
Restauration d'Images

Arthur Leclaire

Dans tout ce cours, on considérera une image $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ en niveaux de gris définie sur

$$\Omega = [0 : M - 1] \times [0 : N - 1]$$

(On pourra adapter ce paragraphe aux images couleurs en traitant, par exemple, les canaux séparément.)

1 Modèle d'acquisition, Bruit et Problème inverse

L'acquisition d'une image par un appareil photo numérique consiste en la captation d'un signal lumineux (matérialisé par les photons renvoyés par la scène) avec un procédé physique. Le procédé physique d'acquisition a plusieurs composants, principalement l'objectif traversé par les rayons lumineux, et le capteur CCD (*Charge Coupled Device*) qui compte les photons tombant dans chacune de ses cellules. Lorsqu'une image est acquise avec un appareil photo (par exemple), elle est donc une version déformée de l'image physique de la scène. D'une part, l'objectif confère à l'image une petite quantité de flou, qui est liée au problème de focalisation (c'est-à-dire que la mise au point est en général imparfaite). D'autre part, dans le capteur, l'information spatiale est moyennée sur chaque cellule, avec en plus un bruit photonique liée à la nature quantique de la lumière (pour simplifier, le déplacement des photons d'un rayon lumineux est soumis à des effets aléatoires). On peut aussi évoquer le problème du flou de bouger : quand on déclenche la prise de la photo, le diaphragme s'ouvre pendant une petite période de temps appelé période d'exposition. Pendant l'exposition, le capteur est exposé aux rayons lumineux, et il compte les photons tombant sur chaque cellule. Mais pendant l'exposition, l'appareil photo n'est pas parfaitement immobile, si bien que le mouvement donné à l'appareil va aussi créer une autre sorte de flou appelée flou de bouger.

On comprend ainsi que le signal v acquis par le capteur est une version dégradée de l'image réelle u_0 . Même si la dégradation met en jeu des procédés physiques avec des effets non-linéaires, on fera ici l'hypothèse que ces dégradations peuvent se résumer en un modèle

$$v = Au_0 + w$$

où A est une application linéaire (qui, en dimension finie, est représentée par une matrice) et w un "bruit". En fait, ceci revient à faire l'hypothèse que u est une réalisation d'un modèle aléatoire

$$V = Au_0 + W$$

où u_0 est l'image "propre" inconnue et où W est une image aléatoire modélisant les perturbations aléatoires de l'acquisition. L'hypothèse de bruit la plus répandue consiste à supposer que W est un bruit blanc gaussien d'écart-type $\sigma > 0$, c'est-à-dire que les $W(x, y)$ sont des variables aléatoires gaussiennes i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Ainsi, quand on cherche à reconstruire u_0 à partir de l'observation v , on dira qu'on cherche à résoudre un **problème inverse**.

Lorsque $A = \text{Id}$, c'est-à-dire lorsque l'on cherche juste à retrouver u_0 à partir de sa version bruitée v , on parle simplement de **débruitage**. C'est sans doute la problématique la plus célèbre du traitement d'images. L'hypothèse de bruit blanc gaussien ne reflète pas la réalité physique du capteur, mais elle a le mérite de permettre de faire des calculs qui débouchent sur une large classe d'algorithmes de débruitage très efficaces.

Lorsque A est un opérateur de convolution 2D par un noyau k , on parle d'un problème de **déflouage**. La convolution par un noyau k permet, dans une certaine mesure de modéliser un flou de défocalisation (c'est-à-dire d'un problème de mise au point dans l'objectif de l'appareil) ou un flou de bouger. On gardera

en tête que ceci suppose que le flou est le même sur tout le domaine de l'image. Une telle convolution ne permet donc pas de modéliser le flou de bouger observé à cause d'un mouvement d'un objet dans la scène.

