Échantillonnage

Arthur Leclaire

Définition 1. Échantillonner une fonction continue $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ avec un pas $s > 0$, c'est considérer les valeurs de f sur la grille régulière $s\mathbb{Z}^d$, c'est-à-dire la suite $E_s f = (f(sn))_{n\in\mathbb{Z}^d}$.

Dans ce cours, on va voir que sous une hypothèse portant sur le spectre de f, on peut retrouver la fonction f à partir de son échantillonnage $E_s f$, avec une formule de reconstruction explicite. Commençons par quelques rappels.

On rappelle que la transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi\cdot x} dx$$

et que la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ s'étend à $L^2(\mathbb{R}^d)$ en une application linéaire bijective $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$. Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on notera encore $\hat{f} = \mathcal{F}f$, qui vérifie $\|\hat{f}\|_2 = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \|f\|_2$.

Par ailleurs, on rappelle que, par définition, le support d'une fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, noté $\mathrm{Supp}(f)$ est le complémentaire du plus grand ouvert où f s'annule presque partout. Ainsi, dire que $\mathrm{Supp}(f) \subset A$ signifie que $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in A$ (et donc, dire que f est à support compact signifie qu'il existe un compact K tel que l'on ait $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus K$).

Dans tout ce cours, on aura besoin de la fonction sinus cardinal définie par $\mathrm{sinc}(0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x} .$$

On définira aussi le sinus cardinal en base π en posant $\mathrm{sincp}(x) = \mathrm{sinc}(\pi x)$. On rappelle qu'on a vu en TD que sincp est la transformée de Fourier inverse de $\mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}$, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sincp}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi x} d\xi .$$

Dans ce cours, on manipulera des fonctions dont la transformée de Fourier est à support compact, et qui sont donc très régulières, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $K = \mathrm{Supp}(\hat{f})$ est compact.*

Alors f coïncide presque partout avec une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$: pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_K \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi .$$

Démonstration. Comme $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. De plus, comme $\hat{f}$ est supportée par K compact, on a $\hat{f} \in L^2(K) \subset L^1(K)$. On peut donc définir

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_K \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

ce qui donne une fonction continue $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$. Mieux : par dérivation sous l'intégrale, on voit immédiatement que g est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \partial^\alpha g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_K \hat{f}(\xi)(i\xi)^\alpha e^{i\xi x} d\xi.$$

En effet, on peut voir aisément que $\xi \mapsto \hat{f}(\xi)\xi^\alpha$ est encore $L^1(K)$, ce qui permet de dériver sous l'intégrale. Par ailleurs, comme $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, la construction de g revient exactement à poser $g = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})$. Par conséquent, g est une fonction $L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathcal{F}f = \mathcal{F}g$, et donc $f = g$ presque partout. □

1 Le théorème d'échantillonnage de Shannon

1.1 Échantillonnage avec spectre $L^2(\pi,\pi)$

Théorème 1. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que* $\operatorname{Supp}(\hat{f}) \subset [\pi,\pi]$. *On identifie f à son représentant continu.*
Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\operatorname{sincp}(x-n)$$

où $\sum_{n\in\mathbb{Z}}$ signifie $\lim_{N\to\infty}\sum_{|n|\leqslant N}$, *et où la convergence a lieu uniformément sur $\mathbb{R}$, et aussi dans $L^2(\mathbb{R})$.*

Démonstration. On note $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ la fonction obtenue par prolongement par 2π-périodicité de $\hat{f} \in L^2(-\pi,\pi)$. La proposition précédente permet d'écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi x}\hat{f}(\xi)d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi x}\varphi(\xi)d\xi\ .$$

Mais alors, $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ est développable en série de Fourier :

$$\varphi(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi)e^{in\xi}$$

avec convergence de la série dans $L^2(\mathbb{T})$. Autrement dit, en notant

$$S_N\varphi(\xi) = \sum_{|n|\leqslant N} c_n(\varphi)e^{in\xi} = \sum_{|n|\leqslant N} c_{-n}(\varphi)e^{-in\xi}\ ,$$

on a $S_N\varphi \to \varphi$ dans $L^2(\mathbb{T})$ quand $N\to\infty$. Il en résulte que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi x}S_N\varphi(\xi)d\xi = \lim_{N\to\infty}\sum_{|n|\leqslant N} c_{-n}(\varphi)\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi(x-n)}\frac{d\xi}{2\pi} = \lim_{N\to\infty}\sum_{|n|\leqslant N} c_{-n}(\varphi)\operatorname{sincp}(x-n)\ .$$

