

Séries de Fourier

Arthur Leclaire

Notations On notera $\mathcal{C}^k(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions 2π -périodiques $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^k . On dira qu'une fonction 2π -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est \mathcal{C}^k par morceaux s'il existe $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_J = 2\pi$ subdivision telle que pour tout $0 \leq j < J$, $f|_{]x_j, x_{j+1}[}$ admette un prolongement à $[x_j, x_{j+1}]$ de classe \mathcal{C}^k .

Pour $p \in [1, \infty]$, on notera $L^p(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mesurables 2π -périodiques et telles que $f|_{[0, 2\pi]} \in L^p(0, 2\pi)$, où l'on identifie deux fonctions égales presque partout. C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (p < \infty) \quad , \quad \|f\|_\infty = \inf \{ M > 0 \mid |f| \leq M \text{ p.p.} \} .$$

On notera $\mathbb{C}_0^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ qui admettent pour limite 0 en $-\infty$ et $+\infty$. Il est muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|$.

Enfin, on notera \mathcal{P} le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ engendré par les fonctions

$$e_n : t \mapsto e^{int} \quad (n \in \mathbb{Z}) .$$

Ainsi \mathcal{P} est l'ensemble des polynômes trigonométriques.

1 Séries de Fourier

1.1 Généralités

Définition 1. Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{Z}$. Le n -ième **coefficient de Fourier** de f est défini par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = \int_{\mathbb{T}} f \bar{e}_n d\mu .$$

La **série de Fourier** associée à f est alors la série de fonctions

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} \quad (x \in \mathbb{R}) ,$$

la somme sur \mathbb{Z} signifiant $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N f(x)$, où les sommes partielles sont données par

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx} .$$

Bien entendu, nous ne savons pas *a priori* si cette série converge, et ce sera l'une des questions cruciales étudiées dans la suite. On notera aussi

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n f(x)$$

les sommes de Cesàro associée à la suite $(S_N f(x))_{N \in \mathbb{N}}$.

Proposition 1. $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de $L^2(\mathbb{T})$.

Proposition 2. Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$, $a \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{Z}$. alors on a

1. $c_n(\tilde{f}) = c_{-n}(f)$ où l'on a noté $\tilde{f}(x) = f(-x)$,
2. $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$,
3. $c_n(\tau_a f) = e^{-ina} c_n(f)$ où l'on a noté $\tau_a f(x) = f(x - a)$,
4. Si $f = \sum_{n \in I} c_n e_n$ avec $I \subset \mathbb{Z}$ fini (i.e. $f \in \mathcal{P}$), alors $c_n(f) = c_n$.

Remarque 1. Ces propriétés entraînent certaines symétries dans les coefficients de Fourier pour des fonctions particulières. Par exemple, si f est à valeurs réelles, alors $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$. Aussi, si f est paire, alors $c_{-n}(f) = c_n(f)$ ce qui permet de regrouper les termes en $-n$ et n dans la série de Fourier, et donc d'écrire la série de Fourier en cosinus. De même, si f est impaire, alors $c_{-n}(f) = -c_n(f)$ ce qui permet d'écrire la série de Fourier en sinus.

Dans la pratique, on écrit parfois la série de Fourier sous la forme

$$\frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n \geq 1} \left(a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx) \right),$$

où les coefficients sont donnés par

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

L'avantage de cette représentation est que les coefficients sont réels dès que la fonction f l'est aussi. Son inconvénient est que les propriétés liées à l'orthogonalité des exponentielles complexes (par exemple la formule de Parseval) se lisent moins facilement sur les coefficients a_n et b_n . Dans les exercices calculatoires, on jonglera entre les deux écritures de la série de Fourier.

Proposition 3. L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) &\longrightarrow \mathbb{C}_0^{\mathbb{Z}} \\ f &\longmapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

est une application linéaire continue de norme 1.

Lemme 1 (Riemann-Lebesgue). Si $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-i\xi x} dx$.
Alors $\hat{\varphi}(\xi) \rightarrow 0$ quand $|\xi| \rightarrow \infty$.

Démonstration. On le démontrera au début du cours 3 sur la transformée de Fourier. □

Exemple 1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors $c_0(f) = \frac{1}{2}$, et pour tout $n \neq 0$, $c_n(f) = \frac{i^{n+1}}{2\pi n} ((-1)^n - 1)$.