On peut mentionner également d'autres types de dégradations plus compliqués. Par exemple, on parlera du problème de **super-résolution** lorsque l'opérateur A est la composition d'une convolution avec un noyau k et d'un opérateur de sous-échantillonnage. On notera que le cadre précédent permet aussi de considérer des opérateurs A où l'espace de départ et d'arrivée ne sont pas les mêmes. C'est le cas lorsqu'on travaille avec des procédés d'acquisition d'images ou de signaux plus complexes, comme l'imagerie par résonance magnétique (IRM). Ceci permet aussi de considérer des cas où la donnée u_0 à reconstruire vit appartient à un espace de dimension infini, représentant par exemple une fonction continue. Notons aussi au passage qu'il existe d'autres modèles de bruit

Dans beaucoup de cas, l'opérateur A n'est pas inversible, ou bien ses valeurs propres très petites si bien que l'inversion pure et simple conduirait à faire exploser le bruit. On parle alors de **problème inverse mal posé**. Pour proposer une solution raisonnable à un problème mal posé, une possibilité est d'ajouter une information a priori sur la solution, modélisée par une fonction de régularisation, ce que nous aborderons dans le paragraphe suivant.

2 Régularisation et débruitage

Pour retrouver u_0 à partir de $v = Au_0 + w$, il apparaît naturel de résoudre le problème d'optimisation

$$\underset{u}{\operatorname{Argmin}} \|Au - v\|_2^2.$$

Si A est inversible, on peut voir que l'unique solution est $A^{-1}v = A^{-1}(Au_0 + w)$. Lorsque A n'est pas inversible, il peut exister plusieurs solutions, et parmi celles-là, on peut chercher à en privilégier une qui soit plus "régulière" que les autres.

Pour cela, on se fixe une fonction de régularisation R , et on résout alors

$$\underset{u}{\operatorname{Argmin}} \frac{1}{2} \|Au - v\|_2^2 + R(u).$$

Dans ce problème, on distingue bien le premier terme $\|Au - v\|_2^2$ est appelé *attache aux données*, et le deuxième terme $R(u)$ est appelé *régularisation*. La fonction R doit être choisie de façon à imposer une certaine régularité à la fonction v . Par conséquent, elle contiendra souvent des termes en lien avec l'énergie des dérivées. Selon la forme de R , il sera plus ou moins facile de montrer que ce problème d'optimisation admet une solution, qu'elle est unique. De plus, en dehors de cas très particuliers, ce problème n'admet pas une solution explicite (c'est-à-dire écrite avec une formule simple à partir de u). Pour certaines régularisations R , la conception et l'étude d'algorithmes permettant d'approcher la solution ont constitué des problématiques de recherche actives récentes (notamment depuis les années 1990).

Une première étape consiste alors à comprendre l'effet de cette régularisation pour le problème de débruitage, c'est-à-dire lorsque $A = \operatorname{Id}$. On doit alors résoudre

$$\underset{v}{\operatorname{Argmin}} \frac{1}{2} \|u - v\|_2^2 + R(v),$$

ce qui revient à calculer l'opérateur proximal de R au point u (voir cours "Modélisation Images").

2.1 Régularisation de Tychonov

Une première façon de régulariser l'image est de faire en sorte qu'il y ait peu d'énergie dans ses dérivées. Pour cela, on considère

$$R(u) = \lambda \|\nabla u\|_2^2$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre, et où $\nabla u = (\partial_1 u, \partial_2 u)$. Avec cette régularisation, dite de Tychonov, le problème de débruitage se réécrit

$$\underset{u}{\operatorname{Argmin}} \frac{1}{2} \|u - v\|_2^2 + \lambda \|\nabla u\|_2^2.$$

Les opérateurs de dérivation discrète d'ordre 1 sont calculées ici par

$$\begin{cases} \partial_1 u(x, y) &= u(x+1, y) - u(x, y) \\ \partial_2 u(x, y) &= u(x, y+1) - u(x, y) \end{cases} .$$

Avec des conditions de bords périodiques, ce sont des opérateurs de convolution associés respectivement aux noyaux

$$k_1 = \delta_{(-1,0)} - \delta_{(0,0)} , \quad \text{et} \quad k_2 = \delta_{(0,-1)} - \delta_{(0,0)} .$$

On notera alors $\nabla u(x, y) = (\partial_1 u(x, y), \partial_2 u(x, y))$. Pour une telle fonction à valeur vectorielle, on définit

$$\|\nabla u\|_2^2 = \|\partial_1 u\|_2^2 + \|\partial_2 u\|_2^2 = \sum_{(x,y) \in \Omega} |\partial_1 u(x, y)|^2 + |\partial_2 u(x, y)|^2 .$$

On notera que l'hypothèse de périodicité n'intervient que dans le calcul des dérivées sur le bord du domaine de l'image (autrement dit, lorsque (x, y) est au bord, on décide que l'on prolonge l'image par périodicité).