On termine en remarquant que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_{-n}(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\xi)e^{in\xi}d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{f}(\xi)e^{in\xi}d\xi = f(n)\ .$$

Mieux :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f(x) - \sum_{|n|\leqslant N} c_{-n}(\varphi)\operatorname{sincp}(x-n)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi x}(\varphi(\xi) - S_N\varphi(\xi))d\xi\right| \leqslant \|\varphi - S_N\varphi\|_2$$

qui tend vers 0 quand $N\to\infty$, d'où la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Pour la convergence dans $L^2(\mathbb{R})$, on peut écrire, dans $L^2(\mathbb{R})$,

$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi)\mathbf{1}_{[\pi,\pi]}(\xi) = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(-n)e^{in\xi}\right)\mathbf{1}_{[\pi,\pi]}(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)e^{-in\xi}\widehat{\operatorname{sincp}}(\xi)$$

et donc, par continuité de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$,

$$\hat{f} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\widehat{\operatorname{sincp}(\cdot - n)} = \mathcal{F}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\operatorname{sincp}(\cdot - n)\right)\ .$$

On applique alors la transformée de Fourier inverse, qui est aussi continue sur $L^2(\mathbb{R})$, ce qui donne l'égalité désirée, avec convergence de la série dans $L^2(\mathbb{R})$. ◻

On remarquera bien que la preuve précédente consiste essentiellement à considérer la série de Fourier associée à la périodisation de $\hat{f}$, et à montrer que les coefficients de Fourier associés sont les $f(-n)$. Inversement, on peut partir d'une suite de valeurs désirées aux points entiers, comme on le fait dans la proposition suivante.

Proposition 2. *Soit $(a_n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Alors on peut définir*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \mathrm{sincp}(x-n)$$

ce qui donne une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ qui vérifie $f(n) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Pour trouver une telle fonction f, la preuve du théorème ci-dessus donne l'idée de construire une fonction g (qui correspondra à $\hat{f}$), en définissant

$$g(\xi) = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{-in\xi} \right) \mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}(\xi) \,,$$

la convergence dans $L^2(-\pi,\pi)$ étant garantie par le fait que $(a_n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et que $(e^{in\xi})$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$. La formule des coefficients de Fourier donne

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi n} g(\xi) d\xi \,.$$

Mais alors, la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi x} g(\xi) d\xi$$

vérifie bien $f(n) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En fait, on vient de définir $f = \mathcal{F}^{-1}(g)$, et en reprenant le calcul comme dans la preuve du théorème précédent, on obtient bien la formule désirée avec les $\mathrm{sincp}(x-n)$.

Remarque 1. Ainsi, on a montré que l'application d'échantillonnage sur $\mathbb{Z}$ définie par

$$\begin{array}{cccc} E_1 & : & \mathcal{F}^{-1}(L^2(-\pi,\pi)) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ & & f & \longmapsto & (f(n))_{n \in \mathbb{Z}} \end{array}$$

est bijective et on a donné explicitement l'inverse. À noter aussi que les formules de Plancherel et Parseval donnent, en reprenant les notations de la preuve, que pour $f \in \mathcal{F}^{-1}(L^2(-\pi,\pi))$,

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(\xi)|^2 d\xi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\varphi)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)|^2 \,,$$

et donc $E_{\mathbb{Z}}$ est aussi une isométrie.

1.2 Échantillonnage avec spectre $L^1(\pi,\pi)$

Théorème 2. *Soit f une fonction s'écrivant comme transformée de Fourier inverse d'une fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que* $\mathrm{Supp}(g) \subset [\pi,\pi]$, *c'est-à-dire,*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\xi) e^{i\xi x} d\xi \,.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A_n f(x)$$

où l'on a définit $A_N f(x) = \sum_{|n| \leqslant N} f(n) \mathrm{sincp}(x-n)$. Autrement, on a convergence ponctuelle au sens de Cesàro de la série $\sum f(n) \mathrm{sincp}(x-n)$, vers f. De plus, la convergence au sens de Cesàro est uniforme sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. On commence comme dans la preuve du Théorème 1 : on définit $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$ en prolongeant par 2π-périodicité la fonction g, et là encore un calcul direct donne $c_{-n}(\varphi) = f(n)$. Désormais, on n'a pas nécessairement convergence dans $L^2(\mathbb{T})$ de la série de Fourier, mais on a convergence dans $L^1(\mathbb{T})$ au sens de Cesàro. On peut alors repartir de