Proposition 4 (Lien avec la dérivation).

Soit $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$.

En particulier, on a alors $c_n(f) = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$ quand $|n| \rightarrow \infty$.

1.2 Convolution périodique

Théorème-Définition 1. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. La convolution périodique $f * g$ est définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) g(x - y) dy.$$

De plus $f * g \in L^1(\mathbb{T})$ avec $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. Aussi, on a immédiatement $f * g = g * f$, c'est-à-dire que

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x - y) g(y) dy.$$

Corollaire 1. Soient $f \in L^p(\mathbb{T})$ et $g \in L^1(\mathbb{T})$. Alors $f * g$ est bien définie presque partout. Mieux, on a en fait $f * g \in L^p(\mathbb{T})$ avec $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$.

Démonstration. Voir TD. □

Proposition 5.

1. Si $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$.
2. Si $K \in \mathcal{P}$, alors $K * f \in \mathcal{P}$. En particulier, pour toute $f \in L^1(\mathbb{T})$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $f * e_n = c_n(f) e_n$.

Définition 2. Le noyau de Dirichlet est défini par

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad D_N = \sum_{|n| \leq N} e_n \quad \text{i.e.} \quad D_N(x) = \sum_{|n| \leq N} e^{inx}.$$

Le noyau de Fejér est défini pour $N \geq 1$ par $K_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n$.

Proposition 6. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

1. $S_N f = f * D_N$.
2. $\sigma_N f = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n f = f * K_N$.
3. $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(x) dx = 1$ et $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_N(x) dx = 1$.
4. Les noyaux de Dirichlet et Fejér vérifient pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$,

$$D_N(x) = \frac{\sin\left((N + \frac{1}{2})x\right)}{\sin \frac{x}{2}},$$

$$K_N(x) = \sum_{|n| \leq N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{inx} = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin \frac{Nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right)^2.$$

5. Pour tout $\delta \in]0, \pi[$, on a

$$\sup_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_N(x)| \leq \frac{1}{N \sin^2(\frac{\delta}{2})}.$$

Démonstration. Les trois premiers points sont faciles. Pour le quatrième point, on utilise une somme de termes de suites géométriques :

$$D_N(x) = e^{-iNx} \frac{e^{(2N+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1} = e^{-iNx} \frac{e^{iNx+i\frac{x}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}} \frac{e^{iNx+i\frac{x}{2}} - e^{-iNx-i\frac{x}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = \frac{\sin\left((N + \frac{1}{2})x\right)}{\sin \frac{x}{2}},$$

et

$$K_N(x) = \frac{1}{N \sin \frac{x}{2}} \operatorname{Im} \left(e^{i\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{inx} \right) = \frac{1}{N \sin \frac{x}{2}} \operatorname{Im} \left(e^{i\frac{x}{2}} \frac{e^{iNx} - 1}{e^{ix} - 1} \right) = \frac{1}{N \sin \frac{x}{2}} \operatorname{Im} \left(e^{i\frac{Nx}{2}} \frac{e^{i\frac{Nx}{2}} - e^{-i\frac{Nx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \right) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin \frac{Nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2.$$

Le dernier point s'obtient en majorant le numérateur par 1 en en minorant le dénominateur par $\sin^2(\frac{\delta}{2})$ sur l'ensemble $[\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]$. □

2 Théorèmes de convergence

Théorème 2. Convergence Ponctuelle - Théorème de Dirichlet

Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$ et un point $a \in \mathbb{R}$ fixé.

On suppose que f admet en a des limites finies à gauche et à droite notées $f(a_-)$ et $f(a_+)$ et qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\int_0^\delta \frac{|f(a+t) - f(a_+)|}{t} dt < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^\delta \frac{|f(a-t) - f(a_-)|}{t} dt < \infty.$$

Alors

$$S_N f(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (f(a_-) + f(a_+)).$$

Corollaire 2. Si f est \mathcal{C}^1 par morceaux et 2π -périodique, alors

$$S_N f(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (f(a_-) + f(a_+)).$$

Si de plus, f est continue en a , alors $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(a) = f(a)$.