Théorème 1. Soient $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_M \times \mathbb{Z}_N}$ et $\lambda > 0$. La fonction $F : \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_M \times \mathbb{Z}_N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_M \times \mathbb{Z}_N}, \quad F(u) = \frac{1}{2} \|u - v\|_2^2 + \lambda \|\nabla u\|_2^2$$

atteint son minimum en un unique point u_* . De plus, ce u_* peut être calculé explicitement dans le domaine de Fourier par

$$\forall (\xi, \zeta) \in \Omega, \quad \hat{u}_*(\xi, \zeta) = \frac{\hat{v}(\xi, \zeta)}{1 + 2\lambda \hat{L}(\xi, \zeta)} \quad (1)$$

$$\text{où } \hat{L}(\xi, \zeta) = 4 \left(\sin^2 \left(\frac{\pi \xi}{M} \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi \zeta}{N} \right) \right).$$

Démonstration. Il s'agit d'exprimer la fonction F dans le domaine de Fourier à l'aide de la formule de Parseval. D'une part, on a

$$\|u - v\|_2^2 = \frac{1}{MN} \|\hat{u} - \hat{v}\|_2^2 .$$

D'autre part, avec la même formule,

$$\|\partial_1 u\|_2^2 = \|k_1 * u\|_2^2 = \frac{1}{MN} \|\widehat{k_1 * u}\|_2^2 = \frac{1}{MN} \|\hat{k}_1 \cdot \hat{u}\|_2^2 ,$$

et en ajoutant de même l'expression de $\|\partial_2 u\|_2^2$, il vient

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_2^2 &= \frac{1}{MN} \sum_{(\xi, \zeta) \in \Omega} \left(|\hat{k}_1(\xi, \zeta)|^2 + |\hat{k}_2(\xi, \zeta)|^2 \right) |\hat{u}(\xi, \zeta)|^2 \\ &= \frac{4}{MN} \sum_{(\xi, \zeta) \in \Omega} \left(\sin^2 \left(\frac{\pi \xi}{M} \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi \zeta}{N} \right) \right) |\hat{u}(\xi, \zeta)|^2 \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{(\xi, \zeta) \in \Omega} \hat{L}(\xi, \zeta) |\hat{u}(\xi, \zeta)|^2 . \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$2MN \cdot F(v) = \sum_{(\xi, \zeta) \in \Omega} |\hat{u}(\xi, \zeta) - \hat{v}(\xi, \zeta)|^2 + 2\lambda \hat{L}(\xi, \zeta) |\hat{u}(\xi, \zeta)|^2 .$$

où $\hat{L}(\xi, \zeta) \geq 0$. Pour minimiser cette somme, on peut alors minimiser chaque terme indépendamment. Or, pour chaque $(\xi, \zeta) \in \Omega$, en divisant par $1 + 2\lambda \hat{L}(\xi, \zeta) > 0$, on tombe alors sur un problème de barycentre dans \mathbb{C} , dont la solution est unique, exprimée par la formule (1) qui découle du lemme ci-dessous. \square

Lemme 2. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tels que $\alpha + \beta = 1$.

La fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$f(z) = \alpha|z - a|^2 + \beta|z - b|^2$$

atteint son minimum au point $z_* = \alpha a + \beta b$ (et seulement en celui-ci).

Ce point est appelé le barycentre de $((a, \alpha), (b, \beta))$.

Démonstration. Posons $g = \alpha a + \beta b$. Alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \alpha|z - g + g - a|^2 + \beta|z - g + g - b|^2 \\ &= \alpha \left(|z - g|^2 + 2\Re \left(\overline{(z - g)}(g - a) \right) + |g - a|^2 \right) + \beta \left(|z - g|^2 + 2\Re \left(\overline{(z - g)}(g - b) \right) + |g - b|^2 \right) \\ &= (\alpha + \beta)|z - g|^2 + 2\Re \left(\overline{(z - g)}(\alpha(g - a) + \beta(g - b)) \right) + \alpha|g - a|^2 + \beta|g - b|^2 \\ &= |z - g|^2 + \alpha|g - a|^2 + \beta|g - b|^2. \end{aligned}$$