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi x} S_N\varphi(\xi)d\xi = \sum_{|n|\leqslant N} c_{-n}(\varphi)\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi(x-n)}\frac{d\xi}{2\pi} = \sum_{|n|\leqslant N} c_{-n}(\varphi)\mathrm{sincp}(x-n) = A_N f(x)\ .$$

Le théorème de Fejér donne que $S_N\varphi \to \varphi$ dans $L^1(-\pi,\pi)$ au sens de Cesàro, ce qui, en passant à l'intégrale, donne, pour un x fixé, la convergence de $A_N f(x)$ au sens de Cesàro. Et là encore, on peut écrire

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f(x) - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} A_n f(x)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi x}(\varphi(\xi) - \sigma_N\varphi(\xi))d\xi\right| \leqslant \|\varphi - \sigma_N\varphi\|_1$$

où $\sigma_N\varphi$ est la somme de Fejér associée à φ. □

1.3 Échantillonnage et périodisation du spectre

Lorsque $\hat{f}$ est une fonction L^1 à support dans $[-\pi,\pi]$, le prolongement de f par 2π-périodicité (noté φ dans les preuves précédentes) peut aussi s'écrire

$$\varphi(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi - 2n\pi)\ .$$

Lorsque l'on relâche la contrainte de support, on peut encore donner un sens à cette périodisation, dans laquelle les différents lobes translatés $\hat{f}(\cdot - 2n\pi)$ peuvent maintenant s'intersecter. La formule sommatoire de Poisson permet de conserver le lien entre les coefficients de Fourier de φ et la fonction f. Il en existe plusieurs versions, et nous en donnons deux ci-dessous.

Proposition 3 (Formule sommatoire de Poisson)**.** *Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$ à support compact. La fonction*

$$\varphi(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(\xi - 2n\pi)$$

est bien définie 2π-périodique et $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\hat{g}(-n)$.

Corollaire 1. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f}$ est à support compact. On identifie f à son représentant continu.*

Alors, la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\mathrm{sincp}(x-n)$$

est dans $L^2(\mathbb{R})$ et sa transformée de Fourier est donnée par

$$\hat{g}(\xi) = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi - 2n\pi)\right)\mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}(\xi)\ .$$

Démonstration. Là encore, on définit dans $L^2(-\pi,\pi)$,

$$\varphi(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi - 2n\pi)$$

dont les coefficients de Fourier valent, par la proposition précédente, et par inversion de Fourier sur L^2,

$$c_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\hat{\hat{f}}(-n) = f(n)$$

Là encore, en notant $S_N\varphi$ la somme partielle de la série de Fourier de φ, on a donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi x} S_N\varphi(\xi)d\xi = \sum_{|n|\leqslant N} f(n)\mathrm{sincp}(x-n)\ .$$

□

Lorsque le support de $\hat{f}$ est inclus dans $[-\pi, \pi]$, on récupère bien $\hat{f}(\xi)$ en multipliant la périodisation φ par l'indicatrice de $[-\pi, \pi]$. En revanche, lorsque le support dépasse de $[-\pi, \pi]$, l'interpolation par sinus cardinal contient aussi les répliques $\hat{f}(\xi - 2n\pi)$ de $\hat{f}$, et ainsi une fréquence $\xi \in \mathbb{R}$ pourra être repliée sur une autre fréquence $\xi - 2n\pi \in [-\pi, \pi]$; c'est ce qu'on appelle le phénomène de repliement de spectre, ou *aliasing* en anglais.

Au passage, donnons aussi une autre version de la formule sommatoire de Poisson, qui n'est pas soumise à l'hypothèse de spectre à support compact.

