
Transformée de Fourier

Arthur Leclaire

---

1 Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$

Définition 1. La transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi.x} dx \,, \quad \text{où} \quad \xi.x = \xi^t \, x = \sum_{k=1}^{d} \xi_k x_k \,.$$

Proposition 1. *La transformation de Fourier*

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F} & : & L^1(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \mathscr{C}_b(\mathbb{R}^d) \\ & & f & \longmapsto & \hat{f} \end{array}$$

est une application linéaire continue de norme 1 (en munissant $\mathscr{C}_b(\mathbb{R}^d)$ de la norme uniforme $\| \cdot \|_\infty$).

Exemple 1. Soit $a > 0$. On note $f_a = \mathbf{1}_{[-a,a]}$. Alors

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f_a}(\xi) = \begin{cases} 2\dfrac{\sin(a\xi)}{\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Exemple 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-|x|}$. Alors $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \dfrac{2}{1+\xi^2}$.

Exemple 3 (Gaussiennes)**.** Soit $\sigma > 0$. On définit $g_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $g_\sigma \in L^1(\mathbb{R})$ et

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{g_\sigma}(\xi) = e^{-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}} \,.$$

Proposition 2 (Riemann-Lebesgue). *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{f}(\xi) \to 0$ quand $|\xi| \to \infty$.*

Proposition 3 (Lien avec la dérivation).

1. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ avec $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors pout tout $\xi \neq 0$, $\widehat{f'}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$.*
2. *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que la fonction $g : x \mapsto -ixf(x)$ est intégrable. Alors $\hat{f}$ est dérivable et $(\hat{f})' = \hat{g}$.*

Théorème 1. ***Inversion de Fourier*** L^1
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On suppose que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors on a presque partout

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{i\xi.x} d\xi \,.$$

Autrement dit, en notant $\tilde{g}(x) = g(-x)$, on a $f = \frac{1}{(2\pi)^d} \tilde{\hat{\hat{f}}}$.
En particulier, f admet un représentant continu.

Corollaire 1. *$\mathcal{F}$ est injective. Autrement dit, si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ sont telles que $\hat{f} = \hat{g}$ alors $f = g$ p.p.*

2 Convolution

Définition 2. Soient $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ deux fonctions mesurables. Lorsque cela a un sens, on définit la **convolution** $f * g$ de f et g par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy \ .$$

Si cette intégrale existe, on a immédiatement

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy = g * f(x) \ .$$

Théorème 2. *Soient $p, q \in [1, \infty]$ des exposants conjugués (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).*

1. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g(x)$ existe pour presque tout x et définit $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ qui vérifie*
$$\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1 \ .$$
2. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g(x)$ existe pour presque tout x et définit $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ qui vérifie*
$$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p \ .$$
3. *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g(x)$ existe pour tout x et définit $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui vérifie*
$$\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_q \ .$$
De plus, $f * g$ est uniformément continue. Enfin, si $1 < p < \infty$, alors $\lim\limits_{|x| \to \infty} f * g(x) = 0$.

Proposition 4. *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.*

Théorème 3. *Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est intégrable et si $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ et à support compact. Alors $\rho * f$ est définie partout et de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}^d$. De plus, pour toute dérivée partielle ∂^α d'ordre $\leqslant k$, on a*

$$\partial^\alpha(\rho * f) = (\partial^\alpha \rho) * f \ .$$

En particulier, si ρ est $\mathscr{C}^\infty$, alors les fonctions $\rho * f$ sont $\mathscr{C}^\infty$.

Définition 3. On appelle **approximation de l'unité** une suite (ρ_n) de fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}^d$, d'intégrale 1 et telles que

$$\forall \delta > 0, \quad \int_{|x| > \delta} \rho_n(x)dx \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \ .$$

Proposition 5. *Si $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ est mesurable d'intégrale 1, alors*

$$\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$$

définit une approximation de l'unité. Par exemple, $\rho_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2 x^2}{2}}$ est une approximation de l'unité sur $\mathbb{R}$.

Théorème 4. *Soit (ρ_n) une approximation de l'unité.*

1. *Si $f \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}^d)$, alors $\rho_n * f$ converge vers f uniformément sur les compacts.*
2. *Si $p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors $\rho_n * f$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Définition 4. Une **suite régularisante** est une approximation de l'unité composée de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à supports compacts.

Théorème 5. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert. Si $p < \infty$, alors $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

3 Transformée de Fourier sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$

Pour un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on notera $|\alpha| = \sum_{k=1}^{d} |\alpha_k|$ le “poids” de α et pour $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on notera

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d} \;, \quad \partial^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d} f \;.$$

Définition 5. On introduit l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ telles que pour tous multi-indices α, β,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\beta \partial^\alpha f(x)| < \infty \;.$$

Autrement dit, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions lisses dont toutes les dérivées sont à décroissance rapide (tendent vers zéro plus vite à l'infini que n'importe quel polynôme).

Exemple 4.

- La gaussienne $g_\sigma(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{2\sigma^2}}$ est dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.
- On a $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 6. *$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par dérivations, et par multiplication par les polynômes à d variables.*

Théorème 6. *L'application $\mathcal{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est une bijection linéaire et*

$$\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \hat{f}(\xi) e^{i\xi.x} d\xi \;.$$

De plus, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, avec un léger abus de notations, on a pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

$$\partial^\alpha \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}\big((-ix)^\alpha f(x)\big)(\xi) \;,$$
$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) \;.$$

Exemple 5. On fixe $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et on cherche à résoudre l'EDP $-\Delta u + u = f$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

4 Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$

Théorème 7. *La transformée de Fourier, définie sur $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, s'étend par densité en une bijection linéaire $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ qui vérifie la formule de Plancherel*

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \|f\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|\mathcal{F} f\|_2 \;,$$

et dont l'inverse est $\frac{1}{(2\pi)^d} \widetilde{\mathcal{F}}$, où l'on a noté $\widetilde{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \mathcal{F} f(-\xi)$.

Exemple 6. Ceci permet de définir la transformée de Fourier de la fonction sinc : $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ (voir TD).

Exemple 7. La formule de Plancherel permet également d'exprimer l'énergie de certaines solutions d'EDO ou EDP. Par exemple, la formule de Plancherel permet d'exprimer avec la transformée de Fourier la norme de l'espace $H^1(\mathbb{R}^d)$ des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ayant des dérivées d'ordre 1 au sens faible dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Autre exemple : la formule de Plancherel permet d'étudier l'évolution de l'énergie dans certains systèmes physiques comme celui modélisé par l'équation de la chaleur.