On a donc $f(z) \geq \alpha|g - a|^2 + \beta|g - b|^2$ avec égalité si et seulement si $z = g$. □

Remarque 1. L'image débruitée v_* obtenue dans le théorème précédent est en fait un filtrage de u par un filtre h_λ défini par

$$\forall (\xi, \zeta) \in \Omega, \quad \hat{h}_\lambda(\xi, \zeta) = \frac{1}{1 + 2\lambda \hat{L}(\xi, \zeta)} = \frac{1}{1 + 8\lambda \left(\sin^2 \left(\frac{\pi\xi}{M} \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi\zeta}{N} \right) \right)}.$$

Étant donné que $\sin t \sim t$ au voisinage de 0, on s'autorisera à interpréter le dénominateur comme une version périodique de $1 + \lambda(\xi^2 + \zeta^2)$. Par conséquent, h_λ est un filtre passe-bas, qui atténue d'autant plus les hautes fréquences que λ est grand. On montre sur la Fig. 1 des résultats obtenus avec ce filtrage. Ce filtre est parfois référencé également en tant que filtrage de Wiener (c'est une sorte de filtre statistique, basée sur la connaissance de la densité spectrale du signal, inconnu, ici supposée proportionnelle à $\frac{1}{\|\xi\|^2}$). On verra en TP que le réglage du paramètre λ consiste à trouver un compromis entre le bruit de l'image et le flou introduit par la régularisation.

2.2 Compression et Approximation

Pour aborder une autre régularisation, faisons un détour par la problématique de la compression d'images, où l'on va chercher à résumer l'information dans l'image u par une quantité de données la plus petite possible.

Pour cela, considérons la formule de reconstruction provenant de la DFT inverse

$$u = \sum_{\xi \in \Theta} \hat{u}(\xi) e_\xi$$

où (e_ξ) est la base de Fourier discrète et où Θ est le domaine fréquentiel $M \times N$ centré en 0. Cette somme s'apparente la somme partielle de la série de Fourier, qui va converger d'autant plus vite que $\hat{u}(\xi)$ tend vers 0 lorsque ξ grandit. On peut donc suggérer une approximation de u par

$$L_\theta u = \sum_{\xi \in \theta} \hat{u}(\xi) e_\xi$$

où $\theta \subset \Theta$ est un rectangle de taille $m \times n$ centré en 0. Puisque θ ne dépend pas de u , on peut voir que l'application L_θ est linéaire. C'est pourquoi on parlera dans ce cas d'**approximation linéaire**. En fait, on peut voir que $L_\theta u$ est la solution de

$$\operatorname{Argmin}_{v \in \mathbb{R}^\Omega, \operatorname{Supp}(\hat{v}) \subset \theta} \frac{1}{2} \|u - v\|_2^2.$$



