
DM1

Arthur Leclaire

Exercice 1.

On fixe $k \in \mathbb{N}$.

1. Soit $f \in \mathscr{C}^k(\mathbb{T})$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\quad |c_n(f)| \leqslant \dfrac{\|f^{(k)}\|_\infty}{|n|^k}$.

2. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$ telle que $c_n(f) = O(\frac{1}{|n|^{k+2}})$ quand $|n| \to \infty$.

a. Montrer que la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ et que sa limite est f.

b. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $f \in \mathscr{C}^k(\mathbb{T})$ avec $k \geqslant 2$. En notant $S_N f$ la N-ième somme partielle de la série de Fourier, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ (que l'on donnera explicitement) telle que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \|S_N f - f\|_\infty \leqslant \frac{C\|f^{(k)}\|_\infty}{N^{k-1}}.$$

Commenter brièvement ce résultat.

4. Montrer que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T})$ si et seulement si $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\quad \lim\limits_{|n|\to\infty} |n|^\ell c_n(f) \to 0$.

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $\forall x \in]-\pi, \pi]$, $\quad f(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{si } x < 0 \\ x - \pi & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

1. Tracer le graphe de f.

2. Calculer les coefficients de Fourier de f.

3. Écrire le développement en série de Fourier de f, en justifiant la convergence ponctuelle.

4. Est-ce qu'ici la série de Fourier converge uniformément sur $\mathbb{R}$? Est-ce qu'elle converge dans L^2 ?

5. Écrire un Jupyter-notebook (en langage Python) pour illustrer informatiquement le développement en série de Fourier précédent. On prendra soin de générer des graphiques propres (titre, légende) et à commenter les résultats obtenus. Le notebook obtenu est à déposer sur Moodle.

Exercice 3.

Cet exercice porte sur la réduction de signaux et d'images. Vous avez à écrire un Jupyter-notebook pour répondre aux questions ci-dessous. Le notebook terminé est à déposer sur Moodle.

Soient $M, N \in \mathbb{N}^*$ pairs, $M = 2m, N = 2n$ avec $m, n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour un signal $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$, on définit un signal réduit d'un facteur 2, noté $Ru \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n}$ en définissant

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \quad Ru(x) = u(2x) .$$

a. Écrire un code pour générer le signal $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ (avec $N = 256$) défini par $\forall x \in \mathbb{Z},\ u(x) = \sin\left(2\pi \frac{px}{N}\right)$.

b. Écrire un code Python qui génère Ru, et qui affiche côte à côte les spectres de u et Ru.

c. Tester votre code pour plusieurs valeurs de p (et notamment $p = 100$).

Quel phénomène observez-vous ?

2. On adapte l'opération de réduction en 2D : pour $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{M,N}}$, on définit $Ru \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{m,n}}$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \quad Ru(x, y) = u(2x, 2y) .$$

a. Écrire un code permettant d'effectuer cette rédution d'images d'un facteur 2. Tester votre code sur l'image `tshirt.png` donnée au TP2, successivement pour réduire par 2, 4 et 8. Que constatez-vous ?

b. Afficher les spectres des images réduites.