Université de Bordeaux | **Mathématiques**
Préparation à l'agrégation, Option A | **Année 2018/2019**

TD - Vecteurs Gaussiens

Exercice 1.

1. On peut écrire $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ où

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Par conséquent, $(U, V)^T$ est un vecteur gaussien de covariance $\Gamma = AA^T = \frac{1}{2} I$. Autrement dit, U, V sont indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$.

2. Remarquons que $X - U = \frac{X-Y}{2}$ et $Y - U = \frac{Y-X}{2}$ donc

$$W = \left(\frac{X - Y}{2} \right)^2 = V^2 .$$

Comme $W = V^2$, la question précédente assure que W est indépendante de U. De plus

$$2W = (\sqrt{2} V)^2$$

et $\sqrt{2}V \sim \mathcal{N}(0, 1)$ donc $2W \sim \chi^2(1)$. Autrement dit, la loi de W admet pour densité

$$f(w) = \frac{e^{-w}}{\sqrt{\pi w}} \mathbf{1}_{w>0} .$$

On peut aussi reconnaître une loi Gamma : $W \sim G(\frac{1}{2}, 1)$.

Exercice 2.

Exercice 3.

1. Réponse : $\mathrm{Ker}(\Gamma) = \mathbb{R}v$ où $v = (0, 1, -1)^T$.

2. Réponses :

$$\mathbb{E}[AX] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \Gamma_{AX} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & -4 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} .$$

Par ailleurs, on a $\mathbb{E}[X_2 - X_3] = \mathbb{E}[X_2] - \mathbb{E}[X_3] = 1$ et que

$$\mathrm{Var}(X_2 - X_3) = \mathrm{Var}(X_2) + \mathrm{Var}(X_3) - 2\mathrm{Cov}(X_2, X_3) = 2 + 2 - 4 = 0 .$$

Par conséquent $X_2 - X_3 = 1$ p.s., et donc $X_2 - X_3 = \mathbb{E}[X_2 - X_3] = 1$ p.s.

Remarque : Il y avait en fait une erreur d'énoncé. On aurait dû calculer les caractéristiques du vecteur gaussien BX avec

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De cette manière, la deuxième composante de BX est directement $X_2 - X_3$. Ainsi, le fait que $X_2 - X_3$ se lit directement sur le coefficient d'indice $(2, 2)$ de la matrice Γ_{BX}.

3. La covariance de (X_1, X_2) s'écrit

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Cette matrice est inversible d'inverse

$$C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Donc, en notant que $\mathbb{E}[(X_1, X_2)^T] = (1,1)^T$, on obtient que (X_1, X_2) admet pour densité

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi C)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 - 1 & x_2 - 1 \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{1}{3} \left((x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 - (x_1-1)(x_2-1) \right) \right) . \end{aligned}$$

Pour ceux qui ont souhaité développer (mais on n'y était pas obligé), on a aussi l'expression

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{1}{3} (x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1) \right) .$$

4. On a montré dans la question 2 que la loi de X était supportée dans l'hyperplan affine H d'équation $x_2 - x_3 = 1$. De plus, on a vu à la question 3 que la loi de (X_1, X_2) admet une densité > 0 sur $\mathbb{R}^2$. Par suite, la loi de X admet une densité > 0 sur H, et donc H est le support de la loi de X.

Remarque : Attention, la notion de support pour une mesure (ou même pour une fonction L^p) est plus difficile à définir que pour une fonction continue.

Exercice 4. Densité des vecteurs gaussiens

1. On remarque immédiatement que $m + AZ$ est un vecteur gaussien d'espérance m et de matrice de covariance $AA^T = \Gamma$, donc a même loi que X.

2. Si Γ est une matrice symétrique positive, il existe $P \in O(d)$ et $\alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_d \geqslant 0$ telles que $\Gamma = PDP^T$ où $P = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$. En posant $A = P\mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_d})P^T$, on a $A^2 = \Gamma$ (autrement dit, A est une racine carrée de Γ) et aussi $AA^T = \Gamma$ car A est symétrique. On en déduit que Γ est la matrice de covariance de AZ où $Z \sim \mathcal{N}(0, I_d)$.