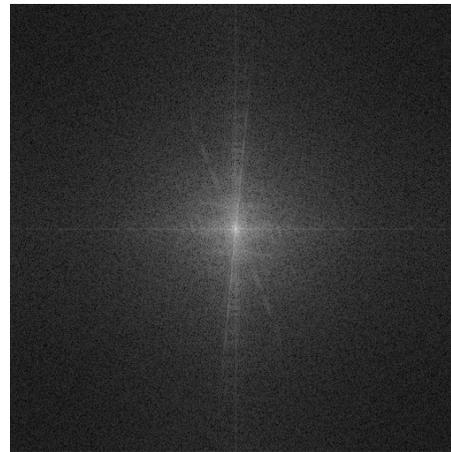
u_0



u



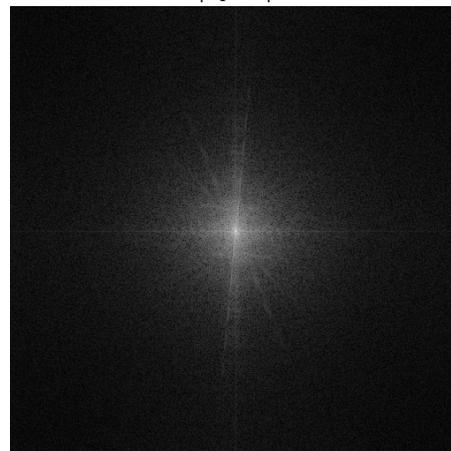
$h_1 * u$



$|\widehat{h_1 * u}|$



$h_5 * u$



$|\widehat{h_5 * u}|$

FIGURE 1 – **Débruitage par le filtre de Wiener.** Sur la première ligne, on montre une image propre u_0 et une image u (même image que u_0 avec un bruit gaussien d'écart-type 10 %). Sur les lignes suivantes, on montre les résultats de débruitage obtenus par le filtre de Wiener $h_\lambda * u$, accompagnés de leur spectre centré. Dans la deuxième ligne, on a pris $\lambda = 1$ et dans la troisième $\lambda = 5$ (remarquer que les hautes fréquences du spectre sont d'autant plus atténuées que λ est grand). On voit sur cette figure qu'il convient de régler le paramètre λ de façon à réaliser un compromis entre le bruit et le flou.

Mais il y a une manière plus astucieuse de procéder ! Au lieu de décider à l'avance que l'on conserve les coefficients sur un domaine centré en zéro, on peut décider de se concentrer sur les endroits du spectre qui concentrent l'énergie. Étant donné $\mu > 0$, on pourra donc définir

$$\theta_\mu = \{ \xi \in \Theta \mid |\hat{u}(\xi)| \geq \mu \},$$

et à approcher u par

$$T_\mu u = \sum_{\xi \in \theta_\mu} \hat{u}(\xi) e_\xi.$$

Autrement dit, dans la TFD, on ne conserve que les valeurs dont le module est $\geq \mu$; on dit qu'on pratique un *seuillage*. Cette opération est illustrée en Fig. 2. On peut voir que l'application $u \mapsto T_\mu u$ n'est plus linéaire parce que le choix des fréquences conservées dépend de u . On parle donc ici d'un procédé d'**approximation non-linéaire**.

Ce principe d'approximation est à la base de la compression JPEG, qui est un format de fichier images très répandu. Plus précisément, la compression JPEG consiste à utiliser la méthode d'approximation TFD précédente sur des imagerie. L'image est en effet décomposée en blocs de taille 8×8 , et sur chaque bloc on pratique une approximation par seuillage de la TFD. On gardera en tête qu'en plus de cette bonne approximation, l'efficacité de JPEG (en termes de volume de fichier) provient aussi du fait qu'une technique très fine de stockage de l'information est pratiquée pour les coefficients conservés (on renvoie à la page Wikipedia associée si vous désirez plus d'informations à ce sujet).

2.3 Régularisation parcimonieuse

On va maintenant faire le lien entre l'opération de seuillage vue dans le paragraphe précédent et une fonction de régularisation explicite.

Introduisons une nouvelle base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_d)$ de l'espace vectoriel \mathbb{C}^Ω , et notons B^* la matrice de changement de base. On va supposer que \mathcal{E} est une base orthonormée, c'est-à-dire que la matrice B est unitaire : $B^* B = I_d$. Pour un vecteur $u \in \mathbb{C}^\Omega$, si l'on note $\alpha = Bu$ les coordonnées de u dans la nouvelle base, on a alors

$$\|u\|_2^2 = \|Bu\|_2^2 = \sum_{j=1}^d |\alpha_j|^2 = \|\alpha\|_2^2.$$

On va alors utiliser une autre norme, dite ℓ^0 définie pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^d$ par

$$\|\alpha\|_0 = |\text{Supp}(\alpha)| = \sum_{j=1}^d \mathbf{1}_{\alpha_j \neq 0}.$$

On peut alors définir une nouvelle fonction de régularisation R par

$$\forall u \in \mathbb{R}^\Omega, \quad R(u) = \lambda \|Bu\|_0.$$

Ceci donne une autre façon de débruiter l'image v en résolvant

$$\underset{u \in \mathbb{C}^\Omega}{\text{Argmin}} \frac{1}{2} \|u - v\|_2^2 + \lambda \|Bu\|_0.$$

Le théorème suivant donne la solution explicite de ce problème.