Exemple 2. En reprenant la fonction f définie dans l'Exemple 1, on peut montrer que la série de Fourier de f converge en tout point $a \in \mathbb{R}$ vers $\frac{1}{2}(f(a_-) + f(a_+))$. En conséquence,

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{i^{n+1}}{2\pi n} ((-1)^n - 1) e^{inx} = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Théorème 3. Théorème de Fejér

1. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Alors $\sigma_N f \rightarrow f$ uniformément sur \mathbb{R} .

Autrement dit, la série de Fourier converge uniformément vers f au sens de Cesàro.

2. Soit $f \in L^p(\mathbb{T})$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors $\|\sigma_N f\|_p \leq \|f\|_p$.

De plus, $\sigma_N f \rightarrow f$ dans $L^p(\mathbb{T})$.

Démonstration. Pour le premier point, il s'agit d'écrire, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$K_N * f(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-y) - f(x)) K_N(y) \frac{dy}{2\pi},$$

et on peut alors découper l'intégrale $\int_{|x| < \pi} = \int_{|x| > \delta} + \int_{\delta \leq |x| < \pi}$ et contrôler les deux morceaux.

Pour le second point, l'inégalité provient du fait que $\|K_N\|_1 = 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in \mathcal{C}_c(]0, 2\pi[)$ telle que $\|f - g\|_p < \varepsilon$. On a alors

$$\|K_N * f - f\|_p \leq \|K_N * g - K_N * f\|_p + \|K_N * g - g\|_p + \|g - f\|_p \leq 2\varepsilon + \|K_N * g - g\|_p.$$

Le premier point donne alors que $K_N * g \rightarrow g$ uniformément sur \mathbb{R} et donc dans $L^p(0, 2\pi)$. \square

Corollaire 3.

1. Les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ et dans $L^p(\mathbb{T})$ pour $p < \infty$.

2. La transformation de Fourier $f \in L^1(\mathbb{T}) \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est injective. Autrement dit, deux fonctions $L^1(\mathbb{T})$ ayant les mêmes coefficients de Fourier sont égales **presque partout**.

Remarque 2. Le théorème de Fejér montre que pour une fonction f continue 2π -périodique, la série de Fourier converge uniformément au sens de Cesàro sur \mathbb{R} . Mais sans hypothèse supplémentaire, on n'a pas la convergence uniforme au sens classique, ni même ponctuelle. De façon étonnante, il est possible de construire des contre-exemples de fonctions continues dont la série de Fourier diverge en un point.

3 Séries de Fourier dans $L^2(\mathbb{T})$

On a vu au début que $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de $L^2(\mathbb{T})$. De plus, du théorème de Fejér découle la densité de $\mathcal{P} = \text{Vect}(e_n, n \in \mathbb{Z})$. Par conséquent $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$. Avec la théorie des espaces de Hilbert, on en déduit directement le théorème fondamental suivant.

Théorème 4. Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. On a

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle e_n \quad (1)$$

où la série converge dans $L^2(\mathbb{T})$, c'est-à-dire $S_N f = \sum_{|n| \leq N} \langle f, e_n \rangle e_n \rightarrow f$ dans $L^2(\mathbb{T})$. De plus, on a

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \frac{dx}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Formule de Parseval}).$$

Aussi,

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{T}), \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \overline{c_n(g)}.$$

À l'inverse, si $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, on peut définir

$$g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e_n$$

où la série converge dans $L^2(\mathbb{T})$, et ceci définit une fonction $g \in L^2(\mathbb{T})$ telle que $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(g) = \alpha_n$.

En résumé, on peut dire que l'application suivante est une bijection linéaire isométrique :

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f & \longmapsto & (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \end{array}$$

Remarque 3. En comparaison des théorèmes de Dirichlet et Fejér, ce dernier théorème a l'avantage d'être "automatique" : toute fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$ se décompose sur la base de Fourier $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ avec convergence dans L^2 . Notez néanmoins que la convergence L^2 n'implique pas la convergence ponctuelle, et donc vous ne pouvez pas évaluer ponctuellement l'égalité (1). Si l'on veut écrire une identité valable en un $x \in \mathbb{R}$ donné, en général on cherchera à appliquer les théorèmes de Dirichlet ou Fejér. Le théorème suivant, qui découle du cas L^2 , donne aussi un critère très pratique.