Remarque : Ainsi, l'ensemble des matrices de covariances est exactement l'ensemble des matrices symétriques positives.

3. Considérons une matrice $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ telle que $\Gamma = AA^T$ (on vient de voir qu'il existait toujours une telle matrice). On a $\det(\Gamma) = \det(A)\det(A^T) = (\det(A))^2$. L'inversibilité de Γ impose donc que A est inversible. De plus, avec la question 1, X et $m + AZ$ ont même loi, et Z est un d-uplet de v.a. i.i.d de loi $\mathcal{N}(0,1)$ (et donc on connaît la densité explicitement). Donc pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \mathbb{E}[\varphi(m + AZ)] = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(m + Az) e^{-\frac{1}{2}\|z\|^2} dz .$$

Avec le changement de variables $x = m + Az$, $dx = |\det(A)| dz$, on en déduit

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\det(A)|} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-\frac{1}{2}\|A^{-1}(x-m)\|^2} dx .$$

Pour terminer, il suffit de remarquer que $|\det(A)| = \sqrt{\det(\Gamma)}$ et que

$$\|A^{-1}(x-m)\|^2 = (x-m)^T (A^{-1})^T A^{-1}(x-m) = (x-m)^T (AA^T)^{-1}(x-m) = (x-m)^T \Gamma^{-1}(x-m)$$

pour en conclure que la densité de $\mathcal{N}(m, \Gamma)$ s'écrit

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\Gamma)}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T \Gamma^{-1}(x-m)} .$$

Exercice 5. Espérance conditionnelle, cas gaussien

1. (Méthode 1) Pour $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, posons $P_j = \mathbb{E}[Y_j|X]$.

a. Puisque $(Y_j, X_1, \ldots, X_k)$ est un vecteur gaussien, d'après le cours, $\mathbb{E}[Y_j|X] = \mathbb{E}[Y_j|X_1, \ldots, X_k]$ est la projection orthogonale de Y_j sur $\mathrm{Vect}(1, X_1, \ldots, X_k)$. En particulier, il existe $\lambda_j = (\lambda_j^1, \ldots, \lambda_j^k) \in \mathbb{R}^k$ tel que

$$P_j = \lambda_j^1 X_1 + \ldots + \lambda_j^k X_k = \lambda_j^T X \ .$$

b. On forme une matrice $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell) \in \mathbb{R}^{k\times\ell}$ en juxtaposant les colonnes λ_j. L'égalité précédente se réécrit matriciellement $\mathbb{E}[Y|X] = P = \Lambda^T X$.

Comme P_j est la projection orthogonale de Y_j sur $\mathrm{Vect}(1, X_1, \ldots, X_k)$, on a

$$\mathbb{E}[(Y_j - P_j)X_i] = 0$$

$$\text{i.e.} \quad \mathbb{E}[Y_j X_i] = \mathbb{E}[P_j X_i]$$

$$\text{i.e.} \quad (\Gamma_{Y,X})_{j,i} = \mathbb{E}[(PX^T)_{j,i}] = (\mathbb{E}[\Lambda^T XX^T])_{j,i} = (\Lambda^T \mathbb{E}[XX^T])_{j,i} = (\Lambda^T \Gamma_X)_{j,i}$$

donc

$$\Lambda^T \Gamma_X = \Gamma_{Y,X} \ .$$

c. Γ_X étant inversible, on a nécessairement

$$\Lambda^T = \Gamma_{Y,X}\Gamma_X^{-1}$$

et donc en remplaçant dans l'expression de P, il vient $\mathbb{E}[Y|X] = \Gamma_{Y,X}\Gamma_X^{-1}X$.