Proposition 4 (Formule sommatoire de Poisson)**.** *Soit $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. La fonction*

$$\varphi(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(\xi - 2n\pi)$$

est bien définie 2π-périodique et $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\hat{g}(-n)$, et plus précisément,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n) e^{in\xi} \ .$$

1.4 Échantillonnage de polynômes trigonométriques

Proposition 5. *Soit f un polynôme trigonométrique sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{|p| \leqslant P} c_p(f) e^{ipx} \ .$$

On considère l'échantillonnage $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ calculé sur $\frac{2\pi}{N}\mathbb{Z}$ avec $N > 2P$: $u(n) = f\left(2\pi \frac{n}{N}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{|p| \leqslant P} \frac{\hat{u}(p)}{N} e^{ipx}$$

où $\hat{u} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ est la TFD de u. Autrement dit, pour un tel polynôme trigonométrique f, le coefficient de Fourier peut être calculé via la transformée de Fourier discrète :

$$\forall p \in [-P : P], \quad c_p(f) = \frac{\hat{u}(p)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-2i\pi \frac{pn}{N}} \ .$$

De plus, on a

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{2\pi y}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \frac{1}{N} D_P \left(\frac{2\pi(y-n)}{N}\right)$$

où D_p est le noyau de Dirichlet.

Proposition 6. *Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$ telle que $c_n(f) = O(\frac{1}{|n|^\alpha})$ avec $\alpha > 1$.*

Notons $u(n) = f(2\pi \frac{n}{N})$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\hat{u}(p)}{N} = \sum_{q \in \mathbb{Z}} c_{p+qN}(f) \ .$$

1.5 Échantillonnage avec pas $s \neq 1$ et en toute dimension

Les résultats précédents s'adaptent avec un pas d'échantillonnage $s \neq 1$: échantillonner la fonction avec un pas $s > 0$ revient à périodiser le spectre avec une période $\frac{2\pi}{s}$. Ceci est dû au résultat suivant, qui exprime la transformée de Fourier, après changement de variable $y = \frac{x}{s}$.

Proposition 7. *Soit f dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ ou $L^2(\mathbb{R}^d)$. Définissons $f(x) = g(\frac{x}{s})$. Alors $\hat{f}(\xi) = s^d \hat{g}(s\xi)$.*

Démonstration. Pour $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et un changement de variable donne que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} g\left(\frac{x}{s}\right) e^{-i\xi x} dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) e^{-i\xi s y} s^d dy = s^d \hat{g}(s\xi) \ .$$

Si maintenant on a $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, il existe une suite (g_n) dans $L^1 \cap L^2$ qui converge vers g dans L^2, et on a alors aussi que $f_n(x) := g_n(\frac{x}{s})$ converge vers $g(x) = g(\frac{x}{s})$ dans L^2. L'égalité précédente donne le lien entre g_n et f_n, qui en passant à la limite, donne le même lien entre g et f. □

Théorème 3. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Supp}(\hat{f}) \subset [-\frac{\pi}{s}, \frac{\pi}{s}]$. Alors*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(sn) \mathrm{sincp}\left(\frac{x}{s} - n\right) \ ,$$

où la série converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et dans $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration. En définissant $g(y) = f(sy)$, on voit avec la proposition précédente que

$$\mathrm{Supp}(\hat{g}) = \mathrm{Supp}\left(\hat{f}\left(\frac{\cdot}{s}\right)\right) = s\mathrm{Supp}(\hat{f}) \subset [-\pi, \pi] \ .$$

On peut donc appliquer à g le théorème d'échantillonnage ci-dessus :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad g(y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) \mathrm{sincp}(y - n)$$

et on obtient la formule désirée en remplaçant. □

De même, les résultats précédents s'étendent en dimension supérieure. Pour cela, on étendra la définition du sinus cardinal à $\mathbb{R}^d$ en faisant le produit coordonnées par coordonnées :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \mathrm{sincp}(x) = \mathrm{sincp}(x_1) \dots \mathrm{sincp}(x_d) \ ,$$

de sorte que $\mathrm{sincp} = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{[-\pi,\pi]^d})$.

Les preuves des résultats précédents s'adaptent alors à $\mathbb{R}^d$. On obtient par exemple :

Théorème 4. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f}$ soit à support compact. Alors la fonction*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(n) \mathrm{sincp}(x - n)$$

est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et sa transformée de Fourier est donnée par

$$\hat{g}(\xi) = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(\xi - 2n\pi)\right) \mathbf{1}_{[-\pi,\pi]^d}(\xi) \ .$$

Là encore, on voit apparaître dans le spectre de cette reconstruction par sinus cardinal toutes les translatées $\hat{f}(\cdot - 2n\pi)$ de $\hat{f}$. Ceci aide à comprendre le phénomène de repliement spectral en dimension supérieure.