Exemple 3. On peut reprendre de nouveau la fonction f de l'Exemple 1. Comme $f \in L^2(\mathbb{T})$, on peut appliquer le théorème précédent, qui donne que la série de Fourier de f converge vers f dans $L^2(\mathbb{T})$. De plus, la formule de Parseval permet de calculer la norme ℓ^2 des coefficients de Fourier.

Exemple 4. Dans l'autre sens, on peut partir de la série de coefficients $\alpha_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$. Comme cette suite est de carré sommable, le théorème précédent permet de définir, dans $L^2(\mathbb{T})$, la série de fonctions

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{e^{inx}}{n}.$$

Proposition 7. Si f est 2π -périodique, continue et \mathcal{C}^1 par morceaux, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$$

où la série converge normalement sur \mathbb{R} (et donc uniformément).

Démonstration. Voir TD. □

4 Applications

4.1 Analyse de Régularité, Approximation

Théorème 5.

1. Si $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$, alors $c_n(f) = o(\frac{1}{n^k})$ quand $|n| \rightarrow \infty$.
2. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ vérifie $c_n(f) = O(\frac{1}{n^{k+2}})$ quand $|n| \rightarrow \infty$, alors f est égale p.p. à une fonction $\mathcal{C}^k(\mathbb{T})$.
3. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Alors f est de classe \mathcal{C}^∞ si et seulement si la suite de ses coefficients de Fourier est à décroissance rapide, c'est-à-dire $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{|n| \rightarrow \infty} |n|^k c_n(f) \rightarrow 0$.

Proposition 8. Soit $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$ avec $k \geq 2$ entier. Alors

$$\|S_N f - f\|_\infty \leq \frac{C \|f^{(k)}\|_\infty}{N^{k-1}},$$

où $C > 0$ est une constante ne dépendant pas de f .

Remarque 4. La proposition précédente montre qu'on peut contrôler la vitesse de convergence en norme uniforme de la série de Fourier, à condition de considérer des fonctions suffisamment régulières. On peut aussi faire des énoncés plus fins, avec d'autres notions de régularité (par exemple avec les fonctions hölderiennes, voir TD).

Par ailleurs, la formule de Parseval permet d'exprimer que l'"énergie" $\|f\|_2$ présente dans le signal f se lit au travers des coefficients de Fourier. En utilisant cela sur les dérivées, on peut parfois interpréter la régularité de f au travers de l'énergie présente dans ses dérivées. Par exemple :

Proposition 9 (Une inégalité de Poincaré). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ telle que $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$. Alors

$$\|f\|_2 \leq \|f'\|_2.$$

Démonstration. Avec la formule de Parseval, on a

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{c_n(f')}{in} \right|^2 = \sum_{n \neq 0} \frac{|c_n(f')|^2}{n^2} \leq \sum_{n \neq 0} |c_n(f')|^2 \leq \|f'\|_2^2.$$

□

4.2 Filtrage, Régularisation

Comme dans le cas discret, si $h \in L^1(\mathbb{T})$ est une fonction fixée, l'opération $f \mapsto h * f$ est une application linéaire qu'on appelle "filtrage avec le noyau h ". Elle est même continue pour la norme L^1 . Là encore, on peut interpréter l'effet sur le spectre grâce à l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |c_n(h * f)| = |c_n(h)| |c_n(f)|,$$

et on pourra là encore, parler de filtres passe-bas, passe-haut, passe-bande. On dira parfois aussi que h est la réponse impulsionnelle du filtre (car on peut voir, dans un certain cadre, que c'est l'image de l'impulsion de Dirac δ_0 par cette convolution).

Puisque $S_n f = D_n * f$ et $\sigma_n f = K_n * f$, les opérations $f \mapsto S_n f$ et $f \mapsto \sigma_n f$ sont elles-mêmes des filtrages, qui débouchent sur les théorèmes de Dirichlet et Fejér. On peut même concevoir d'autres noyaux trigonométriques (h_n) qui auront des propriétés d'approximation encore meilleures que (D_n) ou (K_n).

Un autre intérêt du filtrage est qu'il permet de régulariser des fonctions, pour peu que le filtre soit suffisamment régulier. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 6. Soient $h \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$ et $f \in L^1(\mathbb{T})$. Alors $h * f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$ et

$$(h * f)^{(k)} = h^{(k)} * f.$$

En particulier, $h * f$ est \mathcal{C}^∞ dès que h l'est.