Théorème 3. Soit $v \in \mathbb{C}^\Omega$ et $\mu > 0$ fixés. Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_d)$ une base orthonormée de \mathbb{C}^Ω de matrice B^* . Le problème

$$\underset{u \in \mathbb{C}^\Omega}{\text{Argmin}} \frac{1}{2} \|u - v\|_2^2 + \frac{\mu^2}{2} \|Bu\|_0$$

admet une solution notée $T_\mu v$, et définie par ses coordonnées dans la base \mathcal{E} :

$$\forall j \in [1 : d], \quad (BT_\mu v)_j = (Bv)_j \mathbf{1}_{|(Bv)_j| \geq \mu}.$$

L'opération T_μ est appelée "seuillage dur" (hard thresholding) des coefficients dans la base \mathcal{E} au seuil μ .

Démonstration. Notons $\alpha = Bu$ et $\beta = Bv$ les coordonnées de u, v dans la base \mathcal{E} respectivement. Le problème se réécrit alors

$$\|u - v\|_2^2 + \mu^2 \|Bu\|_0 = \sum_{j=1}^d |\alpha_j - \beta_j|^2 + \mu^2 \mathbf{1}_{\beta_j \neq 0} = \sum_{j=1}^d f_{\alpha_j}(\beta_j)$$

où la fonction f_a est définie par $f_a(z) = |a - z|^2 + \mu^2 \mathbf{1}_{z \neq 0}$. On peut donc minimiser séparément les termes de la somme précédente, ce qui revient à trouver le minimum de f_a . On voit alors que sur \mathbb{C}^* , $f_a(z) = |a - z|^2 + \mu^2$ atteint son minimum μ^2 en $z = a$, alors que $f_a(0) = |a|^2$. Il suffit donc de comparer ces deux valeurs pour trouver si f_a atteint son minimum en a ou en 0 : si $|a| \geq \mu$, le minimum est atteint en a , et si $|a| < \mu$, le minimum est atteint en 0 . Une solution du problème ci-dessus est donc obtenue par $\beta_j = \alpha_j \mathbf{1}_{|\alpha_j| \geq \mu}$. \square

Un inconvénient majeur de la régularisation basée sur la norme ℓ^0 est que la fonction $\|\cdot\|_0$ n'est ni différentiable, ni convexe. Par conséquent, elle échappe à de nombreux résultats standards d'optimisation. Pour cette raison, on préfère souvent travailler avec la norme ℓ^1 définie par

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}^d, \quad \|\alpha\|_1 = \sum_{j=1}^d |\alpha_j|.$$

La norme ℓ^1 a l'avantage d'être convexe. De plus, le théorème précédent s'adapte, pour faire le lien entre la régularisation ℓ^1 et un autre type de seuillage.

Théorème 4. Soit $v \in \mathbb{R}^\Omega$ et $\lambda > 0$ fixés. Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_d)$ une base orthonormée de \mathbb{R}^Ω de matrice B^* . Le problème

$$\underset{u \in \mathbb{R}^\Omega}{\text{Argmin}} \frac{1}{2} \|u - v\|_2^2 + \lambda \|Bu\|_1$$

admet une solution notée $S_\mu v$, et définie par ses coordonnées dans la base \mathcal{E} :

$$\forall j \in [1 : d], \quad (BS_\mu v)_j = \text{sgn}((Bv)_j) ((Bv)_j - \lambda)_+.$$

L'opération S_μ est appelée "seuillage doux" (soft thresholding) des coefficients dans la base \mathcal{E} au seuil μ .

2.4 Régularisation par variation totale

On peut aussi considérer d'autres fonctions de régularisation plus compliquées, comme par exemple, la variation totale définie¹

$$\text{TV}(u) = \|\nabla u\|_1 = \sum_{(x,y) \in \Omega} \|\nabla u(x,y)\| = \sum_{(x,y) \in \Omega} \sqrt{(\partial_1 u(x,y))^2 + (\partial_2 u(x,y))^2}.$$

Ceci mène au débruitage par variation totale, solution de

$$\underset{u \in \mathbb{R}^\Omega}{\text{Argmin}} \frac{1}{2} \|u - v\|_2^2 + \lambda \text{TV}(u).$$

Ce nouveau débruitage favorise des images dites *cartoon*, c'est-à-dire lisses par morceaux, avec des discontinuités nettes. Mais il est plus difficile à calculer car ce dernier problème d'optimisation n'a en général pas de solution explicite. De plus, une difficulté liée à la variation totale est qu'elle n'est pas lisse : la fonction $u \mapsto \text{TV}(u)$ n'est pas différentiable. La résolution des problèmes d'optimisation correspondants nécessitent donc des outils d'optimisation avancés.

