f est bornée, avec $\|f\|_\infty = \pi$, donc

$$\|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty < \infty$$

et donc $f \in L^2(\mathbb{T})$. Avec le théorème du cours, on en déduit que la série de Fourier de f converge vers f dans $L^2(\mathbb{T})$.

5. Je vous invite à bien examiner le notebook donné en correction du TP, pour vous permettre d'apprendre à écrire vos codes de façon plus efficace.

En particulier, notez bien que, pour calculer les valeurs d'une fonction f sur plusieurs abscisses x, il est généralement possible de le faire sans boucle `for` (en écrivant une fonction qui peut s'appliquer directement à un vecteur d'abcisses).

Exercice 3.

Je vous invite à bien examiner le notebook donné en correction du TP, pour vous permettre d'apprendre à écrire vos codes de façon plus efficace.

Cet exercice constituait une introduction à la notion d'*aliasing*, aussi appelée repliement de spectre, qui sera étudiée plus en détail dans le cours sur l'échantillonnage.

1. Il fallait bien remarquer ici qu'on avait défini $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ (signal défini par N coefficients), et $Ru \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n}$ (signal défini par $n = \frac{N}{2}$ coefficients). Ainsi, dans la représentation informatique, Ru est un vecteur de taille deux fois plus petite que u.

Quelques remarques sur le code :

- Pour générer le signal u, il n'y a pas besoin de faire une boucle, puisqu'on peut directement générer le vecteur $x = (0, \dots, N-1)$ par
  `x = np.arange(0,N)`
- La procédure de réduction proposée peut être implémentée très efficacement en une ligne :
  `Ru = u[::2]`
  Plus généralement, faire `u[a:b:p]` permet d'extraire les valeurs de `u` entre `a` et `b-1` avec un pas `p`. Si on n'indique pas `a` (resp. `b`), on commence au début (resp. à la fin) du vecteur `u`. Si on indique pas le pas (c'est-à-dire `u[a:b]`), alors le pas est 1.
- Il est souvent plus judicieux d'afficher le spectre centré, en utilisant un vecteur de fréquences centrées (ou en appliquant la fonction `fftshift`).
- N'oubliez pas de tester votre code en faisant varier les paramètres de l'expérience (ici la fréquence p) en laissant dans votre notebook les traces des expériences pertinentes que vous souhaitez présenter, de façon organisée et bien commentée.

2. Là encore, pour une image, le processus de réduction d'un facteur f étudié ici pouvait s'écrire
`Ru = u[::f,::f]`