2. (Méthode 2) Posons $P = \Gamma_{Y,X}\Gamma_X^{-1}X$.

a. Remarquons que $T = \begin{pmatrix} X \\ Y - P \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien car

$$T = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\Gamma_{Y,X}\Gamma_X^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \ .$$

b. De plus, il est centré et on peut calculer sa covariance matriciellement

$$\begin{aligned} \Gamma_T &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\Gamma_{Y,X}\Gamma_X^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_X & \Gamma_{X,Y} \\ \Gamma_{Y,X} & \Gamma_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\Gamma_X^{-1}\Gamma_{X,Y} \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Gamma_X & \Gamma_{X,Y} \\ 0 & \Gamma_Y - \Gamma_{Y,X}\Gamma_X^{-1}\Gamma_{X,Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\Gamma_X^{-1}\Gamma_{X,Y} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_X & 0 \\ 0 & \Gamma_Y - \Gamma_{Y,X}\Gamma_X^{-1}\Gamma_{X,Y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\Gamma_{X,Y-P} = 0$. Comme T est un vecteur gaussienn, on en déduit que X et $Y - P$ sont indépendantes.

c. Écrivons $Y = P + Y - P$. Comme $P = \Gamma_{Y,X}\Gamma_X^{-1}X$ est une fonction mesurable de X, on a $\mathbb{E}[P|X] = P$. Et par ailleurs on vient de voir que X et $Y - P$ sont indépendantes, donc $\mathbb{E}[Y - P|X] = \mathbb{E}[Y - P]$. Mais par ailleurs, $\mathbb{E}[P] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[Y]$ donc $\mathbb{E}[Y - P] = 0$. Il s'ensuit que

$$\mathbb{E}[Y|X] = \mathbb{E}[P|X] + \mathbb{E}[Y - P|X] = P \ .$$

(Remarque : dans les égalités précédentes, pour alléger les notations, on a fait des espérances conditionnelles directement sur le vecteur $Y = (Y_1, \ldots, Y_\ell)$. Il faut interpréter cela comme faire l'espérance conditionnelle composante par composante, de même que l'intégrale d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^\ell$ revient à faire l'intégrale composante par composante.)

3. Pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}_+$ mesurable, on a

$$\mathbb{E}[\varphi(Y)|X] = \mathbb{E}[\varphi(P + Y - P)|X] = \mathbb{E}[\varphi(\Gamma_{Y,X}\Gamma_X^{-1}X + Y - P)|X] \ .$$

Mais comme $Y - P$ est indépendant de X, on peut écrire cela

$$\mathbb{E}[\varphi(Y)|X] = \int \varphi(\Gamma_{Y,X}\Gamma_X^{-1}X + u)\mu(du)$$

où μ est la loi de $Y - P$. Or $Y - P = Y - \Gamma_{Y,X}\Gamma_X^{-1}X$ est un vecteur gaussien et le calcul montre que sa covariance s'écrit $\Gamma_Y - \Gamma_{Y,X}\Gamma_X^{-1}\Gamma_{X,Y}$. On en déduit

$$\mathbb{E}[\varphi(Y)|X] = \int \varphi(v)\mu_X(dv) \quad \text{où} \quad \mu_X = \mathcal{N}\Big(\Gamma_{Y,X}\Gamma_X^{-1}X \ , \ \Gamma_Y - \Gamma_{Y,X}\Gamma_X^{-1}\Gamma_{X,Y} \Big) \ .$$

Ceci se reformule en disant que $\mathcal{N}\Big(\Gamma_{Y,X}\Gamma_X^{-1}X \ , \ \Gamma_Y - \Gamma_{Y,X}\Gamma_X^{-1}\Gamma_{X,Y} \Big)$ est la loi conditionnelle de Y sachant X.

Remarque : En fait, $\Gamma_Y - \Gamma_{Y,X}\Gamma_X^{-1}\Gamma_{X,Y}$ est la variance conditionnelle de Y sachant X et elle apparaissait dès la question 2b. On notera qu'elle ne dépend même pas de la valeur de X, mais seulement de la covariance du vecteur $(X, Y)^T$, ce qui est une propriété étonnante du conditionnement gaussien.

Par ailleurs, le résultat de la question 3 se reformule en disant que si l'on observe une réalisation x de X, alors on peut tirer un échantillon de Y sachant $X = x$ en prenant

$$x + Y' - \Gamma_{Y,X}\Gamma_X^{-1}X'$$

où (X', Y') est indépendante de (X, Y) et de même loi. Cette remarque simple a été récemment exploitée pour compléter des trous dans des images de microtextures. Pour les curieux, rendez-vous à l'adresse

`https://www.math.u-bordeaux.fr/~aleclaire/gaussian_inpainting/`