1. On parle de variation totale pour désigner la norme ℓ^1 du gradient. Cependant, il reste différents choix possibles sur la norme de \mathbb{R}^2 utilisée pour calculer $\|\nabla u(x,y)\|$. Ici on utilise la norme euclidienne.

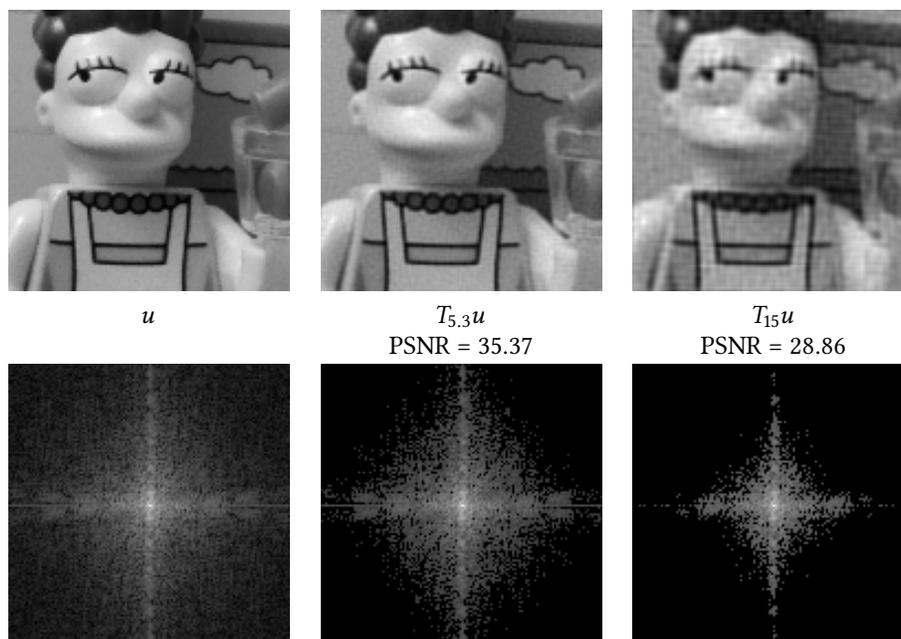


FIGURE 2 – **Compression par seuillage de la transformée de Fourier.** On montre en haut l'image originale et les images $T_\mu u$ obtenues par seuillage dur de la DFT, avec deux niveaux de seuil $\mu = 5.3$ et $\mu = 15$ conduisant à annuler 70% et 90% des coefficients, respectivement. On montre en bas les spectres correspondants. Dans la compression JPEG, ce procédé de seuillage est appliqué sur chaque bloc 8×8 .

2.5 Un critère d'erreur sur la restauration

Pour comparer des résultats de restauration d'images v en connaissant l'image propre u_0 , on peut utiliser différentes mesures quantitatives. La première mesure est le RMSE pour *Root Mean Square Error* qui est simplement la norme euclidienne renormalisée

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{MN} \|u_0 - v\|_2^2} = \left(\frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} (u_0(x, y) - v(x, y))^2 \right)^{1/2}.$$

Cette mesure est parfois remise à une autre échelle, plus parlante pour les traiteurs de signaux et d'images, appelée PSNR pour *Peak Signal to Noise Ratio*. Il se calcule via

$$\text{PSNR} = 20 \log_{10} \left(\frac{\text{MAX}}{\text{RMSE}} \right).$$

La valeur MAX doit être ajustée suivant la valeur maximale atteignable par l'image. On prend souvent $\text{MAX} = 255$ pour des images quantifiées sur 256 niveaux de gris, ou 1 pour des images à valeurs dans $[0, 1]$, ou encore $\max u_0$. On peut choisir n'importe quelle convention si l'on compare des débruitages de la même image u_0 . Par contre, si on travaille sur plusieurs images différentes, on prendra garde à bien préciser la convention choisie pour MAX dans le calcul des PSNR. Il existe aussi d'autres mesures de qualité qui reflète bien mieux la qualité perçue par l'humain (notamment l'indice SSIM pour *Structural Similarity Metric* que l'on ne décrira pas ici).