Exemple 5. Fixons une fonction $h : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}_+$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que $\text{Supp}(h) \subset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Posons pour $x \in [-\pi, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$h_n(x) = nh(nx) .$$

Prolongeons alors les fonctions h et (h_n) par 2π -périodicité à tout \mathbb{R} . On peut voir que (h_n) est une suite de fonctions \mathcal{C}^∞ dont la masse se concentre en zéro, c'est-à-dire que

$$\forall \delta > 0, \quad \int_{\delta < |x| < \pi} h_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

On dit que (h_n) est une *approximation de l'unité périodique*. On peut alors montrer que, pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{T})$, on a $h_n * f \rightarrow f$ dans $L^p(\mathbb{T})$. Ceci donne donc une manière (autre que le théorème de Fejér) d'approcher n'importe quelle fonction $f \in L^p(\mathbb{T})$ par des fonctions \mathcal{C}^∞ .

4.3 Résolution d'EDO ou EDP

Comme $e'_n = ine_n$, la fonction e_n est un vecteur propre (pour la valeur propre in) de l'opérateur de dérivation (par exemple défini sur $\mathcal{C}^1(\mathbb{T})$). Comme vous l'avez fait dans les cours d'EDP, on va donc pouvoir résoudre des EDO ou EDP en décomposant la fonction inconnue sur la base de Fourier.

Une autre façon de voir les choses est d'exploiter la relation $c_n(f') = inc_n(f)$. Autrement dit, les coefficients de Fourier échangent des dérivations avec la multiplication par un polynôme. Une EDO sur f va donc se traduire avec une équation polynômiale sur les coefficients de Fourier.

Exemple 6. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Cherchons à résoudre l'équation différentielle $-u'' + u = f$ avec conditions de bords périodiques, c'est-à-dire, cherchons toutes les fonctions $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$ vérifiant $-u'' + u = f$.

Soit $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$. On a

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(-u'' + u) = (n^2 + 1)c_n(u).$$

En utilisant l'injectivité des coefficients de Fourier, on a donc

$$\begin{aligned} & -u'' + u = f \\ \iff & \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (n^2 + 1)c_n(u) = c_n(f) \\ \iff & \forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(u) = \frac{c_n(f)}{n^2 + 1} \end{aligned}$$

Comme $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, $\sup_n |c_n(f)| < \infty$ et donc $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{c_n(f)}{n^2 + 1} \right| < \infty$. Par conséquent, on peut définir

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{c_n(f)}{n^2 + 1} e^{inx}$$

où la série converge uniformément sur \mathbb{R} . De plus, on peut voir que les coefficients de Fourier vérifient l'équation précédente, et donc u est solution de $-u'' + u = f$. Notez aussi qu'on voit sur ses coefficients de Fourier que la solution u est la convolution périodique de f avec le noyau $k \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ défini par ses coefficients de Fourier :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(k) = \frac{1}{n^2 + 1} .$$

Notez tout de même au passage que cette équation $-u'' + u = f$ est une simple équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Par conséquent, vous pouvez appliquer les outils standard de résolution (équation homogène, etc). Ceci peut d'ailleurs vous permettre de trouver l'expression du noyau k ci-dessus.

Exemple 7 (Équation de la chaleur). Fixons une condition initiale $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ et cherchons $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}$, de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}$ et vérifiant

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T} \\ u(0, x) &= f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Une façon classique de résoudre cette EDP est de considérer, pour chaque $t > 0$, les coefficients de Fourier $(c_n(t))_{n \in \mathbb{Z}}$ associés à la fonction $u(t, \cdot)$. On peut alors montrer que la dérivée en temps passe au travers des coefficients de Fourier :

$$\partial_t c_n(t) = c_n(\partial_t u(t, \cdot)) .$$

On peut alors en déduire que pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, $t \mapsto c_n(t)$ est solution d'une EDO linéaire d'ordre 1 que l'on sait résoudre explicitement. Ceci permet d'obtenir que la solution au temps t s'écrit $u(t, \cdot) = f * p_t$ où p_t (noyau de la chaleur périodique) est défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p_t(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t} e^{inx} .$$

Voir les détails en TD.