2 Échantillonnage et Interpolation

2.1 Échantillonnage et capteurs physiques

Un système d'acquisition numérique consiste à mesurer un signal physique continu à l'aide d'un capteur et à en extraire une suite de valeurs numériques pouvant être stockée et traitée informatiquement. En général, un système d'acquisition contient plusieurs composants qui vont avoir tendance à moyenner le signal localement, et à l'échantillonner sur une grille $s\mathbb{Z}^d$. Par exemple, un microphone et un convertisseur numérique permettent d'enregistrer un signal sonore continu $f(t)$ dépendant du temps sous la forme d'échantillons

$$u(x) = f(xs)$$

avec une fréquence d'échantillonnage $\frac{1}{s}$ (qui est souvent de 44.1 kHz).

De même, le capteur CCD d'un appareil photo permet d'acquérir une image en échantillonnant une fonction continue $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ sur une grille régulière

$$\forall x \in \mathbb{Z}^2, \quad u(x_1, x_2) = f(sx_1, sx_2) \ ,$$

le paramètre s définissant alors la taille d'une cellule du capteur.

Dans beaucoup de systèmes d'acquisition, l'un des composants opèrent un filtrage passe-bas, c'est-à-dire que le signal f échantillonné s'écrit en fait $f = k * f_0$ où k est une fonction intégrable d'intégrale 1. Par exemple, pour un appareil photo, l'image traversant l'objectif est soumise à la foi à un flou de diffraction et à un flou de défocalisation, modélisables par des convolutions par des noyaux qu'on peut expliciter. Même si ces noyaux n'ont pas un spectre à support compact, $\hat{k}$ décroît suffisamment vite pour qu'on puisse considérer que $\hat{k}$ coupe les fréquences hors d'un cube $[-\frac{\pi}{s}, \frac{\pi}{s}]^d$ ce qui permet d'échantillonner sur la grille $s\mathbb{Z}^d$.

2.2 Interpolation

Dans l'autre sens, le problème d'interpolation est le suivant : en partant d'une collection $(x_k)_{k\in K}$ de positions distinctes dans un domaine continu $D \subset \mathbb{R}^d$ et de valeurs prescrites $(u_k)_{k\in K}$, on cherche une fonction $f : D \to \mathbb{C}$ telle que

$$\forall k \in K, \quad f(x_k) = u_k \ .$$

La collection (x_k, u_k) peut être finie ou infinie. Dans le cas fini, les x_k peuvent constituer par exemple une subdivision régulière (ou irrégulière) d'un intervalle $[a, b]$; il existe alors de multiples solutions pour interpoler ces valeurs (par exemple, les polynômes interpolateurs de Lagrange), qui vont avoir différentes propriétés de régularité ou d'approximation.

Ici, on va se focaliser sur l'interpolation de valeurs définies sur une grille discrète, de pas $s = 1$ (pour simplifier les calculs). Autrement dit, partant de u définie sur $\mathbb{Z}^d$ (ou une partie de $\mathbb{Z}^d$), on va proposer une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ qui interpole les valeurs connues de u. On s'inspire alors du théorème de Shannon qui, à partir d'un signal échantillonné $E_s f = f_{s\mathbb{Z}^d}$, propose une reconstruction continue, qui est exactement compatible avec f pour peu que $\hat{f}$ soit à support compact.

2.2.1 Cas des signaux 1D

Définition 2. Soit $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire que $(u(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de nombres complexes telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u(n)|^2 < \infty$. On appelle *interpolation de Shannon* de u la fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n) \mathrm{sincp}(x - n),$$

où la série converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et dans $L^2(\mathbb{R})$.

Définition 3. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$. On note $\Theta = \mathbb{Z} \cap [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}[$. L'interpolation de Shannon périodique de u est la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{MN} \sum_{\xi\in\Theta} \hat{u}(\xi) e^{2i\pi\frac{\xi x}{N}} \ ,$$

où $\hat{u}$ est la TFD de u.

