**Université de Bordeaux** | **Mathématiques**
**Préparation à l'agrégation** | **Année 2019/2020**

# TD - Vecteurs Gaussiens

**Exercice 1.**

Soit $(X, Y)$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ de loi $\mathcal{N}(0, I_2)$.

**1.** On définit
$$U = \frac{X+Y}{2} \quad \text{et} \quad V = \frac{X-Y}{2} .$$
Montrer que $(U, V)$ est un vecteur gaussien et calculer sa covariance.

**2.** On pose
$$W = \frac{1}{2}(X-U)^2 + \frac{1}{2}(Y-U)^2 .$$
Montrer que $U$ et $W$ sont indépendantes et déterminer la loi de $W$.

**Exercice 2.**

Soit $X$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ de loi $\mathcal{N}(m, \Gamma)$.
Déterminer la loi de $(X-m)^T\Gamma^{-1}(X-m)$.

**Exercice 3.**

Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$ dans $\mathbb{R}^3$ avec $\quad m = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} .$

**1.** Déterminer $\mathrm{Ker}(\Gamma)$.

**2.** On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$
Donner les caractéristiques du vecteur gaussien $AX$.

En déduire que $X_2 - X_3 = 1$ p.s.

**3.** Le vecteur gaussien $(X_1, X_2)$ admet-il une densité sur $\mathbb{R}^2$ ? Si oui laquelle ?

**4.** Quel est le support de la loi de $X$ dans $\mathbb{R}^3$ ?

**Exercice 4. Densité des vecteurs gaussiens**

Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \Gamma)$ avec $m \in \mathbb{R}^d$ et $\Gamma \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Soit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ telle que $AA^T = \Gamma$.

**1.** Soit $Z \sim \mathcal{N}(0, I_d)$. Montrer que $X$ et $m + AZ$ ont même loi.

**2.** Montrer que toute matrice symétrique positive $\Gamma$ est la covariance d'un vecteur gaussien.

**3.** Supposons $\Gamma$ inversible. En utilisant la question 1, montrer que $X$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, et l'expliciter.

**4.** Supposons $\Gamma$ non inversible. Montrer qu'alors il existe un hyperplan $H$ de $\mathbb{R}^d$ tel que $X \in H$ p.s.

En déduire que $X$ n'est pas à densité.

**Exercice 5. Espérance conditionnelle, cas gaussien**

Soient $X, Y$ des vecteurs gaussiens de $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^\ell$ respectivement.

On suppose que $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien centré. On écrit sa covariance par blocs

$$\Gamma_Z = \begin{pmatrix} \Gamma_X & \Gamma_{X,Y} \\ \Gamma_{Y,X} & \Gamma_Y \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \Gamma_{Y,X} = \big(\mathbb{E}[Y_j X_i]\big)_{\substack{1\leqslant j\leqslant \ell \\ 1\leqslant i\leqslant k}} .$$

On suppose que $\Gamma_X$ est inversible.

**1. (Méthode 1)** Pour $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, posons $P_j = \mathbb{E}[Y_j|X]$.

**a.** Montrer qu'il existe $\lambda_j \in \mathbb{R}^k$ telle que $P_j = \lambda_j^T X$.

**b.** On forme une matrice $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell) \in \mathbb{R}^{k\times\ell}$ en juxtaposant les colonnes $\lambda_j$. Montrer que

$$\Lambda^T \Gamma_X = \Gamma_{Y,X} .$$

**c.** En déduire que $\mathbb{E}[Y|X] = \Gamma_{Y,X}\Gamma_X^{-1}X$.

**2. (Méthode 2)** Posons $P = \Gamma_{Y,X}\Gamma_X^{-1}X$.

**a.** Montrer que $\begin{pmatrix} X \\ Y-P \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien.

**b.** Montrer que $X$ et $Y - P$ sont indépendantes.

**c.** En écrivant $Y = P + Y - P$, en déduire $\mathbb{E}[Y|X]$.

**3.** Écrivons $P = (P_1, \ldots, P_\ell)^T = \mathbb{E}[Y|X]$. En écrivant $Y = P + Y - P$, montrer que la loi conditionnelle de $Y$ sachant $X$ est la loi gaussienne

$$\mathcal{N}\Big( \Gamma_{Y,X}\Gamma_X^{-1}X \,,\, \Gamma_Y - \Gamma_{Y,X}\Gamma_X^{-1}\Gamma_{X,Y} \Big) .$$