
TP : Martingales 1

Exercice 1. Ruine du joueur

Soient $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. On considère $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = -1) = q .$$

On modélise l'évolution de la fortune d'un joueur jouant 1 euro à chaque partie et partant d'une fortune initiale $a \in \mathbb{N}^*$ par

$$S_n = a + \sum_{i=1}^n X_i .$$

On suppose que le joueur s'arrête de jouer lorsqu'il a atteint la somme $b \in \mathbb{N}$ ($b > a$) ou lorsqu'il est ruiné. On note

$$T = \inf\{n \geq 0 \mid S_n = b \text{ ou } S_n = 0\} .$$

On va voir que $T < \infty$ p.s. et on notera alors $R = \{S_T = 0\}$ l'évènement "le joueur finit ruiné".

Partie A : Une martingale

1. Simuler une partie jusqu'à ruine ou fortune du joueur en fonction de a , b , et p .
2. Montrer que $M_n = S_n - n(p - q)$ est une martingale pour une filtration que l'on précisera.
3. Montrer que T est un temps d'arrêt.

Partie B : Cas $p \neq q$.

4. Montrer que $T < \infty$ p.s.
5. Calculer $\mathbb{E}[T]$ en fonction de la probabilité de ruine.
6. Posons $Z_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$. Montrer que c'est une martingale positive. En déduire $\mathbb{E}[Z_T]$.
Déduire de ce qui précède la probabilité de ruine et la valeur de $\mathbb{E}[T]$.
7. Pour $p = \frac{1}{3}$, $a = 10$ et $b = 20$, estimer numériquement la durée moyenne d'une partie.
Estimer la probabilité de ruine. Vérifier les résultats obtenus.
8.
 - a. Tracer les courbes de la durée moyenne (théorique et estimée) d'une partie en fonction de p .
 - b. Tracer aussi ces courbes pour la probabilité de ruine.
9. Construire un histogramme des durées des parties pour différentes valeurs de p .

Partie C : Cas $p = q = \frac{1}{2}$.

10. Calculer la probabilité de ruine du joueur.
11. Montrer que $U_n = (S_n - a)^2 - n$ est une martingale. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[T]$.
12. De même pour $p = \frac{1}{2}$, $a = 10$ et $b = 20$, estimer numériquement la durée moyenne d'une partie.
Estimer la probabilité de ruine. Vérifier les résultats obtenus.