2.2.2 Cas des images

Considérons une image $u : \Omega \to \mathbb{R}$ en niveaux de gris définie sur $\Omega = [0 : M-1] \times [0 : N-1]$ (on pourra adapter ce paragraphe aux images couleurs en traitant les canaux séparément). Si l'on veut appliquer des opérations géométriques à l'image (par exemple, la zoomer, ou appliquer une rotation), on pourra exploiter une version interpolée $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de u.

Dans la suite on étendra u par périodicité à $\mathbb{Z}^2$.

Définition 4. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_M \times \mathbb{Z}_N}$. L'interpolation de u au plus proche voisin est la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = u([x],[y]) \,,$$

où pour $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ désigne l'entier le plus proche de x, c'est-à-dire que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \,]k-0.5, k+0.5], \quad [x] = k \,.$$

Remarque 2. L'interpolation au plus proche voisin consiste essentiellement à considérer un modèle constant par morceaux (on a une valeur sur chaque pixel de taille 1×1).

Définition 5. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_M \times \mathbb{Z}_N}$. L'interpolation bilinéaire de u est la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (k,\ell) \in \mathbb{Z}^2, \forall (\alpha,\beta) \in [0,1]^2,\ f(k+\alpha, \ell+\beta) = (1-\beta)\big((1-\alpha)u(k,\ell)+\alpha u(k+1,\ell)\big)+\beta\big((1-\alpha)u(k,\ell+1)+\alpha u(k+1,\ell+1)\big) \,.$$

Remarque 3. L'interpolation bilinéaire consiste à proposer une fonction f qui, sur chaque carré à coordonnées entières $[k,k+1] \times [\ell, \ell+1]$, coïncide avec un polynôme de deux variables qui coïncide avec u sur les coins. L'avantage de cette interpolation par rapport à la précédente est qu'elle définit une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

Définition 6. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_M \times \mathbb{Z}_N}$. On note $\Theta = \mathbb{Z}^2 \cap [-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}[\times [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}[$, qui est un rectangle de taille $M \times N$. L'interpolation de Shannon périodique de u est la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{(\xi,\zeta) \in \Theta} \hat{u}(\xi,\zeta) \exp\left(2i\pi\Big(\frac{\xi x}{M} + \frac{\zeta y}{N}\Big)\right) \,,$$

où $\hat{u}$ est la TFD 2D de u.

Remarque 4. Ce nouveau procédé consiste à interpoler u par un polynôme trigonométrique en les variables $(\frac{x}{M}, \frac{y}{N})$. L'un des avantages est que cette interpolation f est très régulière : elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. Par contre, pour des images naturelles, f est en général très oscillante, ce qui en pratique peut créer des artefacts visuels désagréables.

Remarque 5. Les interpolations précédentes peuvent par exemple être utilisées pour zoomer l'image. Pour faire simple, supposons que l'on veuille zoomer l'image d'un facteur 2 dans chaque direction. Ceci revient à proposer une image v qui a "le même contenu" que u. Il suffit d'évaluer les interpolées précédentes sur le rectangle $\frac{1}{2}([0 : 2M-1] \times [0 : 2N-1])$ qui est positionné comme $[0 : M-1] \times [0 : N-1]$, mais avec deux fois plus de points. On peut ainsi définir l'image zoomée $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{2M} \times \mathbb{Z}_{2N}}$ par

$$\forall (a,b) \in [0 : 2M-1] \times [0 : 2N-1], \quad v(a,b) = \frac{1}{MN} \sum_{(\xi,\zeta) \in \Theta} \hat{u}(\xi,\zeta) \exp\left(2i\pi\Big(\frac{\xi a}{2M} + \frac{\zeta b}{2N}\Big)\right) \,.$$

Le gros intérêt de cette formule est qu'elle peut se voir comme une TFD inverse sur $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{2M} \times \mathbb{Z}_{2N}}$. Pour l'obtenir, il suffira donc de plonger la TFD de u dans un domaine deux fois plus grand, à multiplier par 2 et à prendre la TFD inverse. Ainsi, cette image zoomée est calculable en $O(MN \log(MN))$ grâce à l'algorithme FFT. Évidemment, c'est plus coûteux que les interpolations au plus proche voisin, ou bilinéaire qui peuvent être calculée localement (et c'est pourquoi ces deux dernières sont largement utilisées